СМБ

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

ТОМ 1

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

О. В. МЕЛЬНИКОВ, В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ,
В. А. РОМАНЬКОВ, Л. А. СКОРНЯКОВ,
И. П. ШЕСТАКОВ

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

Под общей редакцией Л. А. СКОРНЯКОВА

Том 1

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.144
О28
УДК 512.05 (083)

Серия «Справочная математическая библиотека» издается с 1974 года

Общая алгебра. Т. 1/ О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков и др. Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с. — (Справ. мат. б-ка). — ISBN 5-02-014426-6 (т. 1).

Первый том содержит разделы: отношения, отображения, частично упорядоченные множества, группы, кольца, модули, линейные алгебры. Кроме основных определений, авторы стремились ограничиться изложением результатов, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой области алгебры. Доказательства не приводятся.

Для математиков, не являющихся специалистами в соответствующих разделах алгебры, а также для потребителей алгебры как математиков, так и других специалистов.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр.: 421 назв.

Рецензент
академик АН МССР *В. А. Андрунакиевич*

$\text{О}\,\dfrac{1602040000-108}{053\,(02)\text{-}90}\,44\text{-}90$

ISBN 5-02-014426-6 (т. 1)

ISBN 5-02-014335-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ТОМА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В настоящее время алгебраический язык проник, пожалуй, во все разделы математики и во многие из ее приложений. В свою очередь, алгебра обогатилась многими новыми идеями и результатами как в классических ее областях (группы, кольца), так и в направлениях, развившихся за последнее пятидесятилетие (полугруппы, решетки, универсальные алгебры, категории). Конечно, по всем этим разделам алгебры написаны многочисленные монографии и обзорные статьи. Однако теперь уже, пожалуй, невозможно написать монографию, отражающую все основные идеи и направления, скажем, теории групп. Отбор материала, осуществляемый автором каждой из таких монографий, неизбежно субъективен. Поэтому в поисках нужных результатов приходится перебирать, в значительной степени наугад, большое число различных источников. Настоящий справочник имеет своей целью облегчить эту работу. В нем, наряду с основными определениями, представлены многочисленные результаты, включенные в те или иные монографии и обзоры, а также приведен обширный список монографической и обзорной литературы по соответствующим разделам общей алгебры. В ряде случаев упоминаются и отдельные результаты, отраженные только в журнальных публикациях, и тогда необходимые ссылки приводятся непосредственно в тексте. Подчеркнем, что при написании справочника не ставилось цели отразить современное состояние этих теорий. Поскольку справочник адресован главным образом не специалистам, приоритет отдается результатам, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой области алгебры. Никаких доказательств не приводится. Авторы приводимых результатов, как правило, не указываются. Исключе-

ние составляют теоремы с установившимися названиями. В тех случаях, когда соответствующий материал может быть найден практически в любом учебнике по алгебре, не дается даже точных ссылок. Авторы старались не злоупотреблять перекрестными ссылками. В частности, при изложении теории групп и теории колец многие факты, которые можно извлечь из теории универсальных алгебр, приводятся для рассматриваемых специальных случаев. Так что при желании читатель может не обращаться к главам VI или VII.

От читателя требуется знакомство с линейной алгеброй, включая матричное исчисление. При рассмотрении вопросов, лежащих на границе алгебры с логикой и топологией, логические и топологические понятия, как правило, не определяются.

За пределами настоящего справочника остались коммутативная алгебра (в частности, теория полей), конечные группы, линейные группы, представления групп и некоторые другие разделы: границы общей алгебры достаточно неопределенны. Сравнительно мало внимания уделено алгебрам Ли. Надеемся, что эти разделы алгебры будут отражены в других выпусках справочника по математике.

Редактор глубоко благодарен Т. А. Гуровой, С. Ю. Максимову, А. П. Мишиной и А. А. Пономареву за помощь при подготовке рукописи к печати.

Л. А. Скорняков

* * *

Глава I написана Л. А. Скорняковым, глава II — О. В. Мельниковым (пп. 3.1—3.3), В. Н. Ремесленниковым (§ 2 и пп. 3.4, 4.2, 4.4) и В. А. Романьковым (§ 1 и пп. 4.1, 4.3, 4.5), глава III—Л. А. Скорняковым (кроме § 3) и И. П. Шестаковым (§ 3).

Лев Анатольевич Скорняков (1924—1989) внес значительный вклад в развитие алгебры — не только своими трудами, среди которых несколько монографий и учебных пособий, но и подготовкой исследователей, работающих в различных областях алгебры, многоплановой редакторской деятельностью и другими видами научной активности. Настоящий справочник был последней инициативой Л. А. Скорнякова, и работе над ним наш соавтор и титульный редактор отдавал, мужественно борясь с неизлечимым недугом, весь свой темперамент неутомимого пропагандиста алгебраических знаний.

Мы посвящаем наш труд светлой памяти Льва Анатольевича.

В. А. Артамонов, О. В. Мельников,
В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков,
В. Н. Салий, Л. Н. Шеврин,
И. П. Шестаков, Е. Г. Шульгейфер

ГЛАВА I

ОТНОШЕНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. Множества, отношения и отображения

1.1. Алгебра подмножеств. Понятия «множество» и «элемент принадлежит множеству» примем в качестве неопределимых, становясь тем самым на наивную точку зрения в этом вопросе. Символ $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A, а $x \notin A$ — отрицание этого утверждения. Множество A называется *подмножеством* множества B (в обозначениях $A \subseteq B$), если каждый элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит множеству B. Другими словами, это означает справедливость утверждения: если $x \in A$, то $x \in B$. Множества A и B называются *равными* (в обозначениях $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Запись $A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$, но $A \neq B$. Впрочем, нередко символ $\subset$ используется вместо $\subseteq$. Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном* и обозначается через $\mathfrak{P}(A)$ или 2^A.

Если $\mathscr{E}$ — некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать элементы множества A, то через

$$\{x \mid x \in A,\ x \text{ обладает свойством } \mathscr{E}\}$$

обозначается подмножество множества A, состоящее из всех его элементов, обладающих свойством $\mathscr{E}$. Например, если A — множество целых чисел, то

$$\{x \mid x \in A \text{ последняя цифра в десятичной записи числа } x \text{ есть } 0 \text{ или } 5\}$$

— это множество всех целых чисел, делящихся на 5. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все элементы множества A, то часто пишут

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

В частности, запись $A = \{x\}$ означает, что A состоит из единственного элемента x. Во многих случаях вместо $\{x\}$ пишется просто x. Множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается через $\varnothing$ и называется *пустым*. В соответствии с общим определением $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A. Ясно, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ влечет за собой $A \subseteq C$.

Если A и B — какие-либо множества, то их *пересечение* $A \cap B$ и *объединение* $A \cup B$ определяются равенствами

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

и

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Объединение $A \cup B$ называется *дизъюнктным* (иначе, *свободным*), если $A \cap B = \varnothing$. Для множеств A и B эквивалентны следующие утверждения: (1) $A \subseteq B$; (2) $A \cap B = A$; (3) $A \cup B = B$. Подмножество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

называется *дополнением множества B в A* (рис. I.1). Для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

$$A \cap A = A, \qquad A \cup A = A,$$

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap (A \cup B) = A, \qquad A \cup (A \cap B) = A,$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B),$$

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

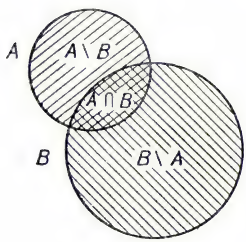
Множество

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

называется *симметрической разностью* множеств A и B (рис. I.2). Для симметрической разности справедливы следующие соотношения:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$
$$A + \varnothing = A, \quad A + A = \varnothing,$$
$$A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C.$$

Пересечение и объединение может быть определено для любого набора множеств. Именно, если



Ркс. I.1

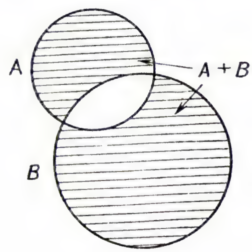


Рис. I.2

$\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество подмножеств A_ι некоторого множества, где индексы ι пробегают множество $\mathfrak{J}$ (не исключено, что $A_\iota = A_\varkappa$, где ι и $\varkappa$ — различные элементы множества $\mathfrak{J}$), то пересечение $\bigcap\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ и объединение $\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ определяются равенствами

$$\bigcap\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\} = \{x \mid x \in A_\iota \text{ для всех } \iota \in \mathfrak{J}\}$$

и

$$\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\} = \{x \mid x \in A_\iota \text{ хотя бы для одного } \iota \in \mathfrak{J}\}$$

соответственно. Вместо $\bigcap\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ и $\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ часто пишут $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota$ и $\bigcup\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota$, а иногда даже просто $\bigcap A_\iota$ и $\bigcup A_\iota$. Если $\mathfrak{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$, то обычно используется запись $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Объединение $\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ называется *дизъюнктным* (или *свободным*), если $A_\iota \cap A_\varkappa = \varnothing$

при $\iota \neq \varkappa$. Если $\mathfrak{J} = \bigcup \{\mathfrak{J}_\varkappa \mid \varkappa \in \mathfrak{K}\}$ — дизъюнктное объединение, то

$$\bigcap_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} A_\iota \Big) = \bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota$$

и

$$\bigcup_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} A_\iota \Big) = \bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota.$$

Эти соотношения можно рассматривать как обобщение ассоциативности. Обобщением дистрибутивности служат равенства

$$A \cap (\bigcup \{B_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}) = \bigcup \{A \cap B_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\},$$
$$A \cup (\bigcap \{B_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}) = \bigcap \{A \cup B_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{m} \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_{ij} \Big) = \bigcup_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_{ij} \Big).$$

Подчеркнем, что последнее соотношение простого обобщения на бесконечный случай не допускает (см. § 5 гл. V).

Если рассматриваются лишь подмножества фиксированного множества M и $A \subseteq M$, то подмножество $M \setminus A$ называется просто *дополнением подмножества* A и обозначается через $\bar{A}$. При этом справедливы равенства

$$\bar{M} = \varnothing, \qquad \bar{\varnothing} = M,$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\bar{\bar{A}} = A,$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\bigcap \{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}} &= \bigcup \{\bar{A}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}, \\ \overline{\bigcup \{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}} &= \bigcap \{\bar{A}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\} \end{aligned}\right\} \quad (\textit{законы де Моргана}).$$

Множество $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ непустых подмножеств множества A называется *покрытием* множества A, если $A = \bigcup \{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$. Покрытие называется *разбиением*, если $A_\iota \cap A_\varkappa = \varnothing$ при $\iota \neq \varkappa$. Таким образом, A является дизъюнктным объединением своего разбиения. Другими словами, множество $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ непустых подмножеств множества A является его разбиением, если каждый элемент $a \in A$ принадлежит в точности одному из подмножеств A_ι.

Если A и B — произвольные множества, то назовем *парой* символ (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Пары (a, b) и (a', b') считаются *равными*, если $a = a'$ и $b = b'$. Множество всех пар $\{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ называется *прямым* (или *декартовым*) *произведением* множеств A и B и обозначается через $A \times B$. Подчеркнем, что как понятие пары, так и вводимое ниже понятие последовательности в нашем изложении являются неопределимыми: определено лишь равенство пар и последовательностей. Если стоять на менее наивной точке зрения, то парой следовало бы называть множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, т. е. множество, элементами которого служат одноэлементное множество $\{a\}$ и двуэлементное множество $\{a, b\}$. Заметим еще, что отличие пары (a, b) от двуэлементного множества $\{a, b\}$ заключается в том, что $\{a, b\} = \{b, a\}$, а $(a, b) = (b, a)$ лишь при $a = b$.

Если $A_1, \ldots, A_n$ — любой конечный набор множеств, то назовем *последовательностью*, или *строкой*, или *кортежем* длины n символ $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$. Последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(a'_1, \ldots, a'_n)$ считаются равными, если $a_i = a'_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Множество всех таких последовательностей называется *прямым произведением* множеств $A_1, \ldots, A_n$ и обозначается через $A_1 \times \ldots \times A_n$ или $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Отметим, что, имея определение прямого произведения двух множеств, можно вполне строго определить прямое произведение любого (не обязательно конечного) набора множеств. Этот вопрос обсуждается в п. 1.2.

1.2. Соответствия и отображения. Подмножество ρ множества $A \times B$ называется *соответствием* (или *бинарным отношением*) между множествами A и B. Если $(a, b) \in \rho$, то говорят, что элемент *a находится в отношении* ρ с элементом b. Вместо $(a, b) \in \rho$ часто пишут $a\rho b$, а иногда — $\rho(a, b)$. Соответствия $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq C \times D$ называются *равными*, если $A = C$, $B = D$ и $\rho = \sigma$ как подмножества множества $A \times B$. Если A и B — конечные множества, скажем, $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, то каждому соответствию ρ между множествами A и B можно сопоставить матрицу размера $m \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если $(i, j) \in \rho$,

и 0 в противном случае. Если A и B изобразить как множества точек на плоскости и соединить i с j стрелкой в том и только том случае, когда $(i, j) \in \rho$, то возникает направленный граф. В рассматриваемом случае соответствие ρ однозначно восстанавливается как по своей матрице, так и по своему направленному графу. Конечно, и матрицу и граф можно рассматривать и в случае бесконечных множеств, но здесь выигрыш в наглядности намного меньше. Об умножении соответствий см. п. 1.4.

Если ρ — соответствие между множествами A и B, то обозначим через $\rho^{\#}$ (употребляются также обозначения ρ^{-1} и $\overset{-1}{\rho}$) соответствие между множествами B и A, определяемое условием

$$\rho^{\#} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Матрицей соответствия $\rho^{\#}$ служит матрица, полученная из матрицы соответствия ρ транспонированием, а граф соответствия $\rho^{\#}$ получается из графа соответствия ρ изменением направления стрелок на противоположное. Отметим еще, что $\rho \subseteq \sigma$ влечет за собой $\rho^{\#} \subseteq \sigma^{\#}$.

Областью определения (иногда *первой проекцией*) соответствия ρ называется множество

$$\operatorname{Dom} \rho = \{a \mid a \in A,\ (a, b) \in \rho \text{ для некоторого } b \in B\},$$

а *образом* или *областью значений* — множество

$$\operatorname{Im} \rho = \{b \mid b \in B,\ (a, b) \in \rho \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

Ясно, что $\operatorname{Dom} \rho = \operatorname{Im} \rho^{\#}$ и $\operatorname{Dom} \rho^{\#} = \operatorname{Im} \rho$. Если $\operatorname{Dom} \rho = A$, то говорят, что соответствие ρ *всюду определено*. Всюду определенное соответствие часто называют *многозначным отображением*. Если $a \in A$, то множество

$$\rho(a) = \{b \mid b \in B,\ (a, b) \in \rho\}$$

называется *образом элемента* a при соответствии ρ. Если $X \subseteq A$, то множество

$$\rho(X) = \bigcup \{\rho(x) \mid x \in X\}$$

называется *образом множества* X *при соответствии* ρ, или *сечением соответствия* ρ по множеству X. Сечение соответствия ρ по одноэлементному множеству

$\{x\}$ совпадает с образом элемента x. Если $b \in B$, то множество

$$\rho^{-1}(b) = \{a \mid a \in A,\ (a, b) \in \rho\}$$

называется *прообразом элемента b при соответствии* ρ. Этот прообраз совпадает с образом элемента b при соответствии $\rho^\#$ *Прообраз множества* $Y \subseteq B$ определяется равенством

$$\rho^{-1}(Y) = \bigcup \{\rho^{-1}(y) \mid y \in Y\}$$

и совпадает с образом множества Y при соответствии $\rho^\#$. Если $X \subseteq A$, то соответствие

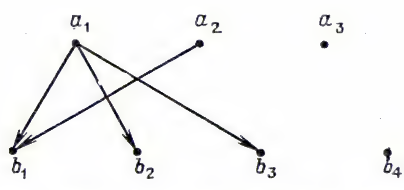
$$\rho|_X = \rho \cap (X \times B) = \{(x, b) \mid x \in X,\ (x, b) \in \rho\}$$

называется *ограничением* (или *сужением*) *соответствия* ρ *на подмножество* X.

Проиллюстрируем введенные понятия на следующем примере: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ и $\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$. Матрицей соответствия ρ служит

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а ее графом —



Далее, $\mathrm{Dom}\,\rho = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{Im}\,\rho = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\rho(a_1) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\rho(a_2) = \{b_1\}$, $\rho(a_3) = \varnothing$, прообразом элементов b_2 и b_3 служит одноэлементное множество $\{a_1\}$, прообразом элемента b_1 — множество $\{a_1, a_2\}$, а прообраз элемента b_4 пуст. Наконец, $\rho\big|_{\{(a_2,\ a\ )\}} = \{(a_2, b_1)\}$.

Соответствие называется *полным*, если оно совпадает с $A \times B$, т. е. состоит из всех пар (a, b). Все элементы матрицы, соответствующей полному соответствию, равны 1. Если ρ — полное соответствие, то соответствие $\rho^\#$ также полно.

Соответствие ρ называется *частичным отображением* множества A в множество B, если для каждого

$a \in \operatorname{Dom} \rho$ множество $\rho(a)$ оказывается одноэлементным. В соответствии с определением равенства соответствий частичные отображения ρ и σ из A в B равны тогда и только тогда, когда $\operatorname{Dom} \rho = \operatorname{Dom} \sigma$ и $\rho(x) = \sigma(x)$ для всех $x \in \operatorname{Dom} \rho$. Ясно, что, имея частичное отображение в смысле данного определения, мы каждому элементу из $\operatorname{Dom} \rho$ ставим в соответствие однозначно определенный элемент из B. Таким образом, предложенное определение по существу совпадает с наивным. Если исходить из наивного определения (правда, формально оно не может служить определением), то соответствующее соответствие называют *графиком частичного отображения*.

Отображением множества A в множество B (или *полным отображением*, или *функциональным соответствием*) называется такое частичное отображение ρ из A в B, что $\operatorname{Dom} \rho = A$. В этом случае каждому элементу из A ставится в соответствие однозначно определенный элемент из B. Заметим, что на частичное отображение ρ из A в B можно смотреть как на полное отображение из $\operatorname{Dom} \rho$ в B. Символ $\varphi\colon A \to B$ означает, что φ является отображением множества A в B. Подчеркнем еще, что согласно определению равенства соответствий отображения $\varphi\colon A \to B$ и $\psi\colon C \to D$ равны, если $A = B$, $C = D$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in A$. Если $a \in A$, то элемент $\varphi(a)$ называется *образом элемента* a. При этом говорят также, что отображение φ *ставит в соответствие элементу* a элемент $\varphi(a)$. *Прообразом элемента* b из B при отображении φ называется такой элемент $a \in A$, что $\varphi(a) = b$, а *полным прообразом* элемента b — множество всех его прообразов. Полный прообраз элемента может оказаться пустым. Образ $\varphi(X)$ подмножества $X \subseteq A$ определяется равенством

$$\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\},$$

а *полный прообраз* $\varphi^{-1}(Y)$ подмножества $Y \subseteq B$ — равенством

$$\varphi^{-1}(Y) = \{x \mid x \in A,\ \varphi(x) \in Y\}.$$

Множество $\varphi(A)$ называется *образом отображения* φ и обозначается через $\operatorname{Im} \varphi$.

Если $\varphi\colon A \to B$ — отображение и $X \subseteq Y \subseteq A$, то $\varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$. Для любого множества $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ под-

множеств множества A справедливы соотношения

$$\varphi\Bigl(\bigcup_{\iota\in\mathfrak{J}} A_\iota\Bigr)=\bigcup_{\iota\in\mathfrak{J}}\varphi(A_\iota),\quad \varphi^{-1}\Bigl(\bigcap_{\iota\in\mathfrak{J}} A_\iota\Bigr)=\bigcap_{\iota\in\mathfrak{J}}\varphi^{-1}(A_\iota)$$

и

$$\varphi\Bigl(\bigcap_{\iota\in\mathfrak{J}} A_\iota\Bigr)\subseteq\bigcap_{\iota\in\mathfrak{J}}\varphi(A_\iota)$$

([4], с. 373, 376).

Последнее включение может оказаться строгим, — например, если $A_1\cap A_2=\varnothing$, а $B=\{b\}$.

Если A' — подмножество множества A и $\varphi\colon A\to B$, то про отображение $\varphi'\colon A'\to B$, где $\varphi'(x)=\varphi(x)$ для всех $x\in A'$, говорят, что оно является *сужением* или *ограничением отображения* φ *на* A'. В этом случае часто пишут, что $\varphi'=\varphi|_{A'}$, а про отображение φ говорят, что оно является *продолжением* или *расширением* отображения φ'. Заметим, что нельзя сказать, что $\varphi=\varphi'$, поскольку у φ и φ' разные области определения.

Отображение $\varphi\colon A\to B$ называется *постоянным* или *константой*, если найдется такой элемент $b\in B$, что $\varphi(x)=b$ для всех $x\in A$.

Отображение $1_A\colon A\to A$, где $1_A(x)=x$ для всех $x\in A$, называется *тождественным* (вместо 1_A употребляют также обозначение id_A).

Отображение $\varphi\colon A\to B$ называется *вложением* или *инъективным отображением*, если для любых $a', a''\in A$ равенство $\varphi(a')=\varphi(a'')$ влечет за собой $a'=a''$. Другими словами, при вложении различные элементы множества A переходят в различные элементы множества B. Если A — подмножество множества B, то вложение $\varphi\colon A\to B$, где $\varphi(x)=x$ для всех $x\in A$, называется *каноническим* или *естественным*. Каноническое вложение подмножества A в B совпадает с ограничением отображения 1_B на подмножество A. Отображение $\varphi\colon A\to B$ называется *наложением* или *сюръективным отображением* (говорят также, что φ отображает A *на* B), если для всякого $b\in B$ найдется такой элемент $a\in A$, что $\varphi(a)=b$. Другими словами, при наложении каждый элемент из B имеет хотя бы один прообраз. Отображение, являющееся вложением и наложением одновременно, называется *взаимно однозначным* или *биективным*, а также *биекцией*. Про

взаимно однозначное отображение $\varphi: A \to B$ часто говорят, что оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B. Для отображения конечного множества в себя инъективность, сюръективность и биективность — равносильные условия. О связи этих понятий с понятиями мономорфизма и эпиморфизма см. п. VII. 1.4.

Если φ — отображение множества A в себя, то элемент $a \in A$ называется *инвариантным* или *неподвижным* относительно φ, если $\varphi(a) = a$. Подмножество $X \subseteq A$ называется *инвариантным относительно* φ, если $\varphi(X) \subseteq X$. Разумеется, подмножество X оказывается инвариантным, если инвариантны все его элементы, но не наоборот. Если $a \in A$, то множество элементов, получаемых из a многократным последовательным применением отображения φ, называется *орбитой*. Любая орбита оказывается инвариантным подмножеством.

Каждому отображению $\varphi: A \to B$ соответствует отображение $\mathfrak{P}(\varphi)$ булеана $\mathfrak{P}(A)$ в булеан $\mathfrak{P}(B)$, определяемое равенством $\mathfrak{P}(\varphi)(X) = \varphi(X)$ для всех $X \subseteq A$. Отображение $\mathfrak{P}(\varphi)$ оказывается вложением, наложением или биекцией тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает отображение φ. Вместо $\mathfrak{P}(\varphi)$ обычно пишут просто φ.

Существует взаимно однозначное соответствие Γ между подмножествами множества A и отображениями множества A в двуэлементное множество $\{0, 1\}$, определяемое условием:

$$\Gamma(X)(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in X, \\ 0, & \text{если } a \notin X, \end{cases}$$

для любого $X \subseteq A$.

На элемент (a, b) прямого произведения $A \times B$ можно смотреть как на отображение двуэлементного множества $\{1, 2\}$ в дизъюнктное объединение $A \sqcup B$, определяемое равенствами $(a, b)(1) = a$ и $(a, b)(2) = b$. Это наблюдение позволяет определить *прямое произведение* $A_1 \times \ldots \times A_n$ как множество всех отображений a множества $\{1, \ldots, n\}$ в дизъюнктное объединение $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, где $a(i) \in A_i$. При этом даже экземпляры одного и того же множества, выступающего в качестве различных A_i, считаются непере-

секающимися множествами. О возможной формализации этого предположения см. [4], п. II. 4.8. С другой стороны, каждое отображение a множества $\{1, \ldots, n\}$ в дизъюнктное объединение $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, где $a(i) \in A_i$, можно рассматривать как строку $(a(1), \ldots, a(n))$ или $(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, предложенное определение согласуется с наивным определением из п. 1.1. При этом новое определение дословно переносится на случай, когда число сомножителей не предполагается конечным: *прямым произведением* непустого семейства непустых множеств $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ называется множество всех отображений a множества $\mathfrak{J}$ в дизъюнктное объединение $\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$, ставящих в соответствие каждому индексу $\iota \in \mathfrak{J}$ элемент $a_\iota \in A_\iota$. Существование таких отображений вытекает из аксиомы выбора (п. 2.1), примененной к множеству $\bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$. Отображение a часто изображают в виде строки $(\ldots, a_\iota, \ldots)$, ι-й координатой которой служит элемент $a_\iota \in A_\iota$. Отображение π_ι, ставящее в соответствие каждой строке a ее ι-ю координату a_ι, оказывается наложением и называется ι-й *проекцией*. Для любых отображений $\varphi_\iota \colon B \to A_\iota$, где B — некоторое множество, существует одно и только одно отображение $\varphi \colon B \to \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota$ такое, что $\pi_\iota(\varphi(b)) = \varphi_\iota(b)$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ и $b \in B$ (ср. п. VII. 1.7). Если $\mathfrak{J} = \prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \mathfrak{J}_\varkappa$, то справедливо равенство

$$\prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} A_{\varkappa\iota} \Big) = \bigcup_{f \in \mathfrak{J}} \Big(\prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} A_{\varkappa f(\varkappa)} \Big),$$

а если $\mathfrak{K} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{J}_\varkappa \neq \varnothing$ для всех $\varkappa \in \mathfrak{K}$, то — и равенство

$$\prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} A_{\varkappa\iota} \Big) = \bigcap_{f \in \mathfrak{J}} \Big(\prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} A_{\varkappa f(\varkappa)} \Big).$$

В частности, если $\mathfrak{K} \neq \varnothing$, то

$$\bigcap_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\prod_{\iota \in \mathfrak{J}} A_{\iota\varkappa} \Big) = \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \Big(\bigcap_{\varkappa \in \mathfrak{K}} A_{\iota\varkappa} \Big)$$

([4], с. 120, 122).

Пусть M — непустое множество. Соответствие $\rho \subseteq M \times \mathfrak{P}(M)$ называется *отношением зависимости*, если выполнены следующие условия: 1) если $x \in A \subseteq M$, то $(x, A) \in \rho$; 2) если $x \in M$, $a \in A \subseteq M$,

$(x, A) \in \rho$ и $(x, A \setminus \{a\}) \notin \rho$, то $(a, (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}) \in \rho$; 3) если $x \in M$, A, $B \subseteq M$, $(x, A) \in \rho$ и $(a, B) \in \rho$ для всех $a \in A$, то $(x, B) \in \rho$; 4) если $x \in M$, $A \subseteq M$ и $(x, A) \in \rho$, то $(x, A') \in \rho$ для некоторого конечного подмножества $A' \subseteq A$. Если $(x, A) \in \rho$, то говорят, что *x зависит от A*. Если каждый элемент множества A зависит от B, то скажем, что *A зависит от B*, и будем писать $\rho(A, B)$. Если $\rho(A, B)$ и $\rho(B, A)$, то множества A и B называются *эквивалентными*. Если A эквивалентно B, а B эквивалентно C, то A эквивалентно C. Если $\rho(A, B)$ и $\rho(B, C)$, то $\rho(A, C)$. Если $\rho(A, B)$ и $B \subseteq C$, то $\rho(A, C)$. Множество $A \subseteq M$ называется *независимым*, если $(a, A \setminus \{a\}) \notin \rho$ для всех $a \in A$. Независимое множество A называется *максимальным*, если для любого $x \in M \setminus A$ множество $A \cup \{x\}$ не является независимым. Если A — максимальное независимое множество, то $(x, A) \in \rho$ для любого $x \in M$. Эквивалентные независимые множества имеют одну и ту же мощность. Одну и ту же мощность имеют и любые два максимальных независимых множества.

Теорема о замене: если A и B — эквивалентные независимые множества и $C \subseteq A$, то найдется такое подмножество $B' \subseteq B$, что $B' \cup (A \setminus C)$ независимо и эквивалентно A.

Система Ω непустых подмножеств множества M совпадает с системой независимых подмножеств некоторого отношения зависимости в том и только том случае, когда $A \subseteq B \in \Omega$ влечет $A \in \Omega$, а $A \subseteq B$, $A \in \Omega$ и $B \notin \Omega$ влечет $A \cup \{b\} \notin \Omega$ для некоторого $b \in B$. При этом для данной системы Ω, удовлетворяющей этим условиям, соответствующее отношение зависимости ρ определяется условием: $(a, A) \in \rho$, если найдется такое конечное подмножество $A' \subseteq A$, что $A' \in \Omega$, а $A' \cup \{a\} \notin \Omega$ (см. [21], § 3; [22], § 7; [17]).

Примеры. 1) M — произвольное непустое множество, $\rho = \{(x, A) \mid x \in A \subseteq M\}$; 2) M — линейное пространство над полем P, $\rho = \{(x, A) \mid x = \sum_{a \in A'} \lambda_a a$, где A' — конечное подмножество множества $A\}$; 3) M — расширение поля P, $\rho = \{(x, A) \mid x$ является корнем многочлена с коэффициентами из поля, порожденного конечным подмножеством множества $A\}$ (см. [5], § 74).

1.3. Отношения, эквивалентности, фактормножества. *Отношением* (точнее, *бинарным отношением*) на множестве A называется подмножество множества

$A \times A$. Другими словами, отношение — это соответствие множества A с самим собой. Отношение

$$\{(a, a) \mid a \in A\}$$

называется *диагональю* или *тождественным отношением* и обозначается через Δ_A (употребляются также обозначения E_A и 0_A). На диагональ можно смотреть и как на тождественное отображение 1_A множества A на себя. Легко видеть, что диагонали соответствует единичная матрица. Множество $A \times A$ также является отношением. Оно называется *полным отношением* и часто обозначается через ∇_A.

Отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in \rho$ для всех $x \in A$. Другими словами, отношение ρ рефлексивно, если $\Delta_A \subseteq \rho$. Отношение ρ называется *симметричным*, если $(x, y) \in \rho$ влечет за собой $(y, x) \in \rho$, *антисимметричным* — если $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$ влечет за собой $x = y$, и *транзитивным*, если $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho$ влечет за собой $(x, z) \in \rho$. Симметричность отношения ρ означает справедливость соотношения $\rho^\# \subseteq \rho$, равносильного $\rho = \rho^\#$, антисимметричность равносильна включению $\rho \cap \rho^\# \subseteq \Delta_A$. Если $\{\rho_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество рефлексивных [симметричных, антисимметричных, транзитивных] отношений на множестве A, то $\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} \rho_i$ также является рефлексивным [симметричным, антисимметричным, транзитивным] отношением на A. В случае рефлексивных или симметричных отношений то же самое верно и для $\bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} \rho_\iota$. Однако для антисимметричных или транзитивных отношений это, вообще говоря, не так. Пересечение всех транзитивных отношений, содержащих данное отношение ρ, оказывается транзитивным отношением, которое называется *транзитивным замыканием* отношения ρ. Если $\bar{\rho}$ — это транзитивное замыкание, то $(a, b) \in \bar{\rho}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$, что $a = x_0$, $x_n = b$ и $(x_i, x_{i+1}) \in \rho$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Отношение ρ на множестве A называется *эквивалентностью* (или *отношением эквивалентности*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Как

диагональ, так и полное отношение на множестве A являются эквивалентностями. В качестве нетривиального примера эквивалентности укажем отношение параллельности на множестве прямых обычного пространства (нужно только считать, что каждая прямая параллельна самой себе). Если ρ — эквивалентность на множестве A и $a \in A$, то подмножество

$$\rho(a) = \{x \mid x \in A, \ (a, x) \in \rho\}$$

называется *классом эквивалентности* ρ (иногда *смежным классом*). Все классы диагонали одноэлементны, полное отношение обладает единственным классом (он совпадает со всем множеством), классами отношения параллельности служат множества параллельных между собой прямых. Множество различных классов эквивалентности является разбиением множества A. Наоборот, если дано разбиение множества A, то отношение, состоящее из всех таких пар $(x, y) \in A \times A$, что x и y принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения, оказывается эквивалентностью.

Если ρ — эквивалентность на множестве A, то подмножество $B \subseteq A$ называется ρ-*насыщенным*, если для любого $x \in A$ из $b \in B$ и $(x, b) \in \rho$ вытекает, что $x \in B$. Для ρ-насыщенности подмножества необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с объединением некоторого множества классов эквивалентности ρ. Если B — произвольное непустое подмножество в A, то множество

$$\tilde{B} = \bigcup \{\rho(b) \mid b \in B\}$$

оказывается ρ-насыщенным. Оно содержится во всех ρ-насыщенных подмножествах, содержащих B, и называется ρ-*насыщением* подмножества B.

Пересечение любого множества эквивалентностей на множестве A является эквивалентностью. Пересечение всех эквивалентностей, содержащих данное отношение ρ, называется *эквивалентным замыканием* этого отношения. Если $\{\rho_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ — некоторое множество эквивалентностей на множестве A, то наименьшая эквивалентность, содержащая все ρ_ι, совпадает с транзитивным замыканием объединения $\bigcup\{\rho_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$. Если ρ' и ρ'' — эквивалентности на множестве A, то

объединение $\rho' \cup \rho''$ оказывается эквивалентностью в том и только том случае, когда пересечение любого класса эквивалентности ρ' с любым классом эквивалентности ρ'' или пусто или совпадает с одним из этих классов. О множестве эквивалентностей как частично упорядоченном множестве см. п. 2.6.

Множество классов эквивалентности ρ на множестве A или, что то же самое, множество подмножеств, образующих соответствующее разбиение, называется *фактормножеством множества A по эквивалентности* ρ и обозначается через A/ρ.

Примеры. 1) A — множество зерен, насыпанных в мешки. Для зерен a и b положим $(a, b) \in \rho$, если они лежат в одном мешке. Тогда классом эквивалентности служит множество зерен, лежащих в одном мешке, а фактормножеством A/ρ — множество мешков. 2) A — множество всех целых чисел, A_0 и A_1 состоят из всех четных и нечетных чисел соответственно. Тогда $\{A_0, A_1\}$ оказывается разбиением множества A, и если ρ — соответствующая эквивалентность, то A/ρ — множество, состоящее из двух элементов A_0 и A_1.

Если ρ — эквивалентность на множестве A, то отображение π множества A на фактормножество A/ρ, при котором каждому элементу a из A ставится в соответствие класс эквивалентности, в котором этот элемент лежит, называется *естественным* или *каноническим*. Ясно, что естественное отображение является наложением.

В рассмотренных выше примерах имеем: 1) $\pi(x)$ — мешок, в котором лежит зерно x; 2) $\pi(x) = A_0$, если x четно, и $\pi(x) = A_1$, если x нечетно.

Ядром отображения φ: $A \to B$ называется отношение

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{(x', x'') \mid x', x'' \in A, \ \varphi(x') = \varphi(x'')\}.$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{Ker} \varphi$ — эквивалентность. Следовательно, можно рассматривать фактормножество $A/\operatorname{Ker} \varphi$. Имеют место *теорема о гомоморфизме для множеств*: если φ: $A \to B$ — наложение и π: $A \to A/\operatorname{ker} \varphi$ — естественное отображение, то существует взаимно однозначное отображение χ: $B \to A/\operatorname{Ker} \varphi$ такое, что $\pi(a) = \chi(\varphi(a))$ для всех $a \in A$, и *теорема о факторизации*: если φ: $A \to B$, ψ: $A \to C$ и $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \psi$, то условие $\chi(\varphi(x)) = \psi(x)$ для всех $x \in A$ определяет отображение χ: $\operatorname{Im} \varphi \to C$. В частности,

если φ — наложение, то существует такое отображение χ: $B \to C$, что $\psi(x) = \chi(\varphi(x))$ для всех $x \in A$. Эти теоремы можно проиллюстрировать диаграммами

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & A/\operatorname{Ker}\varphi & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

соответственно. Формулировки этих результатов, использующие произведения отображений, приведены в п. 1.4. Если, далее, ρ и θ — эквивалентности на множестве A и $\rho \subseteq \theta$, то на фактормножестве A/ρ можно определить отношение

$$\theta/\rho = \{(\rho(x), \rho(y)) \mid x, y \in A, (x, y) \in \theta\},$$

которое оказывается эквивалентностью. Отображение Γ, где $\Gamma(\theta) = \theta/\rho$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между эквивалентностями на A, содержащими ρ, и эквивалентностями на A/ρ. При этом $\rho \subseteq \theta' \subseteq \theta''$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(\theta') \subseteq \Gamma(\theta'')$.

Рефлексивное и симметричное отношение называется *толерантностью*. Если τ — толерантность на множестве A и $a \in A$, то подмножество $\{x \mid (a, x) \in \tau\}$ называется *классом толерантности*. Классы толерантности образуют покрытие множества A. Если дано покрытие $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ множества A, то отношение

$$\tau = \{(x, y) \mid x, y \in A_\iota \text{ для некоторого } \iota \in \mathfrak{I}\}$$

оказывается толерантностью. Однако классы этой толерантности не обязаны совпадать с множеством $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$. Например, если толерантность τ определяется покрытием $\{A_1, A_2, A_3\}$, где $A_3 \subseteq A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ (рис. I.3), то к числу классов толерантности принадлежит объединение $A_1 \cup A_2$, а A_3 классом толерантности не является. Класс K толерантности τ называется *максимальным*, если $K \subseteq L$, где L — некоторый класс толерантности τ, влечет за собой $K = L$. Покрытие $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ множества A совпадает с множеством всех максимальных классов некоторой толерантности тогда и только тогда, когда для любых

$\iota \in \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}' \subseteq \mathfrak{I}$ включение $A_\iota \subseteq \bigcup_{\varkappa \in \mathfrak{I}'} A_\varkappa$ влечет за собой $\bigcap_{\varkappa \in \mathfrak{I}'} A_\varkappa \subseteq A_\iota$ ([15], с. 109, теорема 3.9).

Определение бинарного (или двуместного) отношения естественно обобщается на n-местный случай;

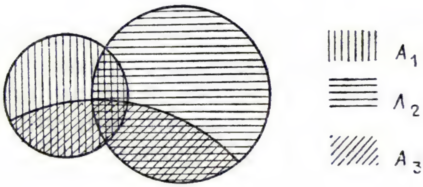


Рис. I.3

если A — некоторое множество, то подмножество P прямого произведения $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$ называется *n-арным* (или *n-местным*) *отношением* или *предикатом* на множестве A. Если для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c \in A$ из $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in P$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, c) \in P$ вытекает, что $b = c$, то отношение P называется *функциональным*. Если при этом для любых $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ имеем $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a) \in P$ для некоторого $a \in A$, то P очевидным образом определяет отображение множества A^{n-1} в A. Унарное (одноместное) отношение часто называют *свойством*. Некоторые общие свойства n-арных отношений можно найти в [20], гл. 9—12.

1.4. Умножение соответствий и отображений. Если ρ — соответствие между множествами A и B, а σ — соответствие между множествами B и C, то их *произведением* называется соответствие между множествами A и C, определяемое как

$$\rho\sigma = \{(a, c) \mid (a, x) \in \rho \text{ и } (x, c) \in \sigma \text{ для некоторого } x \in B\}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда A — множество женщин, B — множество мужчин, C — множество автобусов, $(a, b) \in \rho$ означает, что женщина a является женой мужчины b, а $(b, c) \in \sigma$ — что мужчина b сидит в автобусе c. Тогда $(a, c) \in \rho\sigma$ означает, что женщина a имеет мужа, который сидит в автобусе c.

Матрица произведения двух соответствий равна произведению матриц сомножителей, если сложение и умножение осуществлять по следующим правилам: $1+1=1+0=0+1=1$, $0+0=0$, $0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0$ и $1\cdot 1=1$. Умножение соответствий ассоциативно, т. е. $(\rho\sigma)\tau=\rho(\sigma\tau)$, причем из существования левой части этого равенства вытекает существование правой и наоборот. Отсюда следует, что произведение нескольких соответствий не зависит от расстановки скобок, что дает возможность использовать запись $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ (подчеркнем, что определено лишь произведение двух соответствий!). Если $\rho\subseteq A\times B$, то $\Delta_A\rho=\rho=\rho\Delta_B$ или, что то же самое, $1_A\rho=\rho=\rho 1_B$. Справедливо также равенство $(\rho\sigma)^\#=\sigma^\#\rho^\#$, причем опять существование одной из частей этого равенства влечет существование другой. Соответствие всюду определено тогда и только тогда, когда $\Delta_A\subseteq\rho\rho^\#$, и оказывается отображением в том и только том случае, когда, кроме того, справедливо соотношение $\rho^\#\rho\subseteq\Delta_B$. Для всякого соответствия ρ справедливо включение $\rho\subseteq\rho\rho^\#\rho$ и существуют такие отображения φ и ψ, что $\rho=\varphi^\#\psi$. Соответствие $\rho\subseteq A\times B$ называется *дифункциональным* или *квазиоднозначным*, если $\rho\rho^\#\rho\subseteq\rho$, что эквивалентно равенству $\rho\rho^\#\rho=\rho$. Равносильны следующие свойства соответствия ρ: (1) ρ дифункционально; (2) если $a', a''\in A$ и $\rho(a')\cap\rho(a'')\neq\varnothing$, то $\rho(a')=\rho(a'')$; (3) если $b', b''\in B$ и $\rho^\#(b')\cap\rho^\#(b'')\neq\varnothing$, то $\rho^\#(b')=\rho^\#(b'')$ ([10], с. 34, теорема 1).

Если φ и ψ — частичные отображения из A в B и из B в C соответственно, то, согласно общему определению,

$$\mathrm{Dom}\,\varphi\psi=\{x\mid x\in\mathrm{Dom}\,\varphi \text{ и } \varphi(x)\in\mathrm{Dom}\,\psi\}$$

и $\varphi\psi(x)=\psi(\varphi(x))$ для любого $x\in\mathrm{Dom}\,\varphi\psi$. Последнее равенство выглядит более естественным, если писать $x\varphi$ вместо $\varphi(x)$: именно, мы имеем $x(\varphi\psi)=(x\varphi)\psi$. Желание сохранить запись образа элемента x при отображении φ в виде $\varphi(x)$ привело к тому, что многие авторы используют произведение (мы будем обозначать его как $\varphi\circ\psi$), определяемое равенством $\varphi\circ\psi(x)=\varphi(\psi(x))$. Ясно, что произведение двух частичных отображений является частичным отображе-

нием. То же самое верно для многозначных отображений и рефлексивных отношений. Транзитивность отношения ρ равносильна включению $\rho\rho \subseteq \rho$. Произведение эквивалентностей $\theta'\theta''$ оказывается эквивалентностью тогда и только тогда, когда θ' и θ'' *перестановочны*, т. е. $\theta'\theta'' = \theta''\theta'$.

Произведение двух отображений также оказывается отображением. Произведение двух вложений, наложений или взаимно однозначных отображений является вложением, наложением и взаимно однозначным отображением соответственно. Если $\varphi\psi$ (или $\psi \circ \varphi$) — вложение, то φ оказывается вложением. Если $\varphi\psi$ (или $\psi \circ \varphi$) — наложение, то наложением оказывается ψ. Всякое отображение $\varphi\colon A \to B$ можно представить в виде $\varphi = \pi\varepsilon$, где π — наложение A на $\operatorname{Im}\varphi$, а ε — естественное вложение $\operatorname{Im}\varphi$ в B. Отображение φ является вложением тогда и только тогда, когда $\varphi\varphi^{\#} = 1_A$, а наложением — в том и только том случае, когда $\varphi^{\#}\varphi = 1_B$. Отображение $\psi\colon B \to A$ называется *обратным отображению* φ, если $\varphi\psi = 1_A$ и $\psi\varphi = 1_B$. Обратное отображение существует в том и только том случае, когда φ взаимно однозначно. При этом само обратное отображение оказывается взаимно однозначным. Для каждого взаимно однозначного отображения φ существует только одно обратное отображение, что позволяет обозначить его через φ^{-1}. Ясно, что $\varphi^{-1} = \varphi^{\#}$.

Если φ — отображение конечного множества A в себя и, скажем, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, то φ задается двустрочной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

Отображение φ оказывается взаимно однозначным тогда и только тогда, когда в нижней строке нет одинаковых чисел. Если

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

то

$$\varphi\psi = \psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{но} \quad \psi\varphi = \varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что умножение отображений (а тем более соответствий) не коммутативно.

Если $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon A \to C$, $\chi\colon B \to C$, $\rho\colon B \to D$ и $\sigma\colon C \to D$, то можно рассмотреть диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & C & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "\rho"] \\ C \arrow[r, "\sigma"'] & D \end{tikzcd}$$

Говорят, что эти диаграммы *коммутативны*, если $\psi = \varphi\chi$ и $\varphi\rho = \psi\sigma$ соответственно. Коммутативность отображений φ и ψ множества A в себя означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

Коммутативность определяется и для более сложных диаграмм. Грубо говоря, она означает, что результат последовательного перемножения отображений по пути, ведущему из одной вершины в другую, не зависит от выбора этого пути. Язык диаграмм часто позволяет выразить более наглядно те или иные высказывания, касающиеся произведений отображений. В частности, теорема о гомоморфизме для множеств может быть сформулирована так: если $\varphi\colon A \to B$ — наложение, а $\pi\colon A \to A/\operatorname{Ker}\varphi$ — естественное отображение, то для подходящего взаимно однозначного оторажения χ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & A/\operatorname{Ker}\varphi & \end{tikzcd}$$

Теорема о факторизации допускает такую формулировку: если $\varphi\colon A \to B$ — наложение, $\psi\colon A \to C$ — про-

извольное отображение и $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Приведем еще один полезный результат: если θ' и θ'' — эквивалентности на множестве A и $\theta' \subseteq \theta''$, а π': $A \to A/\theta'$, π'': $A \to A/\theta''$ и π: $A/\theta' \to (A/\theta')/(\theta''/\theta')$ — естественные отображения, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi''"'] & A/\theta' \arrow[d, "\pi"] \\ A/\theta'' \arrow[r, "\chi"'] & (A/\theta')/(\theta''/\theta') \end{tikzcd}$$

где χ — взаимно однозначное отображение, определяемое равенством $\chi(\theta''(a)) = \pi(\theta'(a))$ для всех $a \in A$.

1.5. Учение о мощности. Краеугольным камнем здесь служит *теорема Кантора—Бернштейна*: если существуют взаимно однозначные отображения множества A на подмножество множества B и множества B на подмножество множества A, то существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B. Множества, эквивалентные множеству всех натуральных чисел, называются *счетными*.

Теорема Кантора—Бернштейна позволяет установить *теорему о сравнении множеств*: для любых двух множеств A и B существует одна и только одна из следующих возможностей:

1) A эквивалентно B;

2) A эквивалентно подмножеству множества B, но B не эквивалентно никакому подмножеству множества A;

3) B эквивалентно подмножеству множества A, но A не эквивалентно никакому подмножеству множества B.

В первом случае говорят, что *мощности множеств A и B равны* (или что эти множества *равномощны*) и пишут $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$, во втором — что *мощность множества A меньше мощности множества B* (в записи $\operatorname{Card} A < \operatorname{Card} B$), а в третьем — что *мощность множества B меньше мощности множества A*. Легко проверить, что для конечных множеств сравнение по мощности равносильно сравнению по числу элементов. Отметим другой вариант теоремы о сравнении множеств: для двух множеств существует одна и только одна из следующих возможностей: 1) A эквивалентно B; 2) A отображается на B, но B не отображается на A; 3) B отображается на A, но A не отображается на B.

Подчеркнем, что изложенное выше не определяет само понятие мощности, а только обеспечивает возможность сравнивать множества по их мощности.

Чрезвычайно важны следующие два факта: 1) мощность любого множества меньше мощности множества всех его подмножеств (т. е. $\operatorname{Card} A < \operatorname{Card} \mathfrak{P}(A)$); 2) мощность множества всех конечных подмножеств бесконечного множества A равна мощности множества A. Нередко оказывается полезной теорема: если $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — семейство неодноэлементных множеств и $A_\iota \cap A_\varkappa = \varnothing$ при $\iota \neq \varkappa$, то

$$\operatorname{Card}\Big(\bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota\Big) \leqslant \operatorname{Card}\Big(\prod_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota\Big).$$

Отметим еще несколько соотношений, касающихся мощностей множеств A, B и C:

1) если $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} B$ и $\operatorname{Card} B \leqslant \operatorname{Card} C$, то $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} C$; 2) если $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} B$ и $\operatorname{Card} B \leqslant \operatorname{Card} A$, то $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$; 3) если $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} B$, то $\operatorname{Card}(A \times C) \leqslant \operatorname{Card}(B \times C)$; 4) если A бесконечно, а B счетное, то $\operatorname{Card} B \leqslant \operatorname{Card} A$ и $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A$; 5) если A бесконечно и $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$, то $\operatorname{Card} A^n = \operatorname{Card} A$; 6) каждое бесконечное множество A можно представить в виде объединения попарно не пересекающихся эквивалентных ему подмножеств, причем мощность

множества этих подмножеств равна мощности множества A; 7) если A — бесконечное множество, то, каково бы ни было множество B, $\operatorname{Card}(A \cup B) \leqslant \max\{\operatorname{Card} A, \operatorname{Card} B\}$; 8) если A и B — непустые множества, причем B бесконечно и $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} B$, то $\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card} B$.

На мощность множества A можно смотреть и как на новый объект, обычно называемый *кардинальным числом* или *кардиналом*. Наряду с обозначением $\operatorname{Card} A$ часто используется символ $|A|$. Таким образом, $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда A и B эквивалентны. Кардинальным числом конечного множества служит число его элементов. Кардинальное число счетного множества обозначается через $\aleph_0$, а кардинальное число множества всех его подмножеств (совпадающее, кстати сказать, с кардинальным числом множества всех действительных чисел) — через $\aleph_1$.

Долгое время оставался открытым вопрос: существует ли такое кардинальное число $\mathfrak{c}$, что $\aleph_0 < \mathfrak{c} < \aleph_1$. Оказалось, однако, что как утверждение о существовании такого $\mathfrak{c}$, так и отрицание этого утверждения совместимо с общепринятой аксиоматикой теории множеств (см. [8]).

Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — кардинальные числа, A и B — множества, такие, что $|A| = \mathfrak{a}$ и $|B| = \mathfrak{b}$, то положим:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |A \cup B|, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = |A \times B|,$$

$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ — кардинальное число множества всех отображений множества B в множество A.

Тогда

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a},$$
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}, \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}},$$
$$\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}.$$

Если $\mathfrak{a}_\iota$, $\iota \in \mathfrak{J}$, — кардинальные числа, то положим

$$\sum_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}_\iota = \Big| \bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota \Big|$$

и

$$\prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}_\iota = \Big| \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota \Big|,$$

где A_ι — такие множества, что $|A_\iota| = \mathfrak{a}_\iota$.

Тогда

$$\sum_{\iota \in \bigcup \{\mathfrak{J}_\varkappa \mid \varkappa \in \mathfrak{K}\}} \mathfrak{a}_\iota = \sum_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\sum_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} \mathfrak{a}_\iota \Big),$$

$$\prod_{\iota \in \bigcup \{\mathfrak{J}_\varkappa \mid \varkappa \in \mathfrak{K}\}} \mathfrak{a}_\iota = \prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\prod_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} \mathfrak{a}_\iota \Big),$$

$$\prod_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \Big(\sum_{\iota \in \mathfrak{J}_\varkappa} \mathfrak{a}_{\varkappa\iota} \Big) = \sum_{f \in \Pi \{\mathfrak{J}_\varkappa \mid \varkappa \in \mathfrak{K}\}} \mathfrak{a}_{\varkappa f(\varkappa)},$$

$$\mathfrak{a}^{\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{b}_\iota} = \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\iota}$$

и, если $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{b}_\iota$, $\iota \in \mathfrak{J}$, то

$$\sum_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}_\iota \leqslant \sum_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{b}_\iota \quad \text{и} \quad \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}_\iota \leqslant \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{b}_\iota.$$

Отметим *теорему Кёнига*: если $\mathfrak{J}$ — бесконечное множество и $\mathfrak{a}_\iota < \mathfrak{b}_\iota$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$, то

$$\sum_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{a}_\iota < \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{b}_\iota.$$

В частности, если $1 < \mathfrak{a}_n < \mathfrak{a}_{n+1}$, то

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots < \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \ldots$$

Конфинальный характер $\mathrm{cf}(\mathfrak{m})$ кардинального числа $\mathfrak{m}$ определяется как наименьшее среди таких кардинальных чисел $\mathfrak{b}$, что найдутся множество $\mathfrak{J}$ мощности $\mathfrak{b}$ и отображение φ множества $\mathfrak{J}$ в множество кардинальных чисел, меньших $\mathfrak{m}$, для которых $\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} \varphi(\iota) = \mathfrak{m}$. Если $\mathrm{cf}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, то кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *регулярным*. Кардинальное число, не являющееся регулярным, называется *сингулярным*. Если $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, то наименьшее среди кардинальных чисел, больших $\mathfrak{m}$, всегда регулярно.

Бесконечное кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *слабо недостижимым*, если оно регулярно и для любого $\mathfrak{a} < \mathfrak{m}$ существует такое кардинальное число $\mathfrak{b}$, что $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{m}$. Кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *доминантным*, если $\mathfrak{a} < \mathfrak{m}$ влечет $2^{\mathfrak{a}} < \mathfrak{m}$. Слабо недостижимое кардинальное число называется *сильно недостижимым*, если оно регулярно и доминантно. Если принять *обобщенную континуум-гипотезу*, т. е. счи-

тать, что ни для какого кардинального числа $\mathfrak{a}$ не существует такого кардинального числа $\mathfrak{c}$, что $\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{a}}$, то классы слабо и сильно недостижимых кардинальных чисел совпадают.

Кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *измеримым*, если существуют множество A, где $|A| = \mathfrak{m}$, и функция $f\colon \mathfrak{P}(A) \to \{0, 1\}$, такие, что $f(A) = 1$, $f(\{a\}) = 0$ для всех $a \in A$ и

$$f\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} f(X_i)$$

для любой последовательности $X_0, X_1, X_2, \ldots$ попарно непересекающихся подмножеств множества A. Кардинальное число, большее некоторого измеримого кардинального числа, измеримо. Из измеримости кардинального числа $2^{\mathfrak{m}}$ вытекает измеримость $\mathfrak{m}$. Каждое кардинальное число, меньшее первого сильно недостижимого числа, неизмеримо. Первое измеримое кардинальное число сильно недостижимо. Первое сильно недостижимое кардинальное число неизмеримо. Вопрос о существовании измеримых кардинальных чисел (или, точнее, о совместимости их существования с общепринятой аксиоматикой теории множеств) открыт. Известно, однако, что первое измеримое кардинальное число должно быть намного больше первого несчетного сильно недостижимого кардинального числа ([9], гл. IX).

§ 2. Частично упорядоченные множества

2.1. Частично упорядоченные множества. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение называется *порядком*. Это отношение обычно обозначают символом $\leqslant$ и пишут $a \leqslant b$ вместо $(a, b) \in \leqslant$. Если $\leqslant$ — порядок, то отношение $\leqslant^{\#}$ (напомним, что $a \leqslant^{\#} b$ означает, что $b \leqslant a$) также является порядком, который называется *дуальным* или *двойственным* порядку $\leqslant$. Этот факт влечет справедливость *принципа двойственности*: если верна какая-либо теорема о частично упорядоченных множествах, сформулированная в общелогических терминах и терминах порядка, то верна и двойственная ей теорема, получаемая заменой всех знаков порядка $\leqslant$ на $\geqslant$ и обратно,

причем общелогические термины остаются без изменения. Это, однако, не означает, что справедливость какого-либо утверждения для конкретного частично упорядоченного множества влечет справедливость для него и двойственного утверждения.

Запись $a < b$ означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ часто называют *строгим порядком*. Для того чтобы отношение ρ оказалось строгим порядком, необходимо и достаточно, чтобы оно было транзитивным, *антирефлексивным* (т. е. $a\rho a$ не имеет место ни при каком a) и *сильно антисимметричным* (т. е. ни для каких a и b соотношения $a\rho b$ и $b\rho a$ не могут выполняться одновременно). Объединение строгого порядка с диагональю оказывается порядком. Записи $a \nleqslant b$ и $a \nless b$ означают отрицание соотношений $a \leqslant b$ и $a < b$ соответственно. Подчеркнем, что $a \nleqslant b$, вообще говоря, не влечет $b \leqslant a$. Если же $a \nleqslant b$ влечет за собой $b \leqslant a$, т. е. для любых a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, то порядок называется *линейным*. Всякий порядок на множестве A, рассматриваемый как подмножество множества $A \times A$, является подмножеством некоторого линейного порядка на A ([9], с. 267, теорема 8). С порядком тесно связано тернарное отношение «между»:

$$(a, b, c) \underset{\text{def}}{=} (a \leqslant b \leqslant c \text{ или } c \leqslant b \leqslant a)$$

(см. [3], с. 62—64).

Непустое множество, на котором зафиксирован некоторый порядок, называется *частично упорядоченным* (а иногда и *упорядоченным*). Всякое непустое множество является частично упорядоченным множеством с диагональю в качестве порядка. Такое частично упорядоченное множество называется *тривиальным* или *дискретным*. Если P — частично упорядоченное множество с порядком $\leqslant$ и $\varnothing \neq Q \subseteq P$, то Q является частично упорядоченным множеством с порядком $(Q \times Q) \cap \leqslant$. В этом случае, допуская некоторую вольность речи, говорят, что Q является частично упорядоченным множеством с порядком $\leqslant$. Таким образом, каждое непустое подмножество частично упорядоченного множества является частично упорядоченным множеством с тем же самым порядком. Частично упорядоченное множество с линейным порядком называется *линейно упорядоченным мно-*

жеством или *цепью* (подробнее см. п. 2.3). Если для любых элементов a и b частично упорядоченного множества P найдется такой элемент $c \in P$, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$ [что $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$], то P называется *направленным вверх* [*вниз*]. Иногда в этом случае говорят, что P *фильтруется вправо* [*влево*].

Примеры. 1) $(\mathbf{N}, \leqslant)$ — множество натуральных чисел с обычным порядком; 2) $(\mathbf{N}, |)$ — множество натуральных чисел, где $a \leqslant b$ означает, что a делит b (т. е. $b = ac$ для некоторого натурального числа c); 3) множество $\mathfrak{P}(M)$ всех подмножеств некоторого множества M, где $A \leqslant B$ означает, что $A \subseteq B$; 4) множество всех действительных функций на отрезке $[0, 1]$, где $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [0, 1]$; 5) множество всех точек плоскости, где $P \leqslant Q$ означает, что или $P = Q$ или $P \neq Q$ и PQ — вертикальная прямая. Цепями оказываются $(\mathbf{N}, \leqslant)$ и $\mathfrak{P}(M)$, если M — одноэлементное множество. Все указанные частично упорядоченные множества, кроме последнего, направлены как вверх, так и вниз.

Частично упорядоченным множеством, *двойственным* (или *дуальным*) частично упорядоченному множеству P с порядком $\leqslant$ называется частично упорядоченное множество P с порядком $\leqslant^{\#}$.

Рефлексивное и транзитивное отношение называется *квазипорядком* или *предпорядком*. Непустое множество, на котором зафиксирован некоторый квазипорядок, называется *квазиупорядоченным*.

В качестве примера квазиупорядоченного множества, не являющегося частично упорядоченным, укажем множество всех целых чисел, где $a \leqslant b$ означает, что a делит b: здесь, например, $3 \leqslant -3$ и $-3 \leqslant 3$, но $3 \neq -3$.

Если Q — квазиупорядоченное множество, то отношение

$$\theta = \{(x, y) \mid x, y \in Q,\ x \leqslant y \text{ и } y \leqslant x\}$$

оказывается эквивалентностью. При этом факторможество Q/θ можно превратить в частично упорядоченное множество, положив $\theta(x) \leqslant \theta(y)$, если $x \leqslant y$ (корректность этого определения легко проверяется).

Рефлексивное и антисимметричное отношение называется *турниром*.

Элементы a и b частично упорядоченного множества P называются *сравнимыми*, если имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Два элемента тривиального частично упорядоченного множества, очевидно, сравнимы тогда и только тогда, когда они совпадают. Про

несравнимые элементы a и b часто говорят, что они *параллельны* и пишут $a \| b$. Непустое подмножество частично упорядоченного множества называют *цепью* [*антицепью*], если любые два элемента из этого подмножества сравнимы [или равны, или несравнимы]. Цепь C в частично упорядоченном множестве P называется *максимальной*, если для любого $x \in P \setminus C$ подмножество $C \cup \{x\}$ цепью уже не является. Частично упорядоченное множество, не содержащее ни бесконечных цепей, ни бесконечных антицепей, конечно. Говорят, что *длина* [*ширина*] частично упорядоченного множества P равна n, если в P существует цепь, содержащая $n+1$ элемент [антицепь, содержащая n элементов], и нет цепей [антицепей], содержащих большее число элементов.

Цепью в частично упорядоченном множестве $(\mathbf{N}, |)$ (пример 2) выше) является подмножество $\{2^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$, а антицепью — множество всех простых чисел. Примером максимальной цепи служит любая вертикальная прямая в примере 5).

Частично упорядоченное множество P называется *связным*, если для любых $a, b \in P$ найдутся такие $x_1, \ldots, x_n \in P$, что $a = x_1$, $b = x_n$ и x_i сравним с x_{i+1} при $i = 1, \ldots, n-1$.

Элемент v частично упорядоченного множества P называется *наибольшим*, если $x \leqslant v$ для всех $x \in P$. Если же $u \leqslant x$ для всех $x \in P$, то элемент u называется *наименьшим*. Наибольший элемент часто называют *единицей*, а наименьший — *нулем*. Конечно, частично упорядоченное множество может не содержать ни нуля, ни единицы. Таким, в частности, будет неодноэлементное тривиальное частично упорядоченное множество. Однако более одного наибольшего элемента частично упорядоченное множество содержать не может. То же самое верно и для наименьшего элемента. Частично упорядоченное множество, обладающее наибольшим [наименьшим] элементом, называется *ограниченным сверху* [*снизу*], а частично упорядоченное множество, ограниченное как сверху, так и снизу, просто *ограниченным*.

Наибольшим элементом в частично упорядоченном множестве $(\mathbf{N}, |)$ служит 0, а наименьшим — 1. В частично упорядоченном множестве $\mathfrak{P}(M)$ эти роли играют M и $\varnothing$ соответственно. Не содержат ни наибольшего, ни наименьшего элемента частично упорядоченные множества примеров 4) и 5) на с. 37.

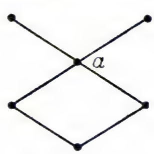
Частично упорядоченное множество $(\mathbf{N}, \leqslant)$ содержит наименьший элемент 0, а наибольшего элемента не содержит.

Элемент w частично упорядоченного множества P называется *максимальным*, если из $w \leqslant x$ для некоторого $x \in P$ вытекает $w = x$. Если из $x \leqslant m$ для некоторого $x \in P$ следует, что $x = m$, то m называется *минимальным* элементом. Легко проверяется, что всякий наибольший элемент является максимальным, а всякий наименьший элемент — минимальным. Обратное, вообще говоря, места не имеет. Так, например, в тривиальном частично упорядоченном множестве всякий элемент является как максимальным, так и минимальным. Всякое конечное частично упорядоченное множество содержит как максимальные, так и минимальные элементы.

Пусть P — квадрат с вертикальными боковыми сторонами и порядком, описанным в примере 5) на с. 37. Тогда все точки верхней [нижней] стороны этого квадрата максимальны [минимальны].

Отличный от минимального и максимального элемент частично упорядоченного множества P называется *талией*, если он сравним с любым элементом из P.

В частично упорядоченном множестве



талией служит элемент a. В цепи все элементы, кроме наибольшего и наименьшего, являются талиями.

Если A и B — подмножества частично упорядоченного множества P, то говорят, что A *конфинально* [*коинициально*] B, если для любого $b \in B$ найдется такой элемент $a \in A$, что $b \leqslant a$ [что $a \leqslant b$]. Подмножество, конфинальное [коинициальное] самому P, называется *конфинальным* [*коинициальным*].

Если A — непустое подмножество частично упорядоченного множества P, то *верхним* [*нижним*] *конусом* множества A называем множество всех таких элементов $x \in P$, что $a \leqslant x$ $[x \leqslant a]$ для всех $a \in A$. Верхним [нижним] конусом пустого множества будем

считать само множество P. Верхний и нижний конусы множества A будем обозначать символами $A^{\triangle}$ и $A^{\triangledown}$ соответственно. Элементы, принадлежащие верхнему конусу $A^{\triangle}$ [нижнему конусу $A^{\triangledown}$] называются *мажорантами* [*минорантами*] множества A. Подмножество A называется *ограниченным сверху* [*снизу*], если $A^{\triangle} \neq \varnothing$ $[A^{\triangledown} \neq \varnothing]$.

В частично упорядоченном множестве $(\mathbf{N}, |)$ имеем

$\{18, 12\}^{\triangle} =$ {множество всех чисел из $\mathbf{N}$, делящихся на 18 и 12 одновременно} $= \{36n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$;

$\{18, 12\}^{\triangledown} =$ {множество всех чисел из $\mathbf{N}$, делящих 18 и 12 одновременно} $= \{1, 2, 3, 6\}$.

В частично упорядоченном множестве функций (пример 4) на с. 37) верхний конус $\{\sin x, \cos x\}^{\triangle}$ — это все функции, графики которых лежат в горизонтально заштрихованной области

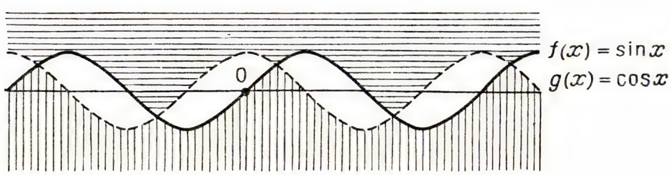


Рис. I.4

на рис. I.4. Графики функций, входящих в нижний конус $\{\sin x, \cos x\}^{\triangledown}$, лежат в области с вертикальной штриховкой на том же рисунке.

Если A и B — подмножества частично упорядоченного множества P, то имеют место следующие утверждения: а) если $A \subseteq B$, то $A^{\triangle} \supseteq B^{\triangle}$ и $A^{\triangledown} \supseteq B^{\triangledown}$; б) $A \subseteq A^{\triangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\triangle}$; в) $A^{\triangle} = A^{\triangle\triangledown\triangle}$; г) $A^{\triangledown} = A^{\triangledown\triangle\triangledown}$; д) $(A \cup B)^{\triangle} = A^{\triangle} \cap B^{\triangle}$; е) $(A \cup B)^{\triangledown} = A^{\triangledown} \cap B^{\triangledown}$; ж) элемент $a \in P$ максимален [минимален] тогда и только тогда, когда $a^{\triangle} = \{a\}$ [когда $a^{\triangledown} = \{a\}$].

Если a, b — элементы частично упорядоченного множества P, то множество

$$[a, b]_P = \{x \mid x \in P,\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *замкнутым интервалом* (или просто *интервалом*). Ясно, что a — наименьший элемент интервала $[a, b]_P$, а b — его наибольший элемент. Заметим еще, что $[a, b]_P = a^{\triangle} \cap b^{\triangledown}$. Если $a = b$, то $[a, b]_P = \{a\}$. Если $a \neq b$, но $[a, b]_P = \{a, b\}$, то такой ин-

тервал называется *простым*. В этом случае говорят, что b *покрывает* a. Рассматриваются также *полуоткрытые интервалы* или *полуинтервалы*

$$(a,\ b]_P = \{x \mid x \in P,\ a < x \leqslant b\}$$

и

$$[a,\ b)_P = \{x \mid x \in P,\ a \leqslant x < b\}$$

и *открытый интервал*

$$(a,\ b)_P = \{x \mid x \in P,\ a < x < b\}.$$

Если $[a, b]_P$ — простой интервал, то $(a, b)_P = \varnothing$. Нижний конус a^∇, где $a \in P$, называется *инициальным* или *начальным интервалом*, а верхний конус a^Δ — *финальным интервалом*. Инициальный интервал иногда обозначается как $(\leftarrow, \alpha]_P$ или $(-\infty, a]_P$, а финальный — через $[a, \rightarrow)_P$ или $[a, +\infty)_P$. Если P содержит наименьший элемент 0, то начальный интервал a^∇ совпадает с $[0, a]_P$. При наличии наибольшего элемента 1, финальный интервал a^Δ равен $[a, 1]_P$. Индекс P в обозначениях интервалов часто опускается.

Элементы, покрывающие наименьший элемент частично упорядоченного множества P (если, разумеется, он существует), называются *атомами* (иногда, *точками*), а элементы, покрываемые наибольшим элементом — *коатомами* или *дуальными атомами*. Частично упорядоченное множество P называется *атомным* [*коатомным*], если для любого a из P, отличного от его наименьшего [наибольшего] элемента, найдется атом $p \leqslant a$ [коатом $c \geqslant a$]. Атомы являются минимальными элементами множества $P \setminus \{0\}$, а коатомы — максимальными элементами множества $P \setminus \{1\}$. Ясно, что частично упорядоченное множество, дуальное атомному, коатомно.

Примерами атомных частично упорядоченных множеств служат $(\mathbf{N}, \leqslant)$ и $(\mathbf{N} \setminus \{1\}, |)$. В первом случае имеется единственный атом 1, а во втором атомами являются все простые числа и только они (см. примеры на с. 37).

Цепь $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, принадлежащая частично упорядоченному множеству с нулем 0 и единицей 1, называется *композиционным рядом*, если $a_0 = 0$, $a_n = 1$ и все интервалы $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, — простые. Разумеется, композиционный

ряд существует не всегда. Число n называется *длиной* композиционного ряда. Цепь C, лежащая в частично упорядоченном множестве P, называется *неуплотняемой*, если из того, что $C \cup \{a\}$, где $a \in P \setminus (C^{\vartriangle} \cup \cup C^{\triangledown})$, является цепью, вытекает, что $a \in C$. Другими словами, между любыми двумя различными элементами цепи C нет элементов, не принадлежащих C. В частности, композиционный ряд является неуплотняемой цепью. Если же из композиционного ряда удалить 0 или 1, то возникает неуплотняемая цепь, не являющаяся композиционным рядом.

Частично упорядоченное множество P называется *градуированным*, если задано отображение h множества P в множество целых чисел с обычным порядком, обладающее следующими свойствами: 1) если $x, y \in P$ и $x < y$, то $h(x) < h(y)$; 2) если x покрывает y, то $h(x) = h(y) + 1$. Всякое такое множество удовлетворяет *условию Жордана—Дедекинда*: все композиционные ряды любого замкнутого интервала имеют одну и ту же длину.

Подмножество V частично упорядоченного множества P называется *выпуклым подмножеством*, *идеалом* и *фильтром* (часто *дуальным идеалом*), если справедливы импликации

$$((a,\ b \in V)\ \&\ (x \in P)\ \&\ (a \leqslant x \leqslant b)) \Rightarrow (x \in V),$$

$$((a \in V)\ \&\ (x \in P)\ \&\ (x \leqslant a)) \Rightarrow (x \in V)$$

и

$$((a \in V)\ \&\ (x \in P)\ \&\ (a \leqslant x)) \Rightarrow (x \in V)$$

соответственно. Другими словами, идеал [фильтр] — это подмножество, содержащее вместе с любым элементом a весь нижний конус $a^{\triangledown}$ [верхний конус $a^{\vartriangle}$]. К числу выпуклых подмножеств принадлежит любой интервал. Примерами идеала и фильтра служат инициальный и финальный интервалы соответственно. Как идеал, так и фильтр, а также их пересечение оказываются выпуклыми множествами.

Частично упорядоченное множество называется *конечно свободным*, если все содержащиеся в нем антицепи конечны. Такое частично упорядоченное множество может содержать лишь счетное множество попарно не сравнимых идеалов ([20], §§ 4.3, 7.2).

Широко применяемая в математике трансфинитная индукция базируется на том факте, что следующие свойства частично упорядоченного множества P равносильны: (1) (*условие минимальности*) всякое непустое подмножество множества P является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальный элемент; (2) (*условие индуктивности*) если все минимальные элементы множества P обладают некоторым свойством $\mathcal{E}$ и из того, что все элементы x из P, удовлетворяющие условию $x < a$, обладают свойством $\mathcal{E}$, вытекает, что элемент a также обладает свойством $\mathcal{E}$, то свойством $\mathcal{E}$ обладают все элементы множества P; (3) (*условие обрыва убывающих цепей*) для всякой последовательности $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant a_k \geqslant \ldots$ элементов из P найдется такой номер n, что $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$

Для частично упорядоченного множества P эквивалентны и такие свойства: (1) (*условие максимальности*) всякое непустое подмножество множества P является частично упорядоченным множеством, содержащим максимальный элемент; (2) (*условие обрыва возрастающих цепей*) для всякой последовательности $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant \ldots$ элементов из P найдется такой номер n, что $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$

Частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности, иногда называют *артиновым* или *фундированным*, а удовлетворяющее условию максимальности — *нётеровым*. *Нётеровым* называют также частично упорядоченное множество P, удовлетворяющее такому условию: для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ элементов из P найдутся такие числа i и j, что $i < j$ и $a_i \geqslant a_j$ ([7], с. 356).

Цепь, удовлетворяющая условию минимальности, называется *вполне упорядоченным множеством*. К числу вполне упорядоченных множеств принадлежит цепь натуральных чисел с обычным порядком. Подробнее см. п. 2.4.

Важную роль во всей теоретико-множественной математике играют следующие эквивалентные друг другу утверждения: (1) (*аксиома выбора*) для всякого непустого множества M существует такое отображение φ множества всех подмножеств множества M в множество M, что $\varphi(A) \in A$ для всякого подмножества $A \subseteq M$; (2) (*теорема Цермело*) на всяком

непустом множестве можно задать порядок, превращающий его во вполне упорядоченное множество; (3) (*теорема Хаусдорфа*) всякая цепь любого частично упорядоченного множества может быть вложена в максимальную цепь; (4) (*лемма Куратовского—Цорна*) если верхний конус любой цепи частично упорядоченного множества P не пуст, то P содержит максимальные элементы; (5) если верхний конус любой вполне упорядоченной цепи частично упорядоченного множества P не пуст, то P содержит максимальные элементы; (6) если любая цепь частично упорядоченного множества P имеет точную верхнюю грань, то P содержит максимальные элементы; ($4^{\#}$) Если нижний конус любой цепи частично упорядоченного множества P не пуст, то P содержит минимальные элементы.

Подчеркнем, что утверждается эквивалентность приведенных выше утверждений, а не справедливость какого-либо из них.

Частично упорядоченное множество, в котором верхний конус любой цепи непуст, иногда называют *индуктивным*.

Отображение φ частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P' называется *изотонным* [*антиизотонным*] если $a \leqslant b$ влечет $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ $[\varphi(b) \leqslant \varphi(a)]$.

Если P — множество положительных целых чисел, упорядоченное по делимости (см. пример 2) на с. 37), а P' — то же множество с обычным порядком, то тождественное отображение 1_P изотонно. Изотонным оказывается отображение $\varphi\colon \mathfrak{P}(M) \to (\mathbf{N}, \leqslant)$, где $\varphi(X)$ — число элементов подмножества $X \subseteq M$. В качестве примера антиизотонного отображения укажем $\varphi\colon \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$, где $\varphi(X)$ — дополнение подмножества $X \subseteq M$.

Частично упорядоченные множества P и P' называются *изоморфными* [*антиизоморфными*], если существует *изоморфизм* [*антиизоморфизм*] P на P', т. е. такое взаимно однозначное отображение φ множества P на множество P', что $a \leqslant b$ имеет место для $a, b \in P$ тогда и только тогда, когда $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ $[\varphi(b) \leqslant \varphi(a)]$ в P'. Для практических целей часто оказывается полезным следующее утверждение: если P и P' — частично упорядоченные множества, $\varphi\colon P \to P'$ — наложение и $a \leqslant b$ в P тогда и только тогда, когда $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ $[\varphi(b) \leqslant \varphi(a)]$ в P', то φ — изо-

морфизм [антиизоморфизм] частично упорядоченного множества P на P'.

Взаимно однозначное изотонное отображение может не быть изоморфизмом. Действительно, если P — неодноэлементное частично упорядоченное множество с тривиальным порядком, а P' — то же самое множество с нетривиальным порядком, то тождественное отображение множества P на себя — это изотонное и взаимно однозначное отображение P на P', не являющееся изоморфизмом.

Если $\varphi\colon P \to P'$ — изотонное отображение, то полный прообраз любого элемента из P' оказывается выпуклым подмножеством. Произведение двух изотонных отображений изотонно. Изотонно и произведение двух антиизотонных отображений. В частности, произведение двух антиизоморфизмов оказывается изоморфизмом. Если изотонное отображение $\varphi\colon P \to P'$ сюръективно, то образ идеала, фильтра и выпуклого множества из P является соответственно идеалом, фильтром и выпуклым подмножеством множества P'. Для сюръективного антиизотонного отображения образы идеала, фильтра и выпуклого множества являются фильтром, идеалом и выпуклым множеством соответственно.

Изотонное отображение $\varphi\colon P \to P'$ называется *резидуальным*, если существует такое изотонное отображение $\varphi'\colon P' \to P$, что $x \leqslant \varphi'(\varphi(x))$ для всех $x \in P$ и $\varphi(\varphi'(x')) \leqslant x'$ для всех $x' \in P'$. Изоморфизм является частным случаем резидуального отображения. Совокупность всех резидуальных отображений частично упорядоченного множества в себя образует полугруппу, свойства которой тесно связаны со свойствами этого частично упорядоченного множества (см. [16]).

Изотонное [антиизотонное] отображение частично упорядоченного множества в себя называется *эндоморфизмом* [*антиэндоморфизмом*] этого множества. Изоморфное [антиизоморфное] отображение частично упорядоченного множества на себя назовем *автоморфизмом* [*антиавтоморфизмом*]. Совокупность всех эндоморфизмов [автоморфизмов] частично упорядоченного множества P является полугруппой [группой], которую условимся обозначать через $\operatorname{End} P$ [через $\operatorname{Aut} P$]. Частично упорядоченное множество

называется *жестким*, если тождественное отображение является его единственным автоморфизмом.

Пусть k — натуральное число. Частично упорядоченное множество P называется *k-транзитивным*, если для любых его k-элементных подмножеств A и B, изоморфных как частично упорядоченные множества, существует $\varphi \in \operatorname{Aut} P$ такой, что $\varphi(A) = B$, и *k-однородным*, если любой изоморфизм k-элементного подмножества $A \subseteq P$ на k-элементное подмножество $B \subseteq P$ продолжается до автоморфизма частично упорядоченного множества P. Если P k-транзитивно [k-однородно] для всех натуральных k, то оно называется *ω-транзитивным* [*ω-однородным*]. Из k-однородности, очевидно, вытекает k-транзитивность. Обратное, вообще говоря, неверно. Для бесконечной цепи C при $k \geqslant 2$ эквивалентны следующие свойства: (1) C k-транзитивна; (2) C k-однородна; (3) C ω-транзитивна; (4) C не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента и любые два ее неодноэлементных интервала изоморфны. Если $k \geqslant 2$ и P — нетривиальное бесконечное k-транзитивное частично упорядоченное множество, то справедливо одно из следующей утверждений: 1) P — ординальная сумма антицепих A, B и C, причем $1 \leqslant |A| + |C| \leqslant k - 1$; 2) P — дизъюнктное объединение попарно изоморфных бесконечных 2-транзитивных цепей C_ι, где $\iota \in \mathfrak{J}$, причем $1 \leqslant |\mathfrak{J}| \leqslant |P|$ и $x \| y$, если $x \in C_\iota$ и $y \in C_\varkappa$, где $\iota \neq \varkappa$; 3) если C — неодноэлементная максимальная цепь из P, то C бесконечна, 2-транзитивна и выполняется одно и только одно из следующих условий: а) P изоморфно лексикографическому произведению $C \times \tilde{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ — тривиально упорядоченное множество мощности $\mathfrak{m} \geqslant 2$; б) P — дизъюнктное объединение множеств Q и R, каждое из которых изоморфно лексикографическому произведению $C \times \tilde{\mathfrak{m}}$, причем $x \| y$ для любых $x \in Q$ и $y \in R$, $\mathfrak{m} \geqslant 2$ и $2\mathfrak{m} - 1 \leqslant k$; в) $P = Q \cup \mathrm{IP}(P)$ и $Q \cap \mathrm{IP}(P) = \varnothing$, где

$$\mathrm{IP}(P) = \{x \mid x \in P \text{ и } x \| y \text{ для всех } y \in P \setminus \{x\}\} \neq \varnothing,$$

а Q изоморфно множеству $C \times \tilde{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m} + |\mathrm{IP}(P)| \leqslant k$; 4) P связно и содержит бесконечную цепь и множество $\{x, y, z\}$, где $x < y$, $x \| z$, $y \| z$; при этом выполняется в точности одно из следующих условий:

а) если a, $b \in P$, то найдется $c \in P$ такой, что $c < a, b$ и a^{∇} — цепь; б) если a, $b \in P$, то найдется $c \in P$ такой, что a, $b < c$ и a^{Δ} — цепь; в) существуют элементы a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, $c_2 \in P$ такие, что $a_1 \| b_1$, $a_2 \| b_2$, $c_1 < a_1$, b_1 и a_2, $b_2 < c_2$. Частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условию 2), ω-однородно. Если P — бесконечное частично упорядоченное множество, $\mathfrak{m}$ — кардинальное число и $2 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant |P|$, то эквивалентны утверждения: (1) если A, $B \subseteq P$ и $|A| = |B| = \mathfrak{m}$, то A и B изоморфны; (2) если $A, B \subseteq P$ и $|A| = |B| = \mathfrak{m}$, то A и B элементарно эквивалентны; (3) выполнено одно из следующих условий: а) P тривиально; б) P — цепь и $\mathfrak{m} < \aleph_0$; в) $|P| = \mathfrak{m}$, и P изоморфно или цепи $[0, \alpha)$, где α — наименьший трансфинит мощности $\mathfrak{m}$, или цепи, двойственной ей ([19], §§ 3, 4).

Пусть $\{P_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество попарно не пересекающихся частично упорядоченных множеств, причем $\mathfrak{J}$ также частично упорядочено. *Упорядоченной суммой* частично упорядоченных множеств P_ι называется дизъюнктное объединение $P = \bigcup\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} P_\iota$, где $a \leqslant b$ для a, $b \in P$ означает, что или a, $b \in P_\iota$ для некоторого $\iota \in \mathfrak{J}$ и $a \leqslant b$ в P_ι, или $a \in P_\iota$, $b \in P_\varkappa$ и $\iota < \varkappa$. Упорядоченная сумма называется кардинальной, если $\mathfrak{J}$ — тривиально упорядоченное множество, и *ординальной*, если $\mathfrak{J}$ — цепь. Ординальная сумма цепей оказывается цепью. Частично упорядоченное множество, не представимое в виде ординальной [кардинальной] суммы отличных от него подмножеств называется *ординально* [*кардинально*] *неразложимым*. Всякое частично упорядоченное множество является ординальной [кардинальной] суммой своих ординально [кардинально] неразложимых подмножеств ([11], § 1, 2).

Прямым произведением множества $\{P_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ частично упорядоченных множеств называется прямое произведение этих множеств с порядком $\leqslant$, где $a \leqslant b$ для a, $b \in \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} P_\iota$ означает, что $a(\iota) \leqslant b(\iota)$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$. Если $\mathfrak{J}$ — частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности, то *упорядоченным произведением* частично упорядоченных множеств P_ι называется прямое произведение этих

множеств с порядком $\leqslant$, где $a \leqslant b$ определяется условием: если $a(\iota) \nleqslant b(\iota)$, то $a(\varkappa) < b(\varkappa)$ для некоторого $\varkappa < \iota$. Если $\mathfrak{J}$ — вполне упорядоченное множество, то упорядоченное произведение называется *лексикографическим.* В этом случае $a < b$ означает, что для некоторого $\varkappa \in \mathfrak{J}$ имеем $a(\iota) = b(\iota)$, если $\iota < \varkappa$ и $a(\varkappa) < b(\varkappa)$. Лексикографическое произведение цепей оказывается цепью, а лексикографическое произведение конечного числа вполне упорядоченных множеств вполне упорядочено ([11], § 1, 2).

Пусть снова $\{P_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество попарно не пересекающихся [частично упорядоченных] множеств, $\mathfrak{J}$ — направленное вверх множество и для любых $\iota, \varkappa \in \mathfrak{J}$, где $\iota \leqslant \varkappa$, определено [изотонное] отображение $p_{\iota\varkappa}\colon P_\iota \to P_\varkappa$, причем $p_{\iota\iota} = 1_{P_\iota}$ и $\iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$ влечет $p_{\iota\varkappa} p_{\varkappa\lambda} = p_{\iota\lambda}$. В этом случае говорят, что задан *прямой спектр* или *индуктивная система* множеств. На множестве $P = \bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} P_\iota$ зададим эквивалентность $\equiv$, полагая, что $x \equiv y$, где $x \in P_\varkappa$ и $y \in P_\lambda$, если найдется индекс $\mu \in \mathfrak{J}$ такой, что $\varkappa \leqslant \mu$, $\lambda \leqslant \mu$ и $p_{\varkappa\mu}(x) = p_{\lambda\mu}(x)$. Фактормножество $P/\equiv$ называется *индуктивным* или *прямым пределом прямого спектра* $\{P_\iota, p_{\iota\varkappa}\}$ и обозначается как $\varinjlim \{P_\iota, p_{\iota\varkappa}\}$ или $\varinjlim P_\iota$. Если P_ι — частично упорядоченные множества, то для классов $[a], [b] \in P/\equiv$ полагаем $[a] \leqslant [b]$, если $a' \leqslant b'$ для некоторых $a' \in [a]$ и $b' \in [b]$. Это определение оказывается корректным и превращает $\varinjlim P_\iota$ в частично упорядоченное множество. Если ρ — естественное отображение P на $P/\equiv$, то через ρ_ι обозначим ограничение ρ на P_ι.

Если $\{P_\iota, p_{\iota\varkappa}\}$ — прямой спектр и заданы [изотонные] отображения $\varphi_\iota\colon P_\iota \to Q$, где $\iota \in \mathfrak{J}$, Q — некоторое [частично упорядоченное] множество и $\iota \leqslant \varkappa$ влечет за собой $p_{\iota\varkappa} \varphi_\varkappa = \varphi_\iota$, то существует одно и только одно [изотонное] отображение $\varphi\colon \varinjlim P_\iota \to Q$ такое, что $\rho_\iota \varphi = \varphi_\iota$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$. Отображение φ оказывается наложением тогда и только тогда, когда $Q = \bigcup_{\iota \in \mathfrak{J}} \operatorname{Im} \varphi_\iota$, а вложением в том и только том случае, когда для любого $\iota \in \mathfrak{J}$ соотношения $x \in P_\iota$,

$y \in P_\iota$ и $\varphi_\iota(x) = \varphi_\iota(y)$ влекут за собой существование такого $\varkappa \in \mathfrak{J}$, что $\iota \leqslant \varkappa$ и $p_{\iota\varkappa}(x) = p_{\iota\varkappa}(y)$.

Пусть опять $\{P_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество попарно не пересекающихся [частично упорядоченных] множеств, $\mathfrak{J}$ — направленное вверх множество и для любых $\iota, \varkappa \in J$, где $\iota \leqslant \varkappa$, определено [изотонное] отображение $\pi_{\varkappa\iota}\colon P_\varkappa \to P_\iota$, причем $\pi_{\iota\iota} = 1_{P_\iota}$, а $\iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$ влечет $\pi_{\lambda\varkappa}\pi_{\varkappa\iota} = \pi_{\lambda\iota}$. В этом случае говорят, что задан *обратный спектр* или *проективная система* множеств. *Проективным* или *обратным пределом* этого спектра называется множество

$$\varprojlim P_\iota = \left\{a \mid a \in \prod_{\iota \leqslant \mathfrak{J}} P_\iota,\ a(\iota) = \pi_{\varkappa\iota}(a(\varkappa)),\ \text{если } \iota \leqslant \varkappa\right\}.$$

Если Q — некоторое [частично упорядоченное] множество, $\varphi_\iota\colon Q \to P_\iota$, $\iota \in \mathfrak{J}$, — [изотонные] отображения и $\varphi_\iota = \varphi_\varkappa\pi_{\varkappa\iota}$ при $\iota \leqslant \varkappa$, то существует одно и только одно [изотонное] отображение $\varphi\colon Q \to \varprojlim P_\iota$ такое, что $\varphi(x)(\iota) = \varphi_\iota(x)$ для любых $\iota \in \mathfrak{J}$ и $x \in Q$, или, что то же самое, $\pi_\iota\varphi = \varphi_\iota$, где π_ι — естественная проекция $\prod P_\iota$ на P_ι. Отображение φ оказывается вложением в том и только том случае, когда для любых различных $x, y \in Q$ найдется такой индекс $\iota \in \mathfrak{J}$, что $\varphi_\iota(x) \neq \varphi_\iota(y)$ ([4], III. 1.10—III. 1.12; см. также п. VII. 2.2).

Пусть P — частично упорядоченное множество и $A \subseteq P$. Наименьший [наибольший] элемент верхнего [нижнего] конуса множества A (если он существует) называется *точной верхней [нижней] гранью множества* A. В частности, точной верхней [нижней] гранью пустого множества считается наименьший [наибольший] элемент частично упорядоченного множества P. Точную верхнюю [нижнюю] грань множества A в частично упорядоченном множестве P будем обозначать $\sup_P A$ [$\inf_P A$]. Впрочем, индекс P часто будет опускаться. Подчеркнем, что $\sup_P A$ и $\inf_P A$ (если они существуют) — однозначно определенные элементы множества P, ибо, как было отмечено выше, $A^\triangle$ [A^∇] содержит не более одного наименьшего [наибольшего] элемента. Определение точной верхней грани множества A можно перефразировать так: $u = \sup_P A$ в том

и только в том случае, если $a \leqslant u$ для всех $a \in A$ и имеем $u \leqslant x$ всякий раз, когда $a \leqslant x$ для любого $a \in A$. Аналогичную перефразировку допускает и определение точной нижней грани. Отметим, что точная нижняя грань двух различных атомов всегда существует и равна наименьшему элементу, а точная верхняя грань любых двух различных коатомов совпадает с наибольшим элементом. Для любых двух элементов a и b частично упорядоченного множества P равносильны следующие условия: (1) $a \leqslant b$; (2) $a = \inf\{a, b\}$; (3) $b = \sup\{a, b\}$. Точную верхнюю [нижнюю] грань двух элементов часто называют их *объединением* [*пересечением*].

Примеры. 1) $\sup_{(\mathbf{N}, \leqslant)}\{4, 6\} = 6$, $\inf_{(\mathbf{N}, \leqslant)}\{4, 6\} = 4$; 2) $\sup_{(\mathbf{N}, |)}\{4, 6\} = 12$, $\inf_{(\mathbf{N}, |)}\{4, 6\} = 2$; 3) В частично упорядоченном множестве $\mathfrak{P}(M)$ точная верхняя грань совпадает с объединением, а точная нижняя грань — с пересечением, а в частично упорядоченном множестве функций (пример 4 на с. 37) имеем $\sup\{f, g\} = h$, где $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ для всех $x \in [0, 1]$.

Частично упорядоченное множество P называется *деревом*, если каждое его двуэлементное (а значит, и любое конечное) подмножество имеет точную нижнюю грань и для любого $a \in P$ нижний конус $a^{\triangledown}$ является цепью. Пример дерева см. на рис. I.5.

Рис. I.5

Если P — частично упорядоченное множество, A, $B \subseteq P$ и $A \subseteq B$, то $\sup_P A \leqslant \sup_P B$ и $\inf_P B \leqslant \inf_P A$ в случае, когда указанные точные грани существуют. Если $A \subseteq P$ и $A^{\vartriangle} \neq \varnothing$, то $\sup_P A = \inf_P (A^{\vartriangle})$, причем из существования одной из частей этого равенства вытекает существование другой. То же самое справедливо и для равенства $\inf_P A = \sup_P (A^{\triangledown})$, если $A^{\triangledown} \neq \varnothing$.

Обобщенная ассоциативность. Если $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — некоторое множество подмножеств частично упорядоченного множества P и $A = \bigcup\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$, то в случае существования точных граней $\sup_P A$ и $\sup_P A_\iota$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ имеет место равенство

$$\sup_P A = \sup_P \{\sup_P A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\},$$

а в предположении существования точных граней $\inf_P A$ и $\inf_P A_\iota$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ — равенство

$$\inf_P A = \inf_P \{\inf_P A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}.$$

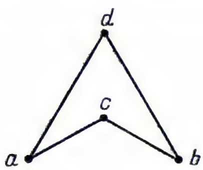
Отметим также неравенство

$$\sup_{\iota \in \mathfrak{J}} \{\inf_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \{x_{\iota\varkappa}\}\} \leqslant \inf_{\varkappa \in \mathfrak{K}} \{\sup_{\iota \in \mathfrak{J}} \{x_{\iota\varkappa}\}\},$$

справедливое в случае существования его обеих частей.

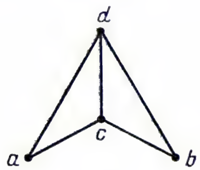
Если A и Q — подмножества частично упорядоченного множества P и $A \cap Q \neq \varnothing$, то в случае, когда существуют точные верхние грани $\sup_P (A \cap Q)$ и $\sup_Q (A \cap Q)$, то $\sup_P (A \cap Q) \leqslant \sup_Q (A \cap Q)$. Если же существует $\sup_P (A \cap Q) \in Q$, то $\sup_P (A \cap Q) = \sup_Q (A \cap Q)$. Аналогично в случае существования точных нижних граней $\inf_P (A \cap Q)$ и $\inf_Q (A \cap Q)$ имеем $\inf_Q (A \cap Q) \leqslant \inf_P (A \cap Q)$, а в случае существования $\inf_P (A \cap Q) \in Q$ получаем $\inf_P (A \cap Q) = \inf_Q (A \cap Q)$.

Заметим, что из существования $\sup_Q A$, где $A \subseteq Q \subseteq P$, вообще говоря, не вытекает существования $\sup_P A$. Например,



$P = \{a, b, c, d\}$,
$Q = \{a, b, c\}$,
$\sup_Q \{a, b\} = c$,
$\sup_P \{a, b\}$ не существует.

Более того, обе точные грани могут существовать, но не совпадать друг с другом. Например,



$P = \{a, b, c, d\}$,
$Q = \{a, b, d\}$,
$\sup_P \{a, b\} = c$,
$\sup_Q \{a, b\} = d$.

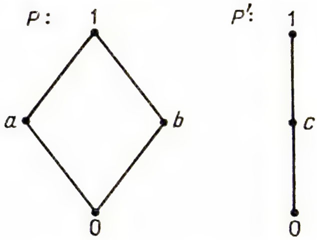
Если φ — изотонное отображение частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P' и A — подмножество множества P, то

$$\sup_{P'} \varphi(A) \leqslant \varphi(\sup_P A)$$

и

$$\varphi(\inf_P A) \leqslant \inf_{P'} \varphi(A)$$

при условии, что указанные точные грани существуют. Приведенные неравенства часто оказываются строгими. Например,



$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1,$$
$$\varphi(a) = \varphi(b) = c,$$
$$\varphi(\sup_P \{a, b\}) = \varphi(1) = $$
$$= 1 \neq c = \sup_{P'} \{c, c\} =$$
$$= \sup_{P'} \{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Однако если φ — изоморфизм, то

$$\varphi(\sup_P A) = \sup_{P'} \varphi(A) \quad \text{и} \quad \varphi(\inf_P A) = \inf_{P'} \varphi(A)$$

всякий раз, когда соответствующие точные грани существуют. С той же оговоркой для антиизоморфизма $\varphi\colon P \to P'$ имеет место

$$\varphi(\sup_P A) = \inf_{P'} \varphi(A) \quad \text{и} \quad \varphi(\inf_P A) = \sup_{P'} \varphi(A).$$

Пусть P — частично упорядоченное множество с нулем и $\Gamma(P)$ — множество его всех интервалов. Положим

$$\Gamma_0(P) = \{[a, b] \mid [a, b] \in \Gamma(P) \text{ и } [a, b] \text{ — артиново частично упорядоченное множество}\}$$

и

$$\Gamma_\alpha(P) = \Big\{[a, b] \mid [a, b] \in \Gamma(P) \text{ и если } a \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b, \text{ то существует такое } n, \text{ что для любого } i \geqslant n \text{ имеем } [b_{i+1}, b_i] \in \bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta(P)\Big\}.$$

Если $\Gamma(P) = \Gamma_\alpha(P)$ для некоторого трансфинита α, то говорят, что P *имеет размерность Крулля*. Наименьшее из таких α называется *размерностью Крулля частично упорядоченного множества* P и обозначается через $\text{K-dim}\, P$. Имеют место следующие утверждения: 1) $\text{K-dim}\, P \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $a_1 > a_2 > \ldots$,

что K-dim$[a_{n+1}, a_n] \leqslant \beta$ для всех достаточно больших n; 2) Если K-dim $P = \alpha$, то для любого $\beta < \alpha$ существует такая последовательность $a_1 > a_2 > \ldots$, что K-dim$[a_{n+1}, a_n] \geqslant \beta$ для каждого n; 3) Нётерово частично упорядоченное множество имеет размерность Крулля; 4) P не имеет размерности Крулля тогда и только тогда, когда оно не содержит цепи $\{2m - n \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ ([24], § 3.1).

2.2. Цепи. Частично упорядоченное множество P называется *цепью* или *линейно упорядоченным множеством* (а также total ordered set или simple ordered set), если любые два его элемента сравнимы, т. е. для любых $a, b \in P$ имеет место или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$. Другими словами, цепь — это непустое множество, на котором задан некоторый линейный порядок. Всякое подмножество цепи само является цепью. Всякий максимальный [минимальный] элемент цепи является наибольшим [наименьшим]. Цепь, состоящая из n элементов, изоморфна цепи $\{1, 2, \ldots, n\}$ с обычным порядком. Для каждой мощности $\mathfrak{c}$ существует такая цепь мощности $\mathfrak{c}$, что все цепи мощности $\mathfrak{c}$ содержатся в ней в качестве подцепей ([9], с. 333, теорема 1). Для установления изоморфности цепей полезен следующий факт: если цепь C' изоморфна начальному отрезку цепи C'', а цепь C'' — финальному отрезку цепи C', то цепи C' и C'' изоморфны ([25], с. 22, теорема 1.44).

Цепь C называется *плотной*, если для любых $a, b \in C$, где $a < b$, найдется такой элемент $x \in C$, что $a < x < b$. Другими словами, плотность цепи означает, что между любыми двумя ее различными элементами располагается отличный от них элемент или что она не содержит простых интервалов. Рассматриваются также $\mathfrak{m}$-плотные цепи, где любой неодноэлементный интервал имеет мощность $\mathfrak{m}$ (см. [20], [25]). Любая счетная плотная цепь, не имеющая ни наибольшего, ни наименьшего элемента, изоморфна цепи рациональных чисел с обычным порядком ([9], с. 222, теорема 2). Отсюда можно вывести, что каждая бесконечная плотная цепь содержит подцепь, изоморфную цепи рациональных чисел.

Говорят, что подмножество M цепи C *плотно в* C, если для любых $a, b \in C$, где $a < b$, найдется такой элемент $x \in M$, что $a < x < b$. Например, рациональ-

ные числа образуют плотное подмножество в цепи действительных чисел с обычным порядком. Про плотную цепь можно сказать, что она *плотна в себе.* Любые два плотных подмножества цепи C конфинальны и коинциальны одна другой.

Цепь, не содержащая бесконечных плотных подмножеств, называется *разреженной* (или *рассеянной*). В качестве примеров укажем множество целых чисел и множество $\{1/n \mid n = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ с обычным порядком. Каждая цепь C допускает представление $C = \sum \{C_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ в виде ординальной суммы, где C_ι — разреженные цепи, а цепь $\mathfrak{J}$ плотна ([9], с. 220, теорема 5). Любое множество разреженных цепей квазиупорядочено относительно вложимости, причем частично упорядоченное множество, соответствующее этому квазиупорядоченному множеству, вполне упорядочено [20], п. 8.4.4.

Всякая счетная цепь вложима в цепь $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с естественным порядком. Цепь, содержащая счетное плотное множество, вложима в цепь действительных чисел. Если цепь содержит подцепь $[0, \alpha)$ для каждого тансфинита α счетной мощности, то она содержит $\mathbf{Q}$ ([20], § 5.3).

Если цепь содержит счетное плотное подмножество, то любое бесконечное множество попарно не пересекающихся неодноэлементных интервалов этой цепи счетно. Гипотеза Суслина утверждает, что справедливо и обратное. Однако оказалось, что как эта гипотеза, так и ее отрицание совместимы с обычной аксиоматикой теории множеств ([3], § VIII. 12; [20], § 5.6).

Сечением цепи C называется ее разбиение на два подмножества A и B так, что $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Множества A и B называются *нижним* и *верхним классом сечения* соответственно. Различаются следующие типы сечения: *скачок* — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе — наименьший, *дедекиндово сечение* — в нижнем [верхнем] классе имеется наибольший [наименьший] элемент, но в верхнем [нижнем] классе наименьшего [наибольшего] элемента нет, *щель* — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего. Цепь называется *непрерывной*, если все ее сечения дедекиндовы. Отсюда вытекает, что для лю-

бого непустого подмножества непрерывной цепи существует как точная верхняя, так и точная нижняя грани. Если непрерывная цепь, не содержащая ни наибольшего, ни наименьшего элемента, содержит счетное плотное подмножество, то она изоморфна цепи действительных чисел с обычным порядком ([25], с. 37, теорема 2.30). Каждая цепь вкладывается в непрерывную цепь с сохранением всех существующих в ней точных граней ([9], с. 218, следствие 3; ср. п. 2.3).

Если φ — изотонное наложение цепи C на цепь X, то C представляется в виде ординальной суммы

$$C = \sum \{\varphi^{-1}(x) \mid x \in X\},$$

где

$$\varphi^{-1}(x) = \{z \mid z \in C,\ \varphi(z) = x\}.$$

Выбрав в каждом интервале $\varphi^{-1}(x)$ по одному элементу, мы получим подцепь X' цепи C, изоморфную цепи X. При этом изоморфизм цепи X' на X осуществляет ограничение отображения φ на X'. Приведенное выше разбиение является ядром отображения φ. При исследовании строения цепей важную роль играют изотонные отображения, смежные классы ядер которых определяются следующим образом:

$$c_F(a) = \{y \mid y \in C,\ [a, y]_C \text{ — конечное множество}\},$$

$$c_W(a) = \{y \mid y \in C,\ [a, y]_C \text{ — вполне упорядоченное множество}\},$$

$$c_S(a) = \{y \mid y \in C,\ [a, y]_C \text{ — разреженное множество}\}.$$

Цепь C называется *k-транзитивной*, если для любых ее подмножеств $\{a_1, \ldots, a_r\}$ и $\{b_1, \ldots, b_r\}$, где $r \leqslant k$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_r$, существует такой автоморфизм φ цепи C, что $\varphi(a_i) = b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, r$. Описание строения 1-транзитивных цепей можно найти в ([25], с. 123, следствие 8.6). Всякая 2-транзитивная цепь оказывается плотной и k-транзитивной для любого k, а список конечных и счетных 2-транзитивных цепей исчерпывается одноэлементной цепью и цепью рациональных чисел с обычным порядком ([25], с. 31, следствие 2.13, предложение 2.14). Ясно, что 1-транзитивная, а значит, и k-транзитивная цепь не может иметь ни наибольшего, ни наименьшего элемента. В связи с этим

естественно определение: цепь C *интервально однородна*, если она изоморфна любому из своих неодноэлементных интервалов. Полными интервально однородными цепями являются одноэлементная и двуэлементная цепи, а также отрезок $[0, 1]$ действительных чисел с обычным порядком. Мощность любой интервально однородной цепи не превосходит мощности континуума (Скорняков Л. А.//Алгебра.— М.: Изд-во МГУ, 1989.— С. 142—183).

Если в цепи C объявить открытыми множествами саму цепь C, а также все ее открытые, начальные и финальные интервалы, то C становится нормальным хаусдорфовым топологическим пространством. Это топологическое пространство компактно в том и только том случае, когда цепь C *полна* (т. е. $\inf_C A$ и $\sup_C A$ существуют для любого подмножества $A \subseteq C$). Топологическое пространство C связно тогда и только тогда, когда цепь C плотна в себе и *условно полна* (т. е. $\inf_C A$ и $\sup_C A$ существуют для каждого ограниченного подмножества $A \subseteq C$ (см. [3], §§ X. 7, X. 8).

Цепь, в которой каждое непустое подмножество содержит наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным множеством* (well ordered). Элементы вполне упорядоченного множества называют *трансфинитами*, а также *трансфинитными числами*, *порядковыми числами*, *ординальными числами* и *ординалами*.

Вполне упорядоченным множеством является всякая конечная цепь. Естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел также вполне упорядочено. Множество всех целых чисел не является вполне упорядоченным относительно естественного порядка, так как оно не имеет наименьшего элемента. Однако оно становится вполне упорядоченным, если установить порядок следующим образом:

$$1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < -3 < \ldots$$

Другим примером не вполне упорядоченной цепи служит отрезок действительных чисел $[0, 1]$.

Отметим простейшие свойства вполне упорядоченных множеств: 1) вполне упорядоченное множество не может быть изоморфно своему начальному отрезку; 2) если цепь C и цепь, двойственная ей, вполне упорядочены, то C конечно; 3) всякая цепь содержит конфинальное вполне упорядоченное множество.

Из определения вполне упорядоченного множества вытекает, что оно всегда содержит наименьший элемент 0. Последующие элементы естественно обозначать через 1, 2, ... и т. д. Если α — некоторый трансфинит, то нижний конус α^{∇}, из которого удален элемент α, называется *начальным отрезком* и обозначается через $[0, \alpha)$. Символ $[0, 0)$ понимается как пустое множество. Если $\alpha \neq 0$ и начальный отрезок $[0, \alpha)$ не содержит наибольшего элемента, то трансфинит α называется *предельным*. Примером предельного трансфинита может служить число 0 в рассмотренном выше вполне упорядоченном множестве целых чисел. Для всякого трансфинита α среди трансфинитов верхнего конуса α^{Δ}, отличных от α, существует наименьший, который будем обозначать через $\alpha + 1$. Если α — предельный трансфинит, то

$$[0, \alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} [0, \beta).$$

Всякий трансфинит α представим в форме $\alpha = \alpha_0 + k$, где α_0 — предельный трансфинит или 0, а k — неотрицательное целое число. Если Q — вполне упорядоченное множество и $\Xi \subseteq Q$, то или $\bigcup_{\xi \in \Xi} [0, \xi) = Q$, или $\bigcup_{\xi \in \Xi} [0, \xi) = [0, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in Q$.

Решающим фактом, обеспечивающим возможность сравнивать множества, является *теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств*: для двух вполне упорядоченных множеств P и P' осуществляется одна и только одна из следующих возможностей:

1) P изоморфно P';
2) P изоморфно начальному отрезку множества P';
3) P' изоморфно начальному отрезку множества P.

Если α — некоторый трансфинит, то *трансфинитной последовательностью типа* α или α — *последовательностью* называется отображение φ начального отрезка $[0, \alpha)$ в какое-либо множество A. Если множество A состоит из трансфинитов (нельзя сказать подмножество множества трансфинитов, ибо совокупность всех трансфинитов множеством не является!), и из $\beta < \gamma < \alpha$ следует, что $\varphi(\beta) < \varphi(\gamma)$, то трансфинитная последовательность называется *возрастающей*. Если φ — возрастающая α — последовательность,

где α — предельный трансфинит, то наименьший из трансфинитов ξ, удовлетворяющих условию: $\varphi(\gamma) < \xi$ для всех $\gamma < \alpha$, называется *пределом последовательности* φ и обозначается как $\lim\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(\gamma)$. Говорят, что трансфинит λ *конфинален* предельному трансфиниту α, если λ является пределом некоторой возрастающей α — последовательности. Трансфинит, конфинальный предельному, сам является предельным. Трансфинит λ конфинален предельному трансфиниту α тогда и только тогда, когда начальный отрезок $[0, \lambda)$ содержит конфинальное подмножество, изоморфное начальному отрезку $[0, \alpha)$.

Если φ и ψ — возрастающие трансфинитные последовательности, λ — предельный трансфинит и $\delta = \lim\limits_{\gamma<\lambda} \psi(\gamma)$, то $\lim\limits_{\xi<\delta} \varphi(\xi) = \lim\limits_{\gamma<\lambda} \varphi(\psi(\gamma))$. Отсюда вытекает, что если предельный трансфинит α конфинален предельному трансфиниту β, а β конфинален предельному трансфиниту γ, то α конфинален γ. Трансфинитная последовательность типа α называется *непрерывной*, если $\varphi(\beta) = \lim\limits_{\xi<\beta} \varphi(\xi)$ для каждого предельного трансфинита $\beta < \alpha$. Трансфинит δ, для которого $\varphi(\delta) = \delta$, называется *критическим трансфинитом* последовательности φ.

Трансфинит называется *регулярным*, если он не конфинален никакому меньшему трансфиниту и *сингулярным* в противном случае.

Во многих случаях трансфинит α удобно рассматривать как вполне упорядоченное множество $[0, \alpha)$. В частности, эта точка зрения позволяет говорить о *мощности трансфинита* α. Наименьший среди трансфинитов данной бесконечной мощности называется *начальным*. Начальный трансфинит счетной мощности как правило обозначается через ω или ω_0. Как цепь он изоморфен цепи натуральных чисел с естественным порядком. Множество всех начальных трансфинитов мощности, меньшей данной, скажем $\mathfrak{m}$, вполне упорядочено и потому может отождествляться с некоторым трансфинитом α. Начальный трансфинит мощности $\mathfrak{m}$ обозначается через ω_α. Трансфинит α называется *индексом начального трансфинита мощности* $\mathfrak{m}$. Различным начальным трансфинитам соответствуют различные индексы. Каждый трансфинит является

индексом некоторого начального трансфинита. В частности, ω_1 — это первый несчетный трансфинит. Всякая несчетная разреженная цепь содержит подцепь, изоморфную ω_1 или $\omega_1^{\#}$ (см. [25], с. 87, теорема 5.28). Трансфиниты $\omega_{\alpha+1}$ регулярны при любом α (см. [9], с. 307, теорема 1). Каждый предельный трансфинит α конфинален некоторому начальному трансфиниту. Этот трансфинит оказывается наименьшим среди трансфинтов, конфинальных α. В частности, счетные трансфиниты и только они конфинальны ω.

Начальный трансфинит ω_α называется *слабо недостижимым*, если он регулярен, а α — предельный трансфинит. Например, $\omega = \omega_0$ слабо недостижим, а ω_ω, будучи сингулярным, слабо недостижимым не является. Если $\alpha > 0$, то ω_α слабо недостижим тогда и только тогда, когда $\alpha = \omega_\alpha = cf(\alpha)$, где $cf(\alpha)$ — наименьший среди таких трансфинитов ξ, что α конфинален ω_ξ.

Поскольку ординальная сумма и ординальное произведение вполне упорядоченных множеств вполне упорядочены, то сумму $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ трансфинитов α и β можно определить условиями

$$[0, \alpha) + [0, \beta) = [0, \alpha + \beta)$$

и

$$[0, \alpha) \cdot [0, \beta) = [0, \alpha\beta)$$

соответственно, где $+$ означает ординальную сумму, $\cdot$ — ординальное произведение, а равенство — изоморфизм цепей. Корректность определения вытекает из теоремы о сравнении вполне упорядоченных множеств. Используя трансфинитную индукцию, можно определить степени трансфинита α, положив $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\xi+1} = \alpha^\xi \cdot \alpha$ и $\alpha^\xi = \lim\limits_{\eta<\xi} \alpha^\eta$, если ξ — предельный трансфинит. Пусть, далее, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = \omega^\omega$, $\alpha_3 = (\omega^\omega)^\omega$ и т. д. Предел этой последовательности $\lim\limits_{n<\omega} \alpha_n$ является наименьшим среди трансфинитов ξ, удовлетворяющих соотношению $\omega^\xi = \xi$. Трансфиниты ε, для которых выполняется равенство $\omega^\varepsilon = \varepsilon$, называются *эпсилонговыми* или *ε-ординалами*.

Операции над трансфинитами обладают следующими свойствами:

1) Если $\beta < \gamma$, то $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

2) Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$.

3) Если $\alpha \leqslant \beta$, то существует один и только один трансфинит γ такой, что $\beta = \alpha + \gamma$ (этот трансфинит обозначается как $\beta - \alpha$).

4) Если $\gamma \leqslant \alpha < \beta$, то $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$.

5) Если $\gamma < \beta \leqslant \alpha$, то $\alpha - \beta \leqslant \alpha - \gamma$.

6) Если $\beta < \gamma$ и $\alpha \neq 0$, то $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

7) Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.

8) Если $\gamma \leqslant \beta$, то $\alpha(\beta - \gamma) \leqslant \alpha\beta - \alpha\gamma$.

9) Если $\beta \neq 0$, то для любого α найдутся такие γ и ρ, что $\alpha = \beta\gamma + \rho$ и $\rho < \beta$.

10) Эквивалентны следующие свойства трансфинита $\alpha \neq 0$: (1) α *аддитивно неразложим* (т. е. не представим в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma < \alpha$); (2) $\xi + \alpha = \alpha$ для каждого $\xi < \alpha$; (3) $\alpha = \omega^{\xi}$ для некоторого ξ (см. [9], с. 261, теорема 7; [23], с. 457, теорема 7; с. 462, теорема 3).

11) Начальные трансфиниты аддитивно неразложимы (см. [9], с. 282, теорема 9).

12) Трансфинит α *мультипликативно неразложим* (т. е. не представим в виде $\alpha = \beta\gamma$, где $\beta, \gamma < \alpha$) в том и только том случае, когда или α — простое натуральное число, или $\alpha = \omega^{(\omega^{\rho})}$ для некоторого трансфинита ρ, или $\alpha = \omega^{\rho} + 1$ для некоторого трансфинита ρ (см. [23], с. 467, теорема 8).

13) Если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 1$, то $\gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$.

14) Если $\beta < \gamma$, то $\alpha^{\beta} \leqslant \alpha^{\gamma}$.

15) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.

16) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

Возведение в степень можно использовать для представления трансфинитов в виде, напоминающем представление натуральных чисел в десятичной системе: именно, если $\gamma > 1$ и $1 \leqslant \alpha < \gamma^{\delta}$, то существуют натуральное число n и последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ такие, что

$$0 \leqslant \beta_i < \gamma, \qquad \delta_n < \ldots < \delta_2 < \delta_1$$

и

$$\alpha = \gamma^{\delta_1}\beta_1 + \gamma^{\delta_2}\beta_2 + \ldots + \gamma^{\delta_n}\beta_n.$$

Различные аспекты теории цепей отражены в [3], [9], [20] и [25].

2.3. Полные решетки (структуры). Частично упорядоченное множество называется *полной решеткой* или *полной структурой*, если всякое его подмножество (в том числе пустое) имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Впрочем, приведенное определение оказывается избыточным, так как справедлива теорема: если всякое подмножество частично упорядоченного множества P (включая пустое) имеет точную нижнюю [верхнюю] грань, то P — полная решетка.

Полными решетками являются отрезок $[0, 1]$ с обычным порядком, множество всех подмножеств некоторого множества, упорядоченное по включению, всякая конечная цепь. Из сформулированной выше теоремы вытекает, что полными решетками оказываются множество всех подгрупп данной группы, множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства, всякое вполне упорядоченное множество с наибольшим элементом и др.

Если $\varphi\colon L \to L'$ — изоморфизм частично упорядоченных множеств, являющихся полными решетками, то для любого $A \subseteq L$ имеет место

$$\varphi(\sup_L A) = \sup_{L'} \varphi(A) \quad \text{и} \quad \varphi(\inf_L A) = \inf_{L'} \varphi(A).$$

Любой интервал $[a, b]_L$ полной решетки L является полной решеткой, причем

$$\sup_{[a,\, b]} A = \sup_P A \quad \text{и} \quad \inf_{[a,\, b]} A = \inf_P A$$

для любого непустого подмножества $A \subseteq [a, b]_P$. Каждое изотонное отображение φ полной решетки L в себя обладает неподвижной точкой, т. е. существует такая точка $a \in L$, что $\varphi(a) = a$. Если же каждое изотонное отображение частично упорядоченного множества P в себя обладает неподвижной точкой, то всякая максимальная цепь из P является полной решеткой.

Прямое произведение полных решеток является полной решеткой. Упорядоченная сумма [упорядоченное произведение] полных решеток оказывается полной решеткой, если множество индексов является полной решеткой [и удовлетворяет условию минимальности].

Изотонное отображение φ частично упорядоченного множества P в себя называется *оператором замыкания*, если $x \leqslant \varphi(x)$ и $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

Примеры: 1) P — полная решетка всех подпространств топологического пространства, $\varphi(X)$ — замыкание подпространства X; 2) P — полная решетка всех непустых подмножеств линейного пространства над некоторым полем, $\varphi(X)$ — линейная оболочка множества X; 3) P — частично упорядоченное множество с наибольшим элементом 1, $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in P$.

Если φ — оператор замыкания на частично упорядоченном множестве P и $x \in P$, то $\varphi(x)$ называется φ-*замыканием* элемента x, а элемент x, для которого $\varphi(x) = x$, называется φ-*замкнутым*.

В приведенных выше примерах φ-замкнутыми элементами оказываются замкнутые подпространства, линейные подпространства и 1 соответственно.

Если φ — оператор замыкания на полной решетке P, то частично упорядоченное множество L всех φ-замкнутых элементов из P, рассматриваемое как подмножество частично упорядоченного множества P, также является полной решеткой. При этом наибольший элемент полной решетки P принадлежит L и для всякого непустого подмножества A множества L имеет место

$$\inf_L A = \inf_P A \quad \text{и} \quad \sup_L A = \varphi(\sup_P A).$$

Кроме того, для всякого $x \in P$ справедливо

$$\varphi(x) = \inf_P \{u \mid u \in P,\ x \leqslant u = \varphi(u)\}.$$

Отсюда вытекает, что для равенства операторов замыкания φ и ψ на полной решетке P необходимо и достаточно, чтобы множества φ- и ψ-замкнутых элементов совпадали. Подмножество L полной решетки P совпадает с множеством всех φ-замкнутых элементов для некоторого оператора замыкания φ на P в том и только том случае, когда L содержит наибольший элемент полной решетки P и $\inf_P A \in L$ для любого подмножества $A \subseteq L$.

Пусть теперь M — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, P — полная решетка всех подмножеств множества M, содержащих 0, и

$$L = \{X \mid X \in P,\ X^{\Delta\nabla} = X\}.$$

Для каждого $x \in M$ положим

$$\theta(x) = x^{\Delta\nabla}$$

(здесь и дальше не различаются x и $\{x\}$). Тогда L — полная решетка, а θ — изоморфизм частично упорядоченного множества M на подмножество полной решетки L. При этом справедливы следующие утверждения: 1) если $\varnothing \neq A \subseteq M$ и $\inf_M A$ существует, то $\theta(\inf_M A) = \inf_L \theta(A)$; 2) если $\varnothing \neq A \subseteq M$ и $\sup_M A$ существует, то $\theta(\sup_M A) = \sup_L \theta(A)$; 3) если $X \in L$, то найдутся такие подмножества A и B множества M, что $X = \sup_L \theta(A) = \inf_L \theta(B)$. Таким образом, любое частично упорядоченное множество вкладывается в полную решетку. Описанная конструкция называется *пополнением сечениями* (а также *пополнением Макнейла*). Она является далеко идущим обобщением известного пополнения цепи рациональных чисел сечениями и является в некотором смысле наиболее экономной. Именно, если M, L и θ имеют тот же смысл, что и выше, а φ — изоморфизм частично упорядоченного множества M на подмножество некоторой полной решетки V, то существует такой изоморфизм ψ частично упорядоченного множества L на подмножество полной решетки V, что $\psi(\theta(x)) = \varphi(x)$ для всех $x \in M$. Если M, L и θ имеют тот же смысл, а V — полная решетка, содержащая M в качестве частично упорядоченного подмножества, то для существования изоморфизма ψ полной решетки V на полную решетку L такого, что $\psi(\varphi(x)) = x$ для всех $x \in M$, необходимо и достаточно, чтобы V обладала следующими свойствами: (i) если $0 \neq v \in V$, то найдется такое непустое подмножество $A \subseteq M$, что $v = \sup_V A$; (ii) если $1 \neq v \in V$, то найдется такое непустое подмножество $B \subseteq M$, что $v = \inf_V B$ ([11], § 3).

Пополнение сечениями цепи является цепью. Пополнение сечениями прямого произведения двух частично упорядоченных множеств, каждое из которых обладает наименьшим и наибольшим элементами, изоморфно прямому произведению пополнений сечениями сомножителей. Требование существования наибольших и наименьших элементов существенно.

Конкретным представлением полной решетки называется ее изоморфизм на полную решетку всех φ-замкнутых подмножеств полной решетки $\mathfrak{P}(M)$ всех подмножеств некоторого множества M. Оператор замыкания φ на полной решетке P называется

алгебраическим, если для любой цепи $C \subseteq P$ имеет место $\varphi(\bigcup\{X \mid X \in C\}) = \bigcup\{\varphi(X) \mid X \in C\}$. Элемент c из полной решетки L называется *компактным*, если $c = \sup_L A$, где $A \subseteq L$, влечет за собой $c = \sup_L F$ для некоторого конечного подмножества $F \subseteq A$. Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент равен точной верхней грани некоторого множества компактных элементов. Алгебраические решетки и только они обладают конкретными представлениями с алгебраическим оператором замыкания.

Алгебраическим оказывается второй из приведенных выше операторов замыкания. Решетка всех подпространств линейного пространства является алгебраической. Ее компактными элементами служат конечномерные подпространства. Алгебраической решеткой оказывается также цепь $(\mathbf{N}, \leqslant)$, дополненная наибольшим элементом.

Подробнее см. [11], § 3. См. также п. V. 5.1.

Поскольку пересечение любого множества эквивалентностей на фиксированном множестве M является эквивалентностью и существует наибольшая эквивалентность $\nabla_M = M \times M$, то совокупность всех эквивалентностей на M оказывается полной решеткой, которую будем обозначать через $\operatorname{Eq} M$. Если $\Xi \subseteq \operatorname{Eq} M$, то $\sup_{\operatorname{Eq} M} \Xi = \{(a, b) \mid a, b \in M$ и существуют элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M$ и эквивалентности $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1} \in \Xi$ такие, что $a = x_0$, $(x_i, x_{i+1}) \in \theta_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $x_n = b\}$. Эквивалентность $\sup_{\operatorname{Eq} M} \Xi$ является транзитивным замыканием множества Ξ и совпадает с объединением всевозможных конечных произведений эквивалентностей из Ξ. Если $\Xi = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ конечно и $\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i$ при любых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, то $\sup_{\operatorname{Eq} M} \Xi = \theta_1 \ldots \theta_m$.

Связи теории частично упорядоченных множеств с различными областями математики рассмотрены в [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.
2. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
5. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
6. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.

7. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
8. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969.
9. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.— М.: Мир, 1970.
10. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
11. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982.
12. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.
13. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. — М.: Мир, 1966.
14. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.; Л.: ОНТИ, 1937.
15. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971.
16. Blyth T. S., Janowitz M. F. Residuation theory. — Oxford; London: Pergamon Press, 1972.
17. Bryant V., Perfect H. Independence theory in combinatories. An introductiory account with applications to graphs and transversales. — London: Chapmen and Hall, 1980.
18. Budach L., Graw B., Meinel Ch., Waack S. Algebraic and topological properties of posets. — Leipzig: Teubner, 1988.
19. Droste M. Structure of partially ordered sets with transitive automorphism groups//Memoirs Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 57, N 334. — 100 p.
20. Fraissé R. Theory of relations. — Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1986.
21. Jacobson N. Basic algebra. II. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1980.
22. Kertész A. Vorlesungen über Artinsche Ringe. — Budapest: Akad. Kiadó, 1968.
23. Klaua D. Allgemeine Mengenlehre. — Berlin: Akademie Verlag, 1964.
24. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. Graded and filtered rings and modules. Lect. Notes Math., 1979, N758, 148 p.
25. Rosenstein J. G. Linear orderings. — New York: Academic Press, 1982.

ГЛАВА II

ГРУППЫ

В настоящей главе изложены вопросы, относящиеся к общей теории групп, а также к теориям упорядоченных и топологических групп. Конечные группы, группы Ли, линейные и алгебраические группы, а также теория представлений групп здесь не рассматриваются. Результаты, специфические для абелевых групп и групповых колец, можно найти в гл. III. Систематическое изложение основ теории групп можно найти в монографиях [17], [28], [65], [109].

Сведения о новейших результатах теории групп можно почерпнуть из обзоров ВИНИТИ (см. [3], [6], [29], [42], [44], [47], [55]).

§ 1. Основные понятия теории групп

1.1. Определения и основные свойства. *Бинарной операцией* на множестве $M \neq \varnothing$ называется отображение α: $M \times M \to M$. Операция сопоставляет упорядоченной паре (m_1, m_2) элементов множества M элемент $m_3 = \alpha(m_1, m_2)$ того же множества. Обычно бинарную операцию обозначают каким-либо знаком, например, $\circ$, используя при этом запись $m_3 = m_1 \circ m_2$.

Если операция $\circ$ *ассоциативна*, т. е.

$$(m_1 \circ m_2) \circ m_3 = m_1 \circ (m_2 \circ m_3) \quad \text{для всех} \quad m_i \in M, \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

то пара $(M, \circ)$ называется *полугруппой*. В полугруппе нет необходимости указывать порядок выполнения операции, т. е. можно писать $m_1 \circ m_2 \circ \ldots \circ m_n$, мысленно расставляя скобки произвольным образом.

Полугруппа $(G, \circ)$ называется *группой*, если выполнены следующие условия:

существует *нейтральный элемент* $e \in G$, для которого $g \circ e = e \circ g = g$ при всех $g \in G$;

любой элемент $g \in G$ имеет *обратный*, т. е. такой элемент $g^{-1} \in G$, что $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Заметим, что каждая группа содержит в точности один нейтральный элемент и для каждого элемента группы существует точно один обратный.

Иногда удобно считать, что наряду с бинарной операцией в группе определены нульарная операция, отмечающая нейтральный элемент, и унарная операция взятия обратного $^{-1}$: $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$. Справедливы формулы:

$$(g^{-1})^{-1} = g, \quad (g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_n)^{-1} = g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_1^{-1}.$$

Естественно определяются целые степени элементов с очевидными свойствами:

$$g^n \underset{\text{def}}{=} g \circ g \circ \ldots \circ g \quad (n \text{ раз}),$$

$$g^{-n} \underset{\text{def}}{=} g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1} \quad (n \text{ раз}), \quad n \in \mathbf{N};$$

$$g^0 \underset{\text{def}}{=} e; \quad g^n \circ g^m = g^{n+m}, \quad (g^n)^m = g^{nm}, \quad n, m \in \mathbf{Z}.$$

Переставлять множители местами в группах, вообще говоря, нельзя. Элементы g и f группы G называются *перестановочными* или *коммутирующими*, если $g \circ f = f \circ g$. Если любые два элемента группы G коммутируют, то группа G называется *коммутативной* или *абелевой*.

Операция в группе часто обозначается символом $+$ [символом $\cdot$] и называется *сложением* [*умножением*]. При этом группа называется *аддитивной* [*мультипликативной*], ее нейтральный элемент называется *нулем* [*единицей*] и обозначается символом 0 [символом 1]. В аддитивной группе элемент, обратный к элементу a, называют *противоположным* и обозначают $-a$; вместо a^n, $n \in \mathbf{Z}$, пишут na. В мультипликативной группе вместо $f \cdot g$ часто пишут fg.

Примеры аддитивных групп: 1) $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, +)$ — *аддитивные группы кольца* $\mathbf{Z}$ и *полей* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ соответственно. Пишут просто: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. 2) Произвольное кольцо K по сложению — абелева группа. В частности, кольцо многочленов $P[x_1, x_2, \ldots]$ и кольцо $M(n, P)$ квадратных матриц порядка n над полем P — абелевы группы. 3) Векторное пространство $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, равно как и произвольное линейное пространство V над полем P относительно сложения — абелевы

группы. В частности, линейные пространства всех функций $F_{[a,\ b]}$ и всех непрерывных функций $C_{[a,\ b]}$, заданных на интервале $[a, b]$,— по сложению абелевы группы.

Примеры мультипликативных групп. 1) $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$ — *мультипликативные группы полей* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ соответственно, т. е. множества их ненулевых элементов относительно умножения. В общем случае $P^* \underset{\text{def}}{=} (P\setminus\{0\},\ \cdot)$ — *мультипликативная группа поля* P. 2) K^* — *мультипликативная группа* (ассоциативного) *кольца* K *с единицей*, т. е. множество его обратимых элементов относительно умножения. Например, $\mathbf{Z}^*=\{\pm 1\}$, $P[x_1, x_2, \ldots]^* = P^*$, $M(n, P)^* = GL(n, P)$ (P — поле).

В дальнейшем мы, как правило, говорим о мультипликативных группах. Речь идет, естественно, только о форме записи, не умаляющей общности рассуждений. Почти всюду группа обозначается одной буквой без указания операции.

Множество всех элементов группы G называется основным множеством группы и обычно обозначается той же буквой G. В зависимости от того, конечно или нет основное множество, группа G называется *конечной* или *бесконечной*. Число элементов $n=|G|$ конечной группы G называется ее *порядком*. Группа порядка один $E=\{e\}$ называется *единичной* или *тривиальной*. Говорят, что бесконечная группа имеет бесконечный порядок. Ей можно сопоставить кардинальное число $\varkappa=|G|$ — мощность основного множества группы G.

Пусть множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ конечной группы, содержится в множестве простых чисел π. Тогда группа G называется (конечной) *π-группой*. В частном случае $\pi=\{p\}$ группа G называется конечной *p-группой*.

В любой группе G разрешимы уравнения $xa=b$, $cy=d$, решения которых единственны: $x=ba^{-1}$, $y=c^{-1}d$.

Пусть M, N — подмножества (основного множества) группы G. Полагаем $M^{-1} \underset{\text{def}}{=} \{m^{-1} \mid m \in M\}$, $MN \underset{\text{def}}{=} \{mn \mid m\in M,\ n \in N\} \subseteq G$.

Подгруппой H группы G называется ее подмножество, само являющееся группой относительно индуцированной операции умножения в G. Подмножество $H \subseteq G$ является подгруппой в том и только том случае, если $e \in H$ и H замкнуто относительно умножения и взятия обратного, т. е. $HH\subseteq H$, $H^{-1}\subseteq H$ (легко

видеть, что на самом деле это равенства). Примем для подгруппы обозначение $H \leqslant G$. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *собственной*, если $H \neq G$, что записываем как $H < G$.

Пересечение любой совокупности подгрупп данной группы — снова подгруппа. Объединение двух подгрупп будет подгруппой в том и только том случае, если одна из них содержит другую. Объединение возрастающей (возможно, трансфинитной) цепи подгрупп $H_1 \leqslant H_2 \leqslant \ldots \leqslant H_\alpha \leqslant \ldots$ — снова подгруппа.

Пусть $M \subseteq G$ — некоторое подмножество группы. Про множество $Mg \underset{\text{def}}{=} \{mg \mid m \in M\} \subseteq G$ говорят, что оно получается *правым сдвигом* M на элемент $g \in G$. Аналогично, $gM \underset{\text{def}}{=} \{gm \mid m \in M\}$ — множество, получаемое *левым сдвигом* M на $g \in G$. Если $H \leqslant G$ — подгруппа, то Hg — правый, а gH — левый *смежные классы* группы G по подгруппе H. Элемент g называется *представителем* как Hg, так и gH. Ясно, что $g = eg = ge \in Hg \cap gH$. Равенства $Hg_1 = Hg_2$, $f_1H = f_2H$ выполнены в тех и только тех случаях, когда, соответственно, $g_2 = h_1g_1, f_2 = f_1h_2$ для некоторых элементов h_1, $h_2 \in H$. Любой элемент, входящий в смежный класс, может быть выбран его представителем. Разносторонние смежные классы Hg, fH могут пересекаться собственным образом. Односторонние смежные классы Hg_1, Hg_2 (или f_1H, f_2H) либо совпадают, либо не пересекаются. Подгруппа H является как левым, так и правым смежным классом (с представителем e). Других подгрупп среди смежных классов по H нет. Все смежные классы имеют одинаковую мощность, равную $|H|$. Группа G разбивается в объединение непересекающихся односторонних смежных классов одинаковой мощности. Мощность $|G:H|$ множества различных односторонних смежных классов не зависит от выбора стороны и называется *индексом подгруппы H в группе G*.

Конечные индексы обладают следующим свойством мультипликативности: если $K \leqslant H \leqslant G$, то $|G:H|\,|H:K| = |G:K|$. В частности, справедлива *теорема Лагранжа*: пусть H — подгруппа конечной группы G, тогда имеет место формула

$$|G| = |H|\,|G:H|.$$

Как следствие теоремы Лагранжа получаем: порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы; подгруппа (конечной) π-группы сама будет (конечной) π-группой.

Теорема Лагранжа, вообще говоря, не допускает обращения. Если число m делит порядок $|G|$, это еще не значит, что существует подгруппа $H \leqslant G$ порядка m. Впрочем, если $m = p^l$ — степень простого числа, то такое обращение имеет место (см. теорему Силова).

Пусть H_1, H_2 — подгруппы группы G. *Двойным смежным классом* группы G по упорядоченной паре подгрупп (H_1, H_2) с представителем $g \in G$ называется множество элементов $H_1gH_2 = \{h_1gh_2 \mid h_i \in H_i, \ i = 1, 2\}$. Двойные смежные классы по фиксированной паре подгрупп (H_1, H_2) либо совпадают, либо не пересекаются. Их число (мощность) обозначим $|G : (H_1, H_2)|$.

Пусть G — группа, $g, h \in G$. Элемент $g^h \underset{\text{def}}{=} hgh^{-1}$ называется *сопряженным* к элементу g с помощью элемента h.

Скажем, что *элемент* $g_1 \in G$ *сопряжен с элементом* $g_2 \in G$ в группе G, если найдется элемент $h \in G$, для которого $g_1^h = g_2$. Тогда и элемент g_2 сопряжен с элементом g_1 в силу равенства $g_1 = g_2^{h^{-1}}$. Сопряженность — отношение эквивалентности на множестве элементов группы G. Все элементы разбиваются на непересекающиеся классы эквивалентности $[g]$, которые называются *классами сопряженности*. Среди них обязательно есть хотя бы один одноэлементный класс $[e]$. Группа G тогда и только тогда абелева, когда все ее классы сопряженности одноэлементные.

Пусть $M \subseteq G$ — подмножество группы. Полагаем $M^g \underset{\text{def}}{=} \{m^g \mid m \in M\}$ и называем M^g *подмножеством, сопряженным* с M посредством элемента $g \in G$. Аналогично предыдущему множество всех подмножеств группы G разбивается на непересекающиеся классы сопряженности $[M]$.

Элемент $g \in G$ *централизует* элемент $h \in G$, если $h^g = h$ или, что то же самое, $gh = hg$. *Централизатор* $C_G(M)$ подмножества $M \subseteq G$ определяется как множество всех элементов $g \in G$, централизующих каждый из элементов $m \in M$. Заметим, что $C_G(M)$ — подгруппа в G. Если $M = \{h\}$, то $C_G(h)$ называется

централизатором элемента $h \in G$. Если $M = G$, то подгруппа $C(G) \underset{\text{def}}{=} C_G(G)$ называется *центром* группы G. Центр $C(G)$ состоит из тех и только тех элементов, которые перестановочны с любым из элементов группы G.

Говорят, что элемент $g \in G$ *нормализует* подмножество $M \subseteq G$, если $M^g = M$. Это значит, что при любом $m \in M$ имеем $m^g \in M$ и, кроме того, для каждого $m_1 \in M$ существует $m_2 \in M$ такой, что $m_2^g = m_1$. *Нормализатор* $N_G(M)$ определяется как множество всех элементов $g \in G$, нормализующих M. В любом случае $N_G(M)$ — подгруппа в G. Если $H \leqslant G$, то $H \leqslant N_G(H)$. Ясно также, что $C_G(M) \leqslant N_G(M)$.

Для элемента $g \in G$ имеем $C_G(g) = N_G(g)$. Индекс $|G : N_G(g)|$ совпадает с мощностью класса $[g]$ сопряженных с g элементов группы G. Аналогично, индекс $|G : N_G(M)|$ совпадает с мощностью множества $[M]$ всех сопряженных с M подмножеств группы G.

Отображение φ: $G \to H$ группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

Из определения следует, что $\varphi(e) = e$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. Итак, φ — гомоморфизм в том и только том случае, если φ перестановочно с групповыми операциями. Композиция гомоморфизмов φ: $G \to H$, ψ: $H \to K$ — также гомоморфизм $\varphi\psi$: $G \to K$. Образ подгруппы $A \leqslant G$ при гомоморфизме φ: $G \to H$ — подгруппа $\varphi(A) \leqslant H$. Полный прообраз подгруппы $B \leqslant H$ — подгруппа $\varphi^{-1}(B) \leqslant G$.

Взаимно однозначный гомоморфизм φ: $G \to H$ называется *изоморфизмом*. Для изоморфизма φ существует обратное отображение φ^{-1}: $H \to G$, также являющееся изоморфизмом.

Группы G и H называются *изоморфными* (обозначение: $G \simeq H$), если существуют изоморфизмы, переводящие одну на другую. Изоморфизм групп является отношением эквивалентности в классе всех групп. Изоморфные группы имеют совершенно одинаковые алгебраические свойства (если, конечно, не рассматривать какие-то дополнительно определенные на них структуры). В абстрактной теории групп к ним относятся как к одинаковым объектам.

Примеры. 1) Группа $GL(n, P)$ отображается на мультипликативную группу P^* поля P гомоморфизмом $\det\colon GL(n, P) \to P^*$, $A \longmapsto \det A$. 2) Аддитивная группа $\mathbf{R}$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{R}_+^*$ положительных действительных чисел в силу изоморфизма $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $r \longmapsto e^r$ (заметим, что $\exp^{-1} = \ln$).

Гомоморфизм, являющийся отображением «на», называется *сюръективным* гомоморфизмом или *эпиморфизмом*. В случае групп это согласуется с теоретико-категорным определением эпиморфизма. Если гомоморфизм отображает группу на ее образ взаимно однозначно, то он называется *инъективным* гомоморфизмом, или *мономорфизмом*, или *вложением*. При мономорфизме образ группы изоморфен ей самой, может быть с ней отождествлен, что оправдывает термин «вложение». Любая подгруппа $H \leqslant G$ вложена в G как абстрактная группа.

Гомоморфизм $\varphi\colon G \to G$ группы в себя называется *эндоморфизмом*. Множество всех эндоморфизмов группы G обозначается $\operatorname{End} G$ и является полугруппой относительно композиции. Изоморфизм φ группы G на себя называется *автоморфизмом* группы G. Относительно композиции множество всех автоморфизмов группы G является группой, которая называется *группой автоморфизмов* группы G и обозначается $\operatorname{Aut} G$.

Среди всех автоморфизмов группы G выделяются *внутренние автоморфизмы* σ_g, $g \in G$, определяемые условием $\sigma_g(h) = h^g$ для всех $h \in G$. Легко проверить, что $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$, $\sigma_{(g_1 g_2)^{-1}} = \sigma_{g_1^{-1}} \sigma_{g_2^{-1}}$. Поэтому отображение $\sigma\colon G \to \operatorname{Aut} G$, где $\sigma(g) = \sigma_{g^{-1}}$, оказывается гомоморфизмом. Образ группы G при гомоморфизме σ называется *группой внутренних автоморфизмов* группы G и обозначается $\operatorname{Inn} G$. Группа G абелева тогда и только тогда, когда $\operatorname{Inn} G = \{\mathrm{id}_G\}$, где id_G — тождественный автоморфизм группы G.

Подгруппа $A \leqslant G$ называется *эндоморфно допустимой* (или *вполне характеристической*), если для любого $\varphi \in \operatorname{End} G$ имеем $\varphi(A) \leqslant A$. Подгруппа $A \leqslant \leqslant G$ *автоморфно допустима* (*характеристична*), если $\varphi(A) = A$ для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} G$.

Совокупность $\{g^n | n \in \mathbf{Z}\}$ степеней элемента g группы G является подгруппой в G. Она называется *циклической подгруппой, порожденной элементом* g, и обозначается $\langle g \rangle$. Подгруппа $\langle g \rangle$ конечна в том и только том случае, если $g^n = e$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Если n — минимальное число с этим свойством, то оно называется *порядком элемента* g и обозначается $|g|$. Легко видеть, что $g^k = g^l$, $k, l \in \mathbf{Z}$, тогда и только тогда, когда $k \equiv l \bmod n$. Поэтому $|g| = |\langle g \rangle|$. По теореме Лагранжа порядок любого элемента конечной группы G делит порядок группы. Если для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем $g^n \neq e$, то все степени g^n, $n \in \mathbf{Z}$, различны между собой. В этом случае подгруппу $\langle g \rangle$ называют *бесконечной циклической* и говорят, что g — элемент *бесконечного порядка*. Группа, в которой нет неединичных элементов конечных порядков, называется *группой без кручения*. Группа, в которой порядок любого элемента конечен, называется *периодической*. Пусть π — множество простых чисел, включающее все возможные простые делители порядков элементов периодической группы G, тогда G называется *π-группой*. Если $\pi = \{p\}$, то G называется *p-группой*. Если порядки всех элементов периодической группы G делят число $n \in \mathbf{N}$, то n называется *периодом* (*экспонентой*) группы G.

Группа G называется *циклической*, если существует элемент $g \in G$ такой, что $G = \langle g \rangle$. Элемент g называется в этом случае *порождающим* элементом группы G. Все циклические группы порядка $n \in \mathbf{N}$ изоморфны между собой и обозначаются $C(n)$ или $\mathbf{Z}(n)$ (среди них аддитивные группы вычетов по модулю n и мультипликативные группы всех комплексных корней из 1 степени n). Все циклические группы бесконечного порядка также изоморфны между собой и обозначаются $C(\infty)$ или $\mathbf{Z}$, так как среди них содержится аддитивная группа целых чисел.

Любая подгруппа циклической группы — снова циклическая группа. Если $E \neq A \leqslant \langle g \rangle$, то $A = \langle g^m \rangle$, где $m = \min\{|k| \neq 0 | g^k \in A\}$. При $\langle g \rangle \simeq \mathbf{Z}$ имеем $A \simeq \mathbf{Z}$; при $\langle g \rangle \simeq \mathbf{Z}(n)$ получаем $A \simeq \mathbf{Z}(n/m)$.

Любая группа простого порядка p является циклической группой $\mathbf{Z}(p)$. Только в таких группах нет собственных неединичных подгрупп.

Пусть G — конечная группа, p^k — наибольшая степень простого числа p, делящая $|G|$. Следующие утверждения составляют известную *теорему Силова.*

1) Для любого числа $0 \leqslant l \leqslant k$ в группе G найдется подгруппа H_l порядка p^l.

2) Если $0 \leqslant l \leqslant k-1$, то любая подгруппа H_l порядка p^l содержится в некоторой подгруппе H_{l+1} порядка p^{l+1}.

В частности, подгруппы порядка p^k и только они являются максимальными p-подгруппами группы G. Они называются *силовскими p-подгруппами* группы G.

3) Все силовские p-подгруппы группы G сопряжены между собой.

4) Число силовских p-подгрупп в G сравнимо с единицей по модулю p и делит порядок группы G.

Подгруппа $H \leqslant G$ называется *нормальной подгруппой* или *нормальным делителем* группы G, что обозначается $H \trianglelefteqslant G$, если выполнены следующие эквивалентные условия:

(1) $H^g = H$ для любого $g \in G$, т. е. $G = N_G(H)$;

(2) $Hg = gH$ для любого $g \in G$;

(3) $h^g \in H$ для любых $h \in H$, $g \in G$.

Если $H \trianglelefteqslant G$ — собственная подгруппа, то пишем $H \triangleleft G$.

Группа G называется *простой*, если в ней нет неединичных собственных нормальных подгрупп.

Пересечение любой совокупности нормальных подгрупп в группе есть нормальная подгруппа. Образ нормальной подгруппы при эпиморфизме или полный прообраз при гомоморфизме — снова нормальные подгруппы. Если $H \trianglelefteqslant G$, то $C_G(H) \trianglelefteqslant G$. Подгруппа $H \leqslant G$ всегда нормальна в своем нормализаторе $N_G(H)$ — наибольшей среди всех подгрупп группы G, содержащих H в качестве нормальной подгруппы. Пересечение $H_G \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{f \in G} H^f$ есть наибольшая нормальная подгруппа в G, лежащая в H. Назовем H_G *сердцевиной* подгруппы H (по-английски core of a subgroup H). Если $H \trianglelefteqslant G$, $K \leqslant G$, то $K \cap H \trianglelefteqslant K$.

Если A, B — подгруппы в G, то AB не обязательно подгруппа. Если одна из подгрупп A, B нормальна в G, то $AB = BA$ — подгруппа в G. Если A, B — нормальные подгруппы в G, то $AB = BA$ — также нормальная подгруппа в G.

Свойство «быть нормальной подгруппой» не транзитивно: из того, что $H \trianglelefteq K$, $K \trianglelefteq G$, еще не следует, что $H \trianglelefteq G$ (см. пример на с. 90). Если $K \trianglelefteq G$, то сопряжение σ_g: $K \to K$ элементом $g \in G$ определяет автоморфизм группы K. Если $H \leqslant K$ — автоморфно допустимая подгруппа в K, то она допустима и относительно всех σ_g, $g \in G$, что равносильно нормальности $H \trianglelefteq G$.

Примеры. 1) Все подгруппы абелевой группы A нормальны в A. Все подгруппы из центра $C(G)$ группы G нормальны в G. 2) Подгруппа $SL(n, P)$ матриц с определителем 1 нормальна в $GL(n, P)$ (P — поле). 3) Централизатор $C_G(M)$ подмножества $M \subseteq G$ нормален в нормализаторе $N_G(M)$ того же подмножества.

Полный прообраз единичной подгруппы $E \leqslant H$ при гомоморфизме φ: $G \to H$ называется *ядром гомоморфизма* φ и обозначается $\operatorname{Ker} \varphi$. Ядро $\operatorname{Ker} \varphi$ — нормальная подгруппа группы G. Эпиморфизм φ: $G \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = E$.

Пусть $H \trianglelefteq G$ — нормальная подгруппа. Множество всех различных смежных классов $\{Hg \mid g \in G\}$ с операцией умножения $Hg_1Hg_2 \underset{\text{def}}{=} Hg_1g_2$ образует группу G/H, которая называется *факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H*. Корректность введенного выше умножения смежных классов имеет место, если только H — нормальная подгруппа.

Отображение φ: $G \to G/H$, где $\varphi(g) = Hg$, является эпиморфизмом и называется *естественным* или *каноническим* гомоморфизмом группы G на факторгруппу G/H. Заметим, что $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

Для произвольного эпиморфизма $\varphi: G \to H$ имеет место изоморфизм α: $G/\operatorname{Ker} \varphi \simeq H$, где $\alpha(\operatorname{Ker} \varphi \cdot g) = \varphi(g)$.

Примеры. 1) $G/E \simeq G$, $G/G \simeq E$; 2) $\mathbf{Z}/\langle n \rangle \simeq \mathbf{Z}(n)$, $\mathbf{Z}(n)/\langle m \rangle \simeq \mathbf{Z}((n, m))$; 3) $GL(n, P)/SL(n, P) \simeq P^*$ (P — поле); 4) $\mathbf{C}^*/\mathbf{T} \simeq \mathbf{R}^*_+$, где $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ — мультипликативная группа всех комплексных чисел, модуль которых равен единице.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \ldots \qquad (*)$$

называется *точной в $(i+1)$-м члене*, если $\varphi_i(G_i) = \operatorname{Ker} \varphi_{i+1}$. Последовательность $(*)$ называется *точ-*

ной, если она точна в каждом своем члене. *Короткая точная последовательность*, по определению, имеет вид

$$E \to R \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\varphi} H \to E, \qquad (**)$$

где ι — вложение нормальной подгруппы R в группу G, φ — эпиморфизм, крайние стрелки соответствуют очевидным гомоморфизмам. Точность означает, что $\operatorname{Ker}\varphi = R$. Ясно, что $G/R = G/\operatorname{Ker}\varphi \simeq H$.

Если R — нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой G/R изоморфна группе H, то говорят, что G — *расширение* (нормальной) подгруппы R посредством группы H. Такому расширению соответствует короткая точная последовательность (**), причем φ индуцирует изоморфизм $G/R \simeq H$.

Пусть A, B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \leqslant B$. Тогда $B/A \leqslant G/A$ и справедлива формула

$$(G/A)/(B/A) \simeq G/B.$$

Пусть A — подгруппа, B — нормальная подгруппа группы G, тогда $B \cap A \trianglelefteq A$ и справедлива формула

$$A/B \cap A \simeq AB/B.$$

Пусть X — подмножество в группе G. Пересечение всех подгрупп $H \leqslant G$, содержащих X, есть наименьшая подгруппа, содержащая X. Она обозначается $\langle X \rangle$ (используются также обозначения $\operatorname{гр}(X)$, $\operatorname{гр}(x \mid x \in X)$, (X) и т. п.) и называется *подгруппой, порожденной множеством* X. Если $G = \langle X \rangle$, то говорят, что X — *множество порождающих элементов* группы G. Группа G называется *конечно порожденной*, если существует конечное множество X ее порождающих элементов. Если при этом $|X| = n$, то говорят, что G *n-порождена*.

Примеры. 1) Группа G 1-порождена тогда и только тогда, когда она циклическая. 2) Группа $SL(n, \mathbf{Z})$ порождена множеством всех трансвекций $t_{ij} = e + e_{ij}$, где e_{ij} — матричная единица, т. е. матрица, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а на остальных местах — нуль (e — единичная матрица).

В явной записи элементы подгруппы $\langle X \rangle \leqslant G$ выглядят следующим образом. Назовем *групповым словом* в алфавите X формальное выражение $v = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Каждое слово записывает

определенный элемент группы G, который также обозначим через v. Верно и обратное, любой элемент подгруппы $\langle X\rangle$ имеет запись указанного вида. Заметим, что разные слова могут записывать один и тот же элемент. Подробнее об этом говорится в пп. 1.2, 1.4.

Пусть G — группа, порожденная множеством элементов X. Известен стандартный способ получения множества порождающих элементов подгруппы $H \leqslant G$ через X и множество T представителей (правых) смежных классов группы G по подгруппе H. Считаем, что $e \in T$ как представитель H. Подгруппа H порождается множеством элементов $S(T, X) \underset{\text{def}}{=} \{tx(\overline{tx})^{-1} \mid t \in T, x \in X\}$, где $\bar{g} \in T$ — представитель смежного класса Hg, $g \in G$. Заметим, что $tx^{-1}(\overline{tx^{-1}})^{-1} = (t_1 x(\overline{t_1 x})^{-1})^{-1}, t_1 = \overline{tx^{-1}}$. По записи элемента $v = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in H$ получаем запись того же элемента в порождающих $S(T, X)$:

$$v = \left[ex_1^{\varepsilon_1}\left(\overline{x_1^{\varepsilon_1}}\right)^{-1}\right] \cdot \left[\overline{x_1^{\varepsilon_1}} x_2^{\varepsilon_2}\left(\overline{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}}\right)^{-1}\right] \ldots$$
$$\ldots \left[\overline{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}} \cdot x_n^{\varepsilon_n} \cdot e\right],$$

так как $\bar{v} = e$. Подгруппа конечного индекса H конечно порожденной группы G сама конечно порождена. Кроме того, H содержит эндоморфно допустимую в G подгруппу K также конечного индекса.

Элемент $[g, f] \underset{\text{def}}{=} gfg^{-1}f^{-1}$ называется *коммутатором* элементов $g, f \in G$. Заметим, что $[g, f]^{-1} = [f, g]$, $[g, f]fg = gf$, т. е. коммутатор характеризует «разницу» между fg и gf ($[g, f] = e$ тогда и только тогда, когда $fg = gf$). *Коммутант* G' группы G определяется как подгруппа, порожденная множеством всех коммутаторов. Коммутант G' — нормальная подгруппа в G, факторгруппа по которой G/G' абелева. Если факторгруппа G/N абелева, то нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ содержит коммутант G'. Равенство $G' = E$ имеет место тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Степень G^k, $k \in \mathbf{N}$, группы G по определению есть подгруппа, порожденная всеми элементами вида g^k, $g \in G$. Имеем $G^k \trianglelefteq G$. Факторгруппа G/G^k — группа периода k.

Отметим, что любой элемент коммутанта [степени] записывается как произведение коммутаторов

[степеней], и в общем случае эту запись нельзя свернуть в коммутатор [степень].

Элемент $g \in G$ называется *непорождающим*, если его можно безболезненно убрать из любого множества, порождающего G, т. е. из $G = \langle X \cup \{g\} \rangle$ всегда следует $G = \langle X \rangle$. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *максимальной*, если $H \neq G$ и любая подгруппа $K \leqslant G$, строго содержащая H, совпадает с G. Заметим, что бесконечная группа может не иметь максимальных подгрупп. *Подгруппой Фраттини* $\Phi(G)$ группы G называется пересечение всех ее максимальных подгрупп, если они существуют, и сама G в противном случае. Множество всех непорождающих элементов группы G совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$.

Пересечение всех нормальных подгрупп, содержащих данное подмножество R группы G, является наименьшей нормальной подгруппой, содержащей R. Она обозначается $\langle\langle R \rangle\rangle$ или $\langle R \rangle^G$ и называется *нормальным замыканием* R в G.

Запись вида $v = \left(r_1^{\varepsilon_1}\right)^{g_1} \left(r_2^{\varepsilon_2}\right)^{g_2} \ldots \left(r_k^{\varepsilon_k}\right)^{g_k}$, $r_i \in R$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, k$, определяет элемент $v \in \langle\langle R \rangle\rangle$. Наоборот, любой элемент $v \in \langle\langle R \rangle\rangle$ может быть (неоднозначно) записан таким способом. Понятие нормального замыкания $\langle\langle H \rangle\rangle$ подгруппы $H \leqslant G$ двойственно введенному ранее понятию сердцевины H_G.

Рассмотрим основные операции над группами.

1°. Прямые и декартовы произведения. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — группы. Множество $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ последовательностей $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $g_i \in G_i$, с умножением $(g_1, g_2, \ldots, g_n)(f_1, f_2, \ldots, f_n) \underset{\text{def}}{=} (g_1f_1, g_2f_2, \ldots, g_nf_n)$ является группой, которая называется *прямым произведением* групп G_i. При этом группы G_i называются *множителями* прямого произведения. С точностью до изоморфизма прямое произведение не зависит от порядка множителей. Множество последовательностей $(e, e, \ldots, g_i, e, \ldots, e)$, где $g_i \in G_i$ стоит на i-м месте, составляет подгруппу, изоморфную множителю G_i.

Пусть G_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, — произвольное семейство групп. Множество $\overline{G} = \overline{\prod} G_\alpha$ всех функций $f\colon \mathrm{A} \to \bigcup G_\alpha$ таких, что $f(\alpha) \in G_\alpha$ для любого α, с умножением, определяемым равенством $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$, является

группой, которая называется *декартовым произведением* групп (множителей) G_α. Значение $f(\alpha)$ называется α-компонентой элемента $f \in \overline{G}$. Множество всех элементов $f \in \overline{G}$ таких, что $f(\beta) = e$ при $\beta \neq \alpha$, образует подгруппу, изоморфную множителю G_α.

Определим множество $\operatorname{supp}(f) \underset{\text{def}}{=} \{\alpha \mid f(\alpha) \neq e\}$, которое называется *носителем элемента* $f \in \overline{G} = \overline{\prod} G_\alpha$. Множество всех элементов $f \in \overline{G}$ с конечными носителями является подгруппой, которая называется *прямым произведением* групп G_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, и обозначается $G = \prod G_\alpha$. Если множество $\mathrm{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$ конечно, то декартово и прямое произведения совпадают с произведением $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$.

Используя компонентные вложения, отождествим множители декартова и прямого произведений с их подгруппами.

Группа G тогда и только тогда изоморфна прямому произведению своих подгрупп G_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, когда выполнены следующие условия: 1) все G_α — нормальные подгруппы в G; 2) подгруппа, порожденная всеми G_α, совпадает с G; 3) пересечение любой подгруппы G_α с подгруппой, порожденной остальными G_β, $\beta \neq \alpha$, равно единичной подгруппе E.

Пусть $\mathrm{pr}_\alpha\colon \overline{G} \to G_\alpha$ — гомоморфизм декартова произведения $\overline{G} = \overline{\prod} G_\alpha$ на множитель G_α, определенный формулой $\mathrm{pr}_\alpha(f) = f(\alpha)$. Назовем pr_α α-*проекцией* декартова произведения. Подгруппа $H \leqslant \overline{G}$ называется *поддекартовым произведением* групп G_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, если для любого α имеем $\mathrm{pr}_\alpha(H) = G_\alpha$.

Пусть для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ существует гомоморфизм φ_α некоторой группы H в группу семейства G_α. Естественным образом определяется гомоморфизм $(\varphi_\alpha)\colon H \to \overline{\prod} G_\alpha$, для которого $h \mapsto (\varphi_\alpha(h))$.

Пусть в группе G задано семейство нормальных подгрупп N_α, $\alpha \in \mathrm{A}$. Пусть $\varphi_\alpha\colon G \to G/N_\alpha$ — естественные гомоморфизмы. Ядром гомоморфизма $(\varphi_\alpha)\colon G \to \overline{\prod} G/N_\alpha$ является $N = \bigcap N_\alpha$ (*теорема Ремака*).

Если группы G_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, аддитивны, то вместо $\overline{G} = \overline{\prod} G_\alpha$, $G = \prod G_\alpha$ часто пишут, соответственно, $\overline{G} = \overline{\bigoplus} G_\alpha$ $\left(\text{или } \overline{G} = \overline{\sum} G_\alpha\right)$, $G = \bigoplus G_\alpha$ $\left(\text{или } G = \sum G_\alpha\right)$

(в конечном случае $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$), называя их *декартовой* и *прямой суммами* групп G_α, $\alpha \in A$. Группы G_α называются слагаемыми групп $\overline{G}$, G. Через $G^\varkappa$ обозначают прямую сумму (*степень*) $\varkappa$ изоморфных слагаемых.

Примеры. 1) Группа $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, есть прямая сумма n экземпляров группы $\mathbf{R}$. В общем случае аддитивная группа линейного пространства V размерности $\varkappa$ над полем P есть прямая сумма $\varkappa$ экземпляров аддитивной группы P. Компоненты элементов — это их координаты в фиксированном базисе. 2) Группа $F_{[a,\, b]}$ есть декартова сумма групп $\mathbf{R}_\alpha \simeq \mathbf{R}$, $\alpha \in [a, b]$, где α-компонента функции $f \in F_{[a,\, b]}$ есть ее значение $f(\alpha)$.

2°. Прямые пределы. Частично упорядоченное множество индексов Λ называем *направленным* (вверх), если для любых элементов $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует элемент $\nu \in \Lambda$ такой, что $\lambda, \mu \leqslant \nu$. Пусть Λ — направленное множество, $\{G^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — семейство групп. Предположим, что для каждой пары $\lambda \geqslant \mu$ задан гомоморфизм $\iota_\mu^\lambda \colon G^\mu \to G^\lambda$ такой, что при любых $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$ имеем $\iota_\mu^\lambda \iota_\lambda^\nu = \iota_\mu^\nu$ и всегда $\iota_\lambda^\lambda = \mathrm{id}_{G_\lambda}$. В этой ситуации говорим, что задан *прямой спектр* $\mathcal{G} = \{G^\lambda, \iota_\mu^\lambda, \Lambda\}$. По заданному прямому спектру $\mathcal{G}$ построим новую группу $G = \varinjlim G^\lambda$, которая называется *прямым* (*индуктивным*) *пределом* групп G^λ, $\lambda \in \Lambda$. Идея построения заключена в отождествлении элемента $g_\lambda \in G^\lambda$ со всеми его образами $\iota_\lambda^\mu(g_\lambda) \in G^\mu$ при $\mu \geqslant \lambda$. Для этого на теоретико-множественном объединении $\bigcup G^\lambda$ определим эквивалентность, полагая $g_\lambda \sim g_\mu$ для $g_\lambda \in G^\lambda$, $g_\mu \in G^\mu$, если существует такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda, \mu \leqslant \nu$ и $\iota_\lambda^\nu(g_\lambda) = \iota_\mu^\nu(g_\mu)$. Пусть $[g_\lambda]$ обозначает класс эквивалентности, определяемый элементом $g_\lambda \in G^\lambda$. Умножение классов задается правилом $[g_\lambda][g_\mu] = [\iota_\lambda^\nu(g_\lambda)\, \iota_\mu^\nu(g_\mu)]$ для $\nu \geqslant \lambda, \mu$. Это умножение корректно определено и задает на множестве G классов $[g_\lambda]$ структуру группы.

Примеры. 1) Пусть группа G есть объединение некоторого множества $\{G_k \mid k \in K\}$ своих подгрупп. Положим $k_1 \leqslant k_2$, если $G_{k_1} \leqslant G_{k_2}$. Пусть $\iota_{k_1}^{k_2} \colon G_{k_1} \to G_{k_2}$ — вложение. Предположим, что заданный на K порядок оказался направленным. Тогда группа G изоморфна прямому пределу $\varinjlim G_k$.

В частности, каждая группа есть прямой предел конечно порожденных подгрупп, группа $\mathbf{Q}$ является прямым пределом своих циклических подгрупп.

2) Рассмотрим возрастающую цепь циклических подгрупп $C(p) \leqslant C(p^2) \leqslant \ldots \leqslant C(p^n) \leqslant \ldots$ (p простое), в которой вложения осуществляются по правилу $g_i \longmapsto g_{i+1}^p$, если $C(p^i) = \langle g_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots$ Прямой предел $C(p^\infty) = \varinjlim C(p^i)$ есть объединение указанной цепи. Группа $C(p^\infty)$ называется *квазициклической p-группой*. Она бесконечна, хотя каждая ее собственная подгруппа — циклическая $C(p^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Мультипликативная группа всех комплексных корней из единицы степеней p^k, $k = 1, 2, \ldots, p$ — простое, изоморфна группе $C(p^\infty)$. Мультипликативная группа всех комплексных корней из единицы произвольных степеней изоморфна прямому произведению $\prod_p C(p^\infty)$ квазициклических p-групп по всем простым p.

Пусть $G = \varinjlim G^\lambda$ — прямой предел, отвечающий прямому спектру $\mathscr{G} = \{G^\lambda, \iota_\lambda^\mu, \Lambda\}$. Отображение ι_λ: $G^\lambda \to G$, $g_\lambda \longmapsto [g_\lambda]$, $\lambda \in \Lambda$, является гомоморфизмом. Полагаем $G_\lambda = \iota_\lambda(G^\lambda)$. Отметим некоторые свойства прямых пределов.

1) $G = \bigcup G_\lambda$.

2) $G_\lambda \leqslant G_\mu$, если $\lambda \leqslant \mu$.

3) Если все ι_λ^μ — мономорфизмы, то и ι_λ — мономорфизмы, поэтому $G^\lambda \simeq G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

4) Пусть $\tilde{\mathscr{G}} = \{\tilde{G}^\lambda, \tilde{\iota}_\lambda^\mu, \Lambda\}$ — другой прямой спектр. Предположим, что существуют гомоморфизмы φ_λ: $G^\lambda \to \tilde{G}^\lambda$, перестановочные в понятном смысле с гомоморфизмами ι_λ^μ, $\tilde{\iota}_\lambda^\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$). Тогда естественно определен гомоморфизм φ: $\varinjlim G^\lambda \to \varinjlim \tilde{G}^\lambda$, где $\varphi([g_\lambda]) = [\varphi_\lambda(g_\lambda)]$, $\lambda \in \Lambda$.

3°. Полупрямые произведения и расширения посредством автоморфизмов. Пусть в группе G есть нормальная подгруппа N и подгруппа H такие, что $G = NH$, $N \cap H = E$. Тогда G является расширением N посредством $H \simeq G/N$. Говорят, что G — *полупрямое произведение* (нормальной) подгруппы N на подгруппу H. Используется одно из следующих обозначений: $G = N \succ H$, $G = N \rtimes H$, $G = N \sqsupset H$. Прямое произведение $G = N \times H$ является частным случаем полупрямого произведения $G = N \succ H$.

Говорят, что расширение G нормальной подгруппы N посредством группы H *расщепляется*, если существует подгруппа $\tilde{H} \leqslant G$, изоморфная H и такая, что $G = N \rightthreetimes \tilde{H}$. В этой ситуации говорят, что нормальная подгруппа N *дополняема* подгруппой $\tilde{H}$.

Пример (*теорема Шура — Цассенхауза*). Пусть A — нормальная подгруппа конечной группы G. Если порядок $n = |A|$ и индекс $m = |G:A|$ взаимно просты, то A дополняема в G подгруппой B порядка m и любые два таких «дополнения» сопряжены в G.

В полупрямом произведении $G = N \rightthreetimes H$ любой элемент допускает однозначную запись $g = nh$, $n \in N$, $h \in H$. Умножение выполняется по правилу: $n_1h_1 \cdot n_2h_2 = n_1n_2^{h_1}h_1h_2$, $n_i \in N$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$.

Приведенное определение полупрямого произведения является внутренним. Для построения полупрямого произведения достаточно знать, как элементы группы H «сопрягают» элементы нормальной подгруппы N. Если группа $G = N \rightthreetimes H$ уже построена, то каждое сопряжение элементом $h \in H$ подгруппы N задает автоморфизм $\sigma(h) \in \operatorname{Aut} N$.

Пусть σ: $H \to \operatorname{Aut} N$ — гомоморфизм. *Внешнее полупрямое произведение* $G = N \rightthreetimes_\sigma H$ состоит из множества пар (n, h), $n \in N$, $h \in H$, с умножением по правилу $(n_1, h_1)(n_2, h_2) \underset{\text{def}}{=} (n_1n_2^{\sigma(h_1)}, h_1h_2)$. При этом $e = (e, e)$, $(n, h)^{-1} = \left((n^{-1})^{\sigma(h^{-1})}, h^{-1}\right)$. Отображения φ: $H \to G$, где $\varphi(h) = (e, h)$, и ψ: $N \to G$, где $\psi(n) = (n, e)$, являются вложениями. Отождествляя H и N с их образами в G, мы видим, что $G = N \rightthreetimes H$ в смысле внутреннего определения полупрямого произведения.

Важный частный случай полупрямого произведения возникает при $H \leqslant \operatorname{Aut} N$. Группа $G = N \rightthreetimes H$ называется *полупрямым расширением* N посредством группы автоморфизмов H. Группа $\operatorname{Hol} N \underset{\text{def}}{=} N \rightthreetimes \operatorname{Aut} N$ называется *голоморфом* группы N.

Пример. $\operatorname{Aut} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(2)$, так как $\mathbf{Z}$ обладает, кроме тождественного, только одним автоморфизмом умножения на -1. Поэтому $\operatorname{Hol} \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \rightthreetimes \mathbf{Z}(2)$.

4°. Сплетения групп. Пусть A, B — произвольные группы. Пусть $\bar{A} = \prod\limits_{b \in B} A_b$ — прямое, $\bar{\bar{A}} =$

$=\prod\limits_{b\in B} A_b$ — декартово произведения изоморфных копий A_b группы A, индексированных элементами группы B. Сопоставим каждому элементу $b_0 \in B$ автоморфизм $\rho_{b_0} \in \operatorname{Aut} \overline{\overline{A}}$ сдвига индексов в $\overline{\overline{A}}$. Это значит, что элемент (a_b) группы $\overline{\overline{A}}$ переходит при ρ_{b_0} в элемент (a_{bb_0}). Отображение $\rho\colon B \to \operatorname{Aut} \overline{\overline{A}}$, для которого $\rho(b) = \rho_b$, $b \in B$, дает вложение группы B в группу $\operatorname{Aut} \overline{\overline{A}}$. Группа $\overline{A}$ инвариантна относительно любого автоморфизма ρ_b, $b \in B$, то же отображение ρ индуцирует также вложение группы B в группу $\operatorname{Aut} \overline{A}$. *Декартовым сплетением* группы A с группой B называется группа $\overline{G} = A \,\bar{r}\, B \underset{\text{def}}{=} \overline{\overline{A}} \rightthreetimes_\rho B$, *прямым сплетением* — группа $G = A \,r\, B \underset{\text{def}}{=} \overline{A} \rightthreetimes_\rho B$. Декартово сплетение группы A с группой B часто обозначается через $A \operatorname{Wr} B$, а прямое — через $A \operatorname{wr} B$ (wreath product). Ясно, что $A \,r\, B \leqslant A \,\bar{r}\, B$.

Группа $\overline{\overline{A}}$ (соответственно $\overline{A}$) называется *базисной подгруппой* сплетения $A \,\bar{r}\, B$ (соответственно $A \,r\, B$). *Диагональю* $\operatorname{Diag}(B, A)$ *сплетения* $A \,\bar{r}\, B$ называется подгруппа базисной подгруппы $\overline{\overline{A}}$, состоящая из постоянных функций (a_b), $a_b = a$, в силу сделанного в самом начале отождествления $A_b \simeq A$ $(b \in B)$. Очевидно, что $\operatorname{Diag}(B, A) \simeq A$.

Если $K \leqslant A$, $L \leqslant B$, то $K \,\bar{r}\, L \leqslant A \,\bar{r}\, B$, $K \,r\, L \leqslant A \,r\, B$. Если $A \neq E$, то $C(A \,\bar{r}\, B) = \operatorname{Diag}(B, C(A)) \leqslant \operatorname{Diag}(B, A)$ — подгруппа постоянных функций со значениями в $C(A)$, в то время как $C(A \,r\, B) = E$, если группа B бесконечна (в случае $|B| < \infty$ имеем $A \,\bar{r}\, B = A \,r\, B$). Эпиморфизм $\varphi\colon A \to K$ индуцирует эпиморфизмы $\bar{\psi}\colon A \,\bar{r}\, B \to K \,\bar{r}\, B$, $\psi\colon A \,r\, B \to K \,r\, B$ (функция $(a_b) \in \overline{\overline{A}}$ заменяется на функцию $(\varphi(a_b)) \in \overline{\overline{K}}$). Полный аналог последнего утверждения с заменой A на B неверен.

Любое расширение группы A посредством группы B вложимо в декартово сплетение $G = A \,\bar{r}\, B$.

Возьмем конечную цепь длины n

$$G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n \qquad (*)$$

вложенных друг в друга подгрупп группы G. Говорят, что цепь $(*)$ *возрастает* от G_0 до G_n (*убывает* от

G_n до G_0). Цепь (*) *строго возрастает* (*убывает*), если каждое включение в ней строгое. Наряду с конечными цепями подгрупп (*) рассматривают произвольные возрастающие

$$G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant \ldots \qquad (**)$$

и убывающие

$$G_0 \geqslant G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_i \geqslant \ldots \qquad (***)$$

цепи групп. Группа G удовлетворяет *условию максимальности для подгрупп* (условию max), если любая строго возрастающая цепь (**) в ней конечна. Такие группы называются *нётеровыми*. Необходимым и достаточным условием нётеровости группы является конечная порожденность всех ее подгрупп. Группа G удовлетворяет *условию минимальности* (условию min), если любая строго убывающая цепь (***) в ней конечна. Такие группы называют *артиновыми*. Приведенные свойства группы G переносятся на ее подгруппы и эпиморфные образы.

Для произвольного теоретико-группового свойства естественно определяются условия максимальности и минимальности для подгрупп, обладающих этим свойством. Например, так определяются условия $\max_n$ и $\min_n$ максимальности и минимальности для нормальных подгрупп.

Цепи (*), (**), (***) называются *нормальными рядами*, если все их члены G_i нормальны в группе G. Если выполнено более слабое условие — нормальность G_i в G_{i+1} для (*), (**) и G_i в G_{i-1} для (***), то ряды (*), (**), (***) называются *субнормальными*. Факторгруппы G_{i+1}/G_i для (*), (**) и G_i/G_{i+1} для (***) называются *факторами* соответствующих рядов.

Подгруппа H группы G называется *субнормальной глубины* n (в обозначениях: $H \trianglelefteqslant_n G$), если существует субнормальный ряд (*) от единичной подгруппы $E = G_0$ до $G = G_n$.

Если группа G конечна, то легко построить субнормальный ряд (*) при некотором n от $E = G_0$ до $G = G_n$, факторы которого просты.

Многие важные классы определяются наличием в группах конечных или бесконечных субнормальных рядов с теми или иными свойствами. Группа G назы-

вается *полициклической*, если в ней существует ряд (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$, все факторы которого — циклические группы. Если все факторы изоморфны $\mathbf{Z}$, то G называется *поли-$\mathbf{Z}$-группой*. В общем случае группа G, в которой существует субнормальный ряд (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$, все факторы которого обладают теоретико-групповым свойством $\mathscr{C}$, называется *поли-$\mathscr{C}$-группой*.

Группа G называется *разрешимой*, если в ней существует субнормальный ряд (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$, все факторы которого абелевы. Наименьшее число n, для которого существует указанный ряд называется *ступенью разрешимости* группы G. В частности, абелевы группы — это в точности разрешимые группы ступени 1. Разрешимые группы ступени 2 часто называют *метабелевыми*. Группа G называется *сверхразрешимой*, если в ней существует нормальный ряд (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$ с циклическими факторами.

Пусть $H \leqslant G$. Наличие в G цепи (*), (**) или (***) позволяет определить соответствующую цепь в H, полагая $H_i = H \cap G_i$. Аналогично, для эпиморфного образа $K = \varphi(G)$ возникают цепи с общим членом $K_i = \varphi(G_i)$. Свойства [суб]нормальности рядов при таком соответствии сохраняются. Подгруппы и факторгруппы поли-$\mathscr{C}$-группы G сами будут поли-$\mathscr{C}$-группами, если свойство $\mathscr{C}$ переносится, соответственно, на подгруппы и эпиморфные образы.

Два [суб]нормальных ряда (*) называются *изоморфными*, если они имеют одинаковую длину и между их факторами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны. Ряд, содержащий все члены другого ряда, называется его *уплотнением*.

Любые два [суб]нормальных ряда (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$ обладают изоморфными уплотнениями (*теорема Шрайера*).

Пример. Конечная группа G обладает, как уже отмечалось, субнормальным рядом (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$, все факторы которого — простые группы. Любой субнормальный ряд (*) от $E = G_0$ до $G = G_n$ (без повторений) уплотняется до ряда с тем же свойством. Поскольку дальнейшее уплотнение без повторений невозможно, все такие ряды имеют одну и ту же длину, а факторы представляют одинаковые множества конечных простых групп (не обязательно различных).

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — элементы группы G. Напомним, что коммутатором элементов x_1, x_2 называется элемент $[x_1, x_2] = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$. *Простой коммутатор веса* $n \geqslant 3$ определяется индуктивно по формуле $[x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n] \underset{\text{def}}{=} [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. Специальное сокращение $[x_1, nx_2]$ или $[x_1, x_2; n]$ используется для простого коммутатора $[x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2]$ веса $n+1$.

Зафиксируем основные свойства коммутаторов, известные как *коммутаторные тождества*:

1) $[x_1, x_2]^{-1} = [x_2, x_1]$,

2) $[x_1x_2, x_3] = [x_2, x_3]^{x_1}[x_1, x_3] = [x_2, x_3][x_3, x_2, x_1][x_1, x_3]$ и $[x_1, x_2x_3] = [x_1, x_2][x_1, x_3]^{x_2} = [x_1, x_2][x_1, x_3][x_3, x_1, x_2]$,

3) $[x_1, x_2^{-1}] = \left([x_1, x_2]^{x_2^{-1}}\right)^{-1} = [x_2, x_1][x_1, x_2, x_2^{-1}]$ и $[x_1^{-1}, x_2] = \left([x_1, x_2]^{x_1^{-1}}\right)^{-1} = [x_2, x_1][x_1, x_2, x_1^{-1}]$,

4) $[x_2^{-1}, x_1, x_3]^{x_2}[x_3^{-1}, x_2, x_1]^{x_3}[x_1^{-1}, x_3, x_2]^{x_1} = 1$ (*тождество Витта*).

Замечание. Иногда коммутатор понимают как $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Соответственно изменяются все формулы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — не элементы, а подмножества группы G. Определим *взаимный коммутант* X_1 и X_2 формулой

$$[X_1, X_2] \underset{\text{def}}{=} \langle [x_1, x_2] \mid x_i \in X_i,\ i = 1, 2 \rangle.$$

Индуктивно полагаем для $n \geqslant 3$

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}], X_n].$$

Если $X_1, X_2 \leqslant G$, то $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$. Если $X_1 \trianglelefteq G$, $X_2 \leqslant G$, то $[X_1, X_2] \trianglelefteq X_1$.

Коммутант G' группы G определяется формулой $G' = [G, G]$. Продолжив построение, получим второй $G^{(2)} = [G', G']$, третий $G^{(3)} = [G^{(2)}, G^{(2)}]$ и т. д. коммутанты. Введем обозначения: $\delta_0 G = G$, $\delta_1 G = G'$, $\ldots$, $\delta_n G = G^{(n)}$, ... Получим ряд коммутантов

$$G = \delta_0 G \geqslant \delta_1 G \geqslant \ldots \geqslant \delta_n G \geqslant \ldots,$$

являющийся нормальным. Более того, все члены этого ряда эндоморфно допустимы в G и все его факторы абелевы. Группа G разрешима ступени n тогда и только тогда, когда $\delta_{n-1} G \neq E$, $\delta_n G = E$.

Нормальный ряд

$$\ldots G_i \leqslant G_{i+1} \leqslant G_{i+2} \leqslant \ldots$$

называется *центральным* в G, если $G_{i+1}/G_i \leqslant C(G/G_i)$ для любого i. Группа G называется *нильпотентной*, если существует центральный ряд конечной длины от $E = G_0$ до $G = G_n$. Наименьшее число n для всех таких рядов называется *ступенью нильпотентности* группы G. Нильпотентные группы ступени 1 — это в точности абелевы группы. Нильпотентные группы ступени n разрешимы ступени $m \leqslant n$, разрешимые группы не обязаны быть нильпотентными.

Пусть $\zeta_0 G \underset{\text{def}}{=} E$, $\zeta_1 G \underset{\text{def}}{=} C(G)$. Если подгруппа $\zeta_n G \leqslant G$ уже построена, полагаем $\zeta_{n+1} G$ — полный прообраз $C(G/\zeta_n G)$ относительно естественного гомоморфизма $G \to G/\zeta_n G$. Получим центральный ряд

$$E = \zeta_0 G \leqslant \zeta_1 G \leqslant \ldots \leqslant \zeta_n G \leqslant \ldots,$$

который называется *верхним центральным рядом* группы G.

Пусть $\gamma_1 G \underset{\text{def}}{=} G$, $\gamma_2 G \underset{\text{def}}{=} G'$. Если подгруппа $\gamma_n G$ уже построена, полагаем $\gamma_{n+1} G \underset{\text{def}}{=} [\gamma_n G, G]$. Получим центральный ряд

$$G = \gamma_1 G \geqslant \gamma_2 G \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n G \geqslant \ldots,$$

который называется *нижним центральным рядом* группы G. Члены нижнего центрального ряда эндоморфно допустимы в G.

Группа G нильпотентна ступени l тогда и только тогда, когда $\zeta_{l-1} G \neq G$, $\zeta_l G = G$ или, что равносильно, $\gamma_l G \neq E$, $\gamma_{l+1} G = E$. Таким образом, верхний и нижний центральные ряды нильпотентной группы имеют наименьшую длину среди всех центральных рядов от E до G.

Любая подгруппа и эндоморфный образ l-ступенно нильпотентной группы также нильпотентная группа ступени $k \leqslant l$.

О свойствах разрешимых и нильпотентных групп см. § 2.

Пусть $\mathscr{C}$ — теоретико групповое свойство. Говорят, что G — *почти-$\mathscr{C}$-группа*, если в G найдется подгруппа конечного индекса, обладающая свойством $\mathscr{C}$. Особенно часто речь идет о *почти разрешимых*, *почти нильпотентных* и *почти полициклических* группах.

Верхний центральный ряд можно продолжить трансфинитным образом, беря в качестве $\zeta_{\alpha+1}G$ полный прообраз $C(G/\zeta_\alpha G)$ относительно естественного гомоморфизма $G \to G/\zeta_\alpha G$, если ординал α непределен, и полагая $\zeta_\beta G = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \zeta_\alpha G$ для предельного ординала β. Для произвольного ординала α подгруппа $\zeta_\alpha G$ называется *α-гиперцентром* группы G. Так как мощность группы G не может быть превышена, найдется ординал λ такой, что для всех $\mu \geqslant \lambda$ имеем $\zeta_\mu G = \zeta_\lambda G$. В этом случае подгруппа $\mathrm{HC}(G) \underset{\text{def}}{=} \zeta_\lambda G$ называется *гиперцентром* группы G. Группа G называется *гиперцентральной*, если $G = \mathrm{HC}(G)$.

Более общим, чем понятие [суб]нормального ряда является понятие [суб]нормальной системы. *Возрастающей [суб]нормальной системой* подгрупп группы G называется семейство ее подгрупп $\{G_\alpha \mid \alpha \leqslant \beta\}$, индексированное ординалами, меньшими или равными ординалу β со следующими свойствами:

1) $G_\alpha \leqslant G_\gamma$, если $\alpha \leqslant \gamma$; 2) $G_0 = E$ и $G_\beta = G$; 3) $G_\alpha \trianglelefteq G_{\alpha+1}$ (в случае нормальной системы $G_\alpha \trianglelefteq G$ для всех α); 4) $G_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} G_\alpha$, если λ — предельный ординал.

Свойство 4) обеспечивает замкнутость системы по объединениям. *Факторами* системы $\{G_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ называются факторгруппы $G_{\alpha+1}/G_\alpha$. Ординал β называется *ординальным типом* этой системы. Иногда приходится говорить о возрастающей системе, для которой свойство 2) заменяется на $G_0 = H$ и $G_\beta = G$. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *достижимой* в G (в символах: $H \trianglelefteq_\infty G$), если существует такая субнормальная система. Аналог глубины в этом случае — ординал β.

Двойственным образом вводится понятие *убывающей [суб]нормальной системы*, замкнутой по пересечениям. Наконец, в общем случае, *[суб]нормальной системой* подгрупп группы G называется множество [суб]нормальных подгрупп $G_\alpha \leqslant G$, где α — ординалы, содержащее $G_0 = E$ и $G_\beta = G$, линейно упорядоченное по вложению, замкнутое относительно любых объединений и пересечений. Вместе с любым элементом G_α система содержит $G_\alpha^\# \underset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} G_\lambda$ и $G_\alpha^b \underset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{\mu<\alpha} G_\mu$.

Требуется, чтобы $G_\alpha \trianglelefteq G_\alpha^\#$, тогда $G_\alpha^\#/G_\alpha$ — фактор системы. Нормальность системы, как обычно, означает,

что все ее члены нормальны в G. Наличие в G системы с определенными условиями на факторы выделяет специальные классы групп Куроша — Черникова. Подробнее см. в п. 1.5.

Определим группы подстановок и действия групп. Пусть $M \neq \varnothing$ — произвольное множество. Совокупность всех взаимно однозначных отображений $\varphi: M \to M$ относительно композиции образует группу $\operatorname{Symm} M$, которую мы будем называть *симметрической группой* на множестве M. Произвольный элемент $\varphi \in \operatorname{Symm} M$ называется *подстановкой*, а произвольная подгруппа $H \leqslant \operatorname{Symm} M$ — *группой подстановок* на множестве M.

Если M — конечное множество из n элементов, то можно считать, что $M = \mathbf{N}_n \underset{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, n\}$. Группу $\mathbf{S}_n \underset{\text{def}}{=} \operatorname{Symm} \mathbf{N}_n$ называют симметрической группой *степени* n, а любую ее подгруппу — группой подстановок степени n. Произвольная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ записывается в виде $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\{1, 2, \ldots, n\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Правильный порядок первой строки взят для удобства записи. Единица в $\mathbf{S}_n$ — тождественная подстановка $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Обратная к σ подстановка σ^{-1} получается переменой строк (и упорядочением первой строки путем перестановки столбцов). Порядок группы $\mathbf{S}_n$ равен $n!$

Подстановка σ называется *четной*, если она может быть приведена к e после четного числа перемен мест ее элементов из второй строки. В противном случае σ *нечетна*. Четность не зависит от выбора упомянутых перемен. Четность обратной подстановки σ^{-1} совпадает с четностью σ. Правила четности для произведения подстановок: *чч* = *нн* = *ч*, *чн* = *нч* = *н*. Множество всех четных подстановок образует нормальную подгруппу $\mathbf{A}_n$ индекса 2 в $\mathbf{S}_n$, порядок которой равен $n!/2$.

Цикл — это подстановка, при которой часть символов циклически перемещается, т. е. $l_1 \to l_2 \to \ldots \to l_t \to l_1$, а остальные остаются на месте. В записи цикла $(l_1, l_2, \ldots, l_t)$ участвуют только перемещаемые

символы, t — *длина цикла*, его четность (как подстановки) противоположна четности числа t. Если циклы не имеют общих действительно переставляемых символов $l_1, l_2, \ldots, l_t$, то они называются *независимыми*. Любая подстановка разложима в произведение *транспозиций*, т. е. циклов длины 2: $\sigma = (l_1, l_2)(l_3, l_4) \ldots \ldots (l_m, l_{m+1})$ (не обязательно независимых). Четность числа множителей равна четности σ. Любая подстановка однозначно раскладывается в произведение независимых циклов $\sigma = (l_1, l_2, \ldots, l_r)(m_1, m_2, \ldots \ldots, m_s) \ldots (p_1, p_2, \ldots, p_t)$. Порядок записи неважен, так как независимые циклы перестановочны между собой. По множеству чисел $\{r, s, \ldots, t\}$ определяется порядок $|\sigma|$, равный н. о. к. $\{r, s, \ldots, t\}$. Две подстановки $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{S}_n$ сопряжены в $\mathbf{S}_n$ тогда и только тогда, когда указанные множества $\{r, s, \ldots, t\}$ для них одинаковы.

Подгруппа $\mathbf{A}_n$ называется *знакопеременной группой* степени n. Если взять многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\text{def}}{=} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$ от коммутирующих переменных и применить к его индексам подстановку σ, то получим многочлен $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$ либо совпадающий с $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если σ четна, либо отличающийся от него знаком, если σ нечетна.

При $n \geqslant 3$ группа $\mathbf{S}_n$ некоммутативна: $((1, 2)(1, 3) = (1, 2, 3) \neq (1, 3)(1, 2) = (1, 3, 2))$. Очевидно, $\mathbf{A}_2 = E$, $\mathbf{A}_3 \simeq C(3)$. Группа $\mathbf{A}_4$ содержит собственную неединичную нормальную подгруппу $K = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4)(1, 4)(2, 3)\} \simeq C(2) \times C(2)$, фактор по которой $\mathbf{A}_4/K$ изоморфен $C(3)$.

Пример. Вот один из простейших примеров, показывающих, что свойство «быть нормальной подгруппой» не транзитивно. Подгруппа $L = \{e, (1, 2)(3, 4)\} \simeq C(2)$ нормальна в (абелевой) группе K, но не является нормальной в $\mathbf{A}_4$, так как сопряжение элементом $(1, 2, 3)$ переводит $(1, 2)(3, 4)$ в $(1, 3) \times (2, 4) \notin L$.

Начиная с $n = 5$ все знакопеременные группы $\mathbf{A}_n$ просты. Группа $\mathbf{S}_n$ обычно вкладывается в $\mathbf{S}_{n+1}$ отображением $\sigma \longmapsto \bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{\sigma}(n+1) = n + 1$. Объединение $\mathbf{S}_\infty \underset{\text{def}}{=} \bigcup \mathbf{S}_n$ симметрических групп называют *группой финитных подстановок*. Каждый элемент $\sigma \in \mathbf{S}_\infty$ является подстановкой множества $\mathbf{N}$, оставляющей на месте почти все символы $n \in \mathbf{N}$. Естественно определяется четность под-

становок из $\mathbf{S}_\infty$. Все четные постановки составляют группу $\mathbf{A}_\infty$ четных финитных подстановок. Группа $\mathbf{A}_\infty$ проста.

Теорема Кэли: отображение $G \to \operatorname{Symm} G$, при котором образ элемента $g \in G$ есть подстановка $h \mapsto hg$, $h \in G$ (правый сдвиг), является вложением.

Итак, любая группа G изоморфна группе подстановок $\bar{G} \leqslant \operatorname{Symm} G$. Если G — конечная группа порядка n, то она вложима в группу $\mathbf{S}_n$.

Рассмотрим теперь произвольную группу подстановок $G \leqslant \operatorname{Symm} M$. Элементы m_1, $m_2 \in M$ называются *G-эквивалентными*, если существует такая подстановка $g \in G$, что $g(m_1) = m_2$. Легко видеть, что G-эквивалентность действительно является отношением эквивалентности. Любой класс эквивалентности $[m]$, $m \in M$, называется *G-орбитой*. *Стабилизатор элемента* m в группе подстановок G — это подгруппа $\mathrm{St}_G(m) \underset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid g(m) = m\}$. Мощность орбиты $[m]$ равна индексу $|G : \mathrm{St}_G(m)|$. Группа подстановок G называется *транзитивной*, если все элементы множества M G-эквивалентны или, что равносильно, если в M имеется ровно одна орбита — само M. Группа подстановок G называется *полурегулярной*, если $\mathrm{St}_G(m) = E$ для любого $m \in M$. Если G к тому же еще и транзитивна, то она называется *регулярной* группой подстановок.

Легко видеть, что образ группы G в группе $\operatorname{Symm} G$, определенный описанным выше вложением, является регулярной группой подстановок.

Транзитивная абелева группа подстановок $A \leqslant \operatorname{Symm} M$ регулярна.

До сих пор мы рассматривали подгруппы симметрической группы $\operatorname{Symm} M$. Перейдем теперь к их прообразам относительно гомоморфизмов.

Гомоморфизм μ: $G \to \operatorname{Symm} M$ группы G в симметрическую группу называется *подстановочным представлением* группы G. Мощность $|M|$ именуется *степенью* представления μ. Представление называется *точным*, если оно является вложением.

Пусть G — группа, M — непустое множество. *Правым действием* G на M называется отображение ρ: $M \times G \to M$, $(m, g) \mapsto mg$, для которого $me = m$, $mg_1g_2 = (mg_1)g_2$ при всех $m \in M$, g_1, $g_2 \in G$. Аналогично, *левое действие* G на M — это отображение

λ: $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto gm$, для которого $em = m$, $g_1 g_2 m = g_1 (g_2 m)$, $m \in M$, g_1, $g_2 \in G$. От одного легко перейти к другому, полагая $gm = mg^{-1}$, $m \in M$, $g \in G$. В дальнейшем мы говорим о правом действии.

Любое представление определяет действие и наоборот.

Элементу $g \in G$ отвечает подстановка μ_g: $m \mapsto mg$, $m \in M$. Получаем гомоморфизм μ: $G \to \operatorname{Symm} M$, $g \mapsto \mu_g$. Наоборот, по гомоморфизму μ: $G \to \operatorname{Symm} M$, $g \mapsto \mu(g)$, определяем действие формулой $mg \underset{\text{def}}{=} \mu(g^{-1})(m)$.

Представление (действие) μ *транзитивно* [[*полу*]*регулярно*], если группа подстановок $\mu(G)$ транзитивна [[полу]регулярна]. *Стабилизатором элемента* $m \in M$ в произвольной группе G называется подгруппа $\operatorname{St}_G(m) \underset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \mu(g)\, m = mg = m\}$. Орбиту $[m]$ обозначают также mG. Мощность $|mG|$ совпадает с индексом $|G : \operatorname{St}_G(m)|$.

Приведем два чаще всего встречающихся типа представлений произвольной группы G.

Сопряжение. Пусть M — некоторая совокупность подмножеств группы G, замкнутая относительно сопряжений элементами из G. Для всякого $g \in G$ определим отображение σ_g: $M \to M$, где $\sigma_g(m) = m^{g^{-1}}$, являющееся действием. В этом случае $\operatorname{St}_G(m) = N_G(m)$; при этом заметим, что о мощности $|mG|$ уже говорилось на с. 71. Группа G действует сопряжением на множестве своих подгрупп, элементов, подгрупп [элементов] какой-либо нормальной подгруппы и т. д.

Правые сдвиги. Пусть M — некоторая совокупность подмножеств группы G, замкнутая относительно правых сдвигов на элементы из G. Для всякого $g \in G$ определим отображение ρ_g: $M \to M$, где $\rho_g(m) = mg$, являющееся действием G на M. Если M состоит из элементов группы G, то действие регулярно и соответствует вложению, указанному в теореме Кэли. Можно взять в качестве M множество всех правых смежных классов Hg группы G по подгруппе H.

Мы видели только что возможность индуцирования действия группы G на подмножество $N \subseteq M$, если N G-допустимо, т. е. из $n \in N$, $g \in G$ следует $ng \in N$.

Пусть A и B — группы подстановок на множествах M и N соответственно. Определим группу подстановок G множества $P = M \times N$, которая называется *подстановочным сплетением* групп A и B. Абстрактно эта группа G выглядит как полупрямое произведение базисной группы $\bar{A} = \prod A_n$ — прямого произведения групп A_n, $n \in N$, изоморфных A, на группу B, элементы которой действуют на $\bar{A}$ как подстановки индексов.

Если $a \in A$, $b \in B$, $n \in N$, то подстановки $a(n) \in \in A_n$ и b множества P задаются формулами

$$a(n)\colon\ (m, n) \longmapsto (ma, n),\ (m, n') \longmapsto (m, n'),\ \text{если}\ n \neq n',$$
$$b\colon\ (m, n) \longmapsto (m, nb).$$

При исследовании достаточно сложно устроенного объекта мы обращаем внимание на его фрагменты, а затем составляем по ним целостную картину. Фрагменты группы — это прежде всего ее подгруппы и эпиморфные образы. Упрощая, ограничимся конечно порожденными подгруппами и конечными эпиморфными образами.

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторое теоретико-групповое свойство. Группа G называется *локально-$\mathscr{C}$-группой*, если любая конечно порожденная подгруппа $H \leqslant G$ обладает свойством $\mathscr{C}$. Важными классами в теории групп являются возникающие таким способом *локально конечные*, *локально разрешимые*, *локально нильпотентные* группы.

Любая локально конечная группа является периодической. Обратное неверно. Существуют бесконечные конечно порожденные периодические группы (см. п. 1.5); при нечетном $n \geqslant 665$ существуют бесконечные конечно порожденные группы периода n (см. теорему Новикова — Адяна). Подробнее о свойствах локально конечных и периодических групп см. в п. 1.5.

Теоретико-групповое свойство $\mathscr{C}$ называется *локальным*, если любая группа G, являющаяся локально-$\mathscr{C}$-группой, является $\mathscr{C}$-группой. Например, коммутативность — локальное свойство, а конечность — нет.

Для локальности свойства $\mathscr{C}$ достаточно, чтобы $\mathscr{C}$ записывалось так называемыми квазиуниверсальными формулами исчисления предикатов (детальнее см., например, [17]).

Пусть $\varphi\colon G\to K$ — эпиморфизм групп. Многие важные свойства элементов, подгрупп, подмножеств группы G присущи также их образам в K. Например, если порядок элемента $g\in G$ делит n, то и порядок его образа $\varphi(g)\in K$ делит n; если элементы $g, f\in G$ перестановочны, то их образы $\varphi(g)$, $\varphi(f)\in K$ перестановочны. Эпиморфизмы сохраняют также сопряженность, возможность извлечь из элемента какой-либо корень и многое другое. Эпиморфизмы могут нарушать различия и изменять размеры. Разные элементы могут отобразиться в один, бесконечная подгруппа в конечную и т. п. Основная идея изучения группы методом ее аппроксимации состоит в рассмотрении достаточно большого множества ее эпиморфных образов, позволяющих восстанавливать наличие (или отсутствие) в группе того или иного свойства.

При определении аппроксимируемости рассматривается сохраняющееся при эпиморфизмах свойство $\mathscr{C}$ и класс групп $\mathscr{K}$, могущих служить эпиморфными образами при аппроксимации данной группы. Говорят, что группа G *аппроксимируется* относительно свойства $\mathscr{C}$ классом групп $\mathscr{K}$, если нарушение $\mathscr{C}$ в G ее элементами (подгруппами, подмножествами) влечет нарушение $\mathscr{C}$ их образами при некотором эпиморфизме $\varphi\colon G\to K$, $K\in\mathscr{K}$. Обычно $\mathscr{C}$ — это некоторый предикат. Приведем наиболее важные примеры.

Группа G называется *финитно аппроксимируемой* (ФА-*группой*), если для любого элемента $e\neq g\in G$ найдется эпиморфизм $\varphi_g\colon G\to K$ на конечную группу, при котором $\varphi_g(g)\neq e$. Условие ФА равносильно тому, что пересечение $M(G)$ всех нормальных подгрупп конечных индексов группы G равно единичной подгруппе E. По теореме Ремака факторгруппа $G/M(G)$ вложена в декартово произведение $\prod G/N_\lambda$, где $\{N_\lambda\}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечных индексов группы G. ФА-группа G вложена в декартово произведение конечных групп. Верно и обратное, любая подгруппа декартова произведения конечных групп есть ФА-группа.

Свойство ФА переносится на подгруппы и конечные расширения. Прямое сплетение $A \operatorname{wr} B$ ФА-групп A и B является ФА-группой тогда и только тогда, когда либо группа A абелева, либо группа B конечна.

Группа G называется *финитно аппроксимируемой относительно сопряженности* (ФАС-*группой*), если для любой пары не сопряженных между собой элементов $g_1, g_2 \in G$ найдется эпиморфизм $\varphi_{g_1, g_2}: G \to K$ на конечную группу, при котором образы $\varphi(g_1)$, $\varphi(g_2)$ не сопряжены в K.

Свойство ФАС не переносится на подгруппы и конечные расширения.

Группа G называется *финитно аппроксимируемой относительно вхождения* в [конечно порожденные] подгруппы (ФАВ- [ФАВ$_{\text{к. п.}}$-группой]), если для любой [конечно порожденной] подгруппы $H \leqslant G$ и любого элемента $g \notin H$ найдется эпиморфизм $\varphi_g: G \to K$ на конечную группу, при котором $\varphi_g(g) \notin \varphi(H) \leqslant K$.

Рассматривают также аппроксимируемость бесконечными группами, чаще — нильпотентными без кручения и свободными.

Очень важна связь между аппроксимируемостью и разрешимостью в группе алгоритмических проблем (см. п. 4.4).

Рассмотрим группы с операторами. Пусть G — группа, Θ — некоторое множество, каждому элементу θ которого сопоставлен эндоморфизм группы G с тем же обозначением. Множество Θ называется *областью операторов*, а группа G — *группой с операторами* или Θ-*группой*. Подгруппа $H \leqslant G$ называется Θ-*допустимой* или Θ-*подгруппой*, если для любых элементов $h \in H$, $\theta \in \Theta$ имеем $\theta(h) \in H$.

Примеры. 1) Любая группа G — группа с пустым множеством операторов. 2) Θ-подгруппами группы G при $\Theta = \operatorname{End} G$ являются эндоморфно допустимые, при $\Theta = \operatorname{Aut} G$ — автоморфно допустимые, при $\Theta = \operatorname{Inn} G$ — нормальные подгруппы. 3) Модуль A над кольцом K можно рассматривать как K-операторную абелеву группу, так как умножение (справа) на элемент $k \in K$ определяет эндоморфизм A.

Гомоморфизм Θ-*групп* $\varphi: G \to H$ кроме обычных свойств должен удовлетворять равенствам $\varphi(\theta(g)) = \theta(\varphi(g))$ для всех $g \in G$, $\theta \in \Theta$. Очевидным образом вводятся остальные «морфизмы». Факторгруппа G/N Θ-группы G по Θ-допустимой подгруппе N сама является Θ-группой $(\theta(Ng) \underset{\text{def}}{=} N\theta(g))$. [Суб] нормальный ряд или система Θ-группы G определяется как и раньше, только все подгруппы должны быть Θ-допустимыми (тогда существуют Θ-факторы).

Неединичная Θ-группа G называется *Θ-простой*, если в ней нет неединичных собственных Θ-подгрупп.

Имеет место полный аналог теоремы Шрайера.

Неединичная Θ-подгруппа $H \leqslant G$ называется *Θ-прямым множителем* G, если существует такая неединичная Θ-подгруппа $K \leqslant G$, что $G = H \times K$. Θ-группа G называется *прямо неразложимой*, если ее нельзя представить указанным способом в виде прямого произведения неединичных Θ-подгрупп. Если на Θ-группе G выполнены условия максимальности и минимальности для Θ-прямых множителей (они равносильны), то существует разложение

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$

в прямое произведение прямо неразложимых Θ-подгрупп.

Пусть G есть Θ-группа, в которой выполнены условия максимальности и минимальности для нормальных Θ-подгрупп. Если

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_r = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$$

— два разложения в прямое произведение прямо неразложимых Θ-групп, то $r = s$ и существует Θ-автоморфизм α группы G, индуцирующий тождественный автоморфизм на факторгруппе $G/C(G)$ (такие автоморфизмы называются *центральными*), что после подходящей перенумерации $\alpha(H_i) = K_i$ и $G = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_l \times H_{l+1} \times \ldots \times H_r$ для всех $l = 1, 2, \ldots, r$ (*теорема Крулля—Ремака—Шмидта*).

1.2. Свободные группы. Множество X порождающих элементов группы F называется *свободным множеством* или *базисом*, если любое отображение X в произвольную группу G продолжается до гомоморфизма F в G. Группа, обладающая множеством свободных порождающих, называется *свободной*.

Свободную группу часто обозначают буквой F, а если необходимо указать множество свободных порождающих X, то пишут $F(X)$ и говорят, что F — свободная группа над X.

Для любого множества X существует свободная группа $F(X)$. Свободные группы $F(X)$, $F(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y.

Мы видим, что свободная группа $F(X)$ полностью и однозначно определяется мощностью $\varkappa$ множества X. Поэтому она обозначается также символом $F_\varkappa$. Мощность $\varkappa$ называется *рангом свободной группы* $F_\varkappa$.

Удобно считать, что $F_0 = E$. Легко видеть, что $F_1 \simeq \mathbf{Z}$. Все остальные свободные группы $F_\varkappa$, $\varkappa \geqslant 2$, некоммутативны.

Произвольная группа G, порожденная множеством Y мощности ι, будет эпиморфным образом любой свободной группы $F_\varkappa$, если $\varkappa \geqslant \iota$. Отсюда следует, что любая группа G представима (неоднозначно) как факторгруппа $G = F/N$ любой свободной группы достаточно большого ранга.

Элемент $v \in F(X)$ записывается как слово $v = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $x_{i_j} \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в алфавите X. Считаем, что пустое слово записывает единицу. Слова v, w называются *графически равными*, что обозначается $v \overset{\circ}{=} w$, если они идентичны в своей записи. Очевидным образом вводятся понятия подслова (без пропусков букв), длины слова и т. д.

Операции вставки и вычеркивания подслов вида $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$, не меняют элемента, записываемого словом. Слова v, w называются *эквивалентными*, если одно из них получается из другого последовательным применением конечного числа операций указанного вида.

В любой группе G, порожденной множеством X, эквивалентные слова в алфавите X записывают равные элементы. В свободной группе $F(X)$ неэквивалентные слова в алфавите X записывают разные элементы. Можно считать, что свободная группа $F(X)$ состоит из классов эквивалентности $[v]$ слов в алфавите X относительно умножения $[u][v] \underset{\text{def}}{=} [uv]$, где uv обозначает слово, полученное приписыванием слова v справа к слову u.

Слово v в алфавите X называется *несократимым*, если v не содержит подслов вида $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$. Используя только операцию вычеркивания подслов $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$, можно провести к несократимому виду любое слово v. Значит, любое слово v эквивалентно несократимому слову.

Любой класс эквивалентности $[v]$ содержит только одно несократимое слово. Элементами свободной

группы $F(X)$ можно считать несократимые слова в алфавите X относительно операции умножения $vw \underset{\text{def}}{=} (vw)'$, где штрих означает переход от слова vw к эквивалентному ему несократимому слову. При таком подходе можно говорить о *длине элемента* свободной группы $F(X)$ относительно базиса X, имея в виду длину записи этого элемента в виде несократимого слова в алфавите X. Если $v \overset{\circ}{=} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ — несократимое слово, то через v^{-1} обозначим слово $x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \ldots x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$, записывающее обратный к v элемент.

Обычно не вдаются в подробности и говорят о словах в алфавите X как об элементах свободной группы $F(X)$, и наоборот.

Группа F, порожденная множеством X, является свободной группой над X в том и только том случае, если различные несократимые слова в алфавите X записывают в F разные элементы.

Примеры. 1) *Представление Санова группы* F_2. Группа матриц $G(m)$, порожденная множеством $X = \left\{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbf{N}\right\}$, при $m \geqslant 2$ свободна над X. Группа $G(1)$ несвободна. 2) *Представление Магнуса группы* $F_\varkappa$. Пусть $K = \mathbf{Z}[[Y]]$ — кольцо формальных степенных рядов с целыми коэффициентами от некоммутирующих переменных множества Y мощности $\varkappa$. Подгруппа $F(X) \leqslant K^*$ мультипликативной группы кольца K, порожденная множеством элементов $X = \{x_\alpha = 1 + y_\alpha \mid y_\alpha \in Y\}$, свободна над X.

Несократимое слово $v \overset{\circ}{=} x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $x_{i_j} \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$, называется *циклически несократимым*, если либо $i_1 \neq i_n$, либо $\varepsilon_1 = \varepsilon_n$. Любое несократимое слово w однозначно представимо в виде $w \overset{\circ}{=} uw'u^{-1}$, где w' уже циклически несократимо. В свободной группе $F(X)$ любое слово сопряжено с циклически несократимым словом. В свою очередь, все циклически несократимые слова, сопряженные с данным циклически несократимым словом $v \overset{\circ}{=} x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $x_{i_j} \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в свободной группе $F(X)$ исчерпываются циклическими перестановками слова v: $v_1 \overset{\circ}{=} v$, $v_2 \overset{\circ}{=} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1}$, $\ldots$, $v_n \overset{\circ}{=} x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$.

Отметим некоторые элементарные свойства свободных групп.

1) Свободные группы не имеют кручения.

2) Пусть v — несократимое слово, записанное в виде $v \stackrel{\circ}{=} uv'u^{-1}$, где v' — циклически несократимо. Корень k-й степени ($k \in \mathbf{N}$) из элемента v в группе $F(X)$ единственен и существует тогда и только тогда, когда слово v' графически равно произведению $ww \ldots w$ (k раз). Корень имеет вид $v_k \stackrel{\circ}{=} uwu^{-1}$. В частности, из любого элемента v можно извлечь корень максимальной степени $v_{\max}$.

3) Централизатор любого элемента $v \neq e$ свободной группы F есть бесконечная циклическая группа $\langle v_{\max} \rangle$. Элементы $u, v \in F$ перестановочны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной циклической подгруппе. Центр группы $F_\varkappa$ при $\varkappa \geqslant 2$ равен единичной подгруппе E.

Любая подгруппа произвольной свободной группы сама свободна (*теорема Нильсена — Шрайера*).

Пусть H — подгруппа свободной группы $F(X)$. Система T представителей правых смежных классов $F(X)$ по H называется *шрайеровой*, если $e \in T$ и любое начальное подслово несократимого слова $v \in T$ также принадлежит T. Для любой подгруппы H произвольной свободной группы $F(X)$ существует шрайерова система представителей T. В п. 1.1 построено множество порождающих элементов $S(T, X)$ подгруппы H. Базисом подгруппы H как свободной группы может быть выбрано подмножество $S(T, X)_0 \subseteq S(T, X)$, состоящее из всех неединичных элементов.

Пусть $\varkappa$ — ранг группы $F(X)$, j — индекс неединичной подгруппы $H \leqslant F(X)$, ι — ранг H как свободной группы. Имеет место формула: $(\varkappa - 1) j = \iota - 1$.

Приведем теперь некоторые сведения о базисе конечно порожденной подгруппы $H \leqslant F(X)$, заданной своими порождающими элементами. Пусть $|w|_X$ — длина слова w в алфавите X.

Для слова четной длины естественно определяются его левая и правая половины. Пусть $w \stackrel{\circ}{=} uv$, где u — слово наименьшей возможной длины такой, что $|u|_X > \frac{1}{2} |w|_X$. Слово u называется старшим началом слова w. Аналогично определяется понятие старшего конца слова w. Подмножество $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

непустых несократимых слов в алфавите X называется *нильсеновым*, если выполнены условия: 1) старшее начало и старший конец любого слова w_i не является, соответственно, началом или концом ни одного из слов w_j^ε, $j \neq i$, $\varepsilon = \pm 1$, 2) левая половина любого слова w_i не является началом ни одного из слов w_j^ε, $j \neq i$, $\varepsilon = \pm 1$. Любое нильсеново множество слов W составляет базис порожденной им подгруппы $H = \langle W \rangle$.

Если V — бесконечное множество слов в группе $F(X)$, каждое конечное подмножество которого нильсеново, то V составляет базис порожденной им подгруппы $H = \langle V \rangle$.

Пример. В свободной группе $F_2(X)$, где $X = \{x_1, x_2\}$, множество элементов $V = \left\{x_2^m x_1 x_2^{-m} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}\right\}$ составляет базис подгруппы $H = \langle V \rangle \simeq F_{\omega_0}$.

Отметим в этой связи, что локально свободная группа не обязана быть свободной. Пример тому — группа $\mathbf{Q}$, в которой любая конечно порожденная подгруппа — циклическая бесконечного порядка.

Следующие преобразования упорядоченного набора $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ элементов свободной группы $F(X)$ называется *нильсеновыми*: 1) перестановка элементов, 2) замена w_i на w_i^{-1}, 3) замена w_i на $w_i w_j^\varepsilon$, $i \neq j$, $\varepsilon = \pm 1$, 4) замена w_i на $w_j^\varepsilon w_i$, $i \neq j$, $\varepsilon = \pm 1$.

Нильсеновы преобразования не изменяют подгруппы, порожденной множеством W. Произвольный набор W можно перевести конечной последовательностью нильсеновых преобразований, не увеличивающих на каждом шаге суммарную длину слов, в набор $W' = \{w_1', w_2', \ldots, w_k', 1, 1, \ldots, 1\}$, где $W_H = \{w_1', w_2', \ldots, w_k'\}$ — нильсеново множество. Отсюда следует, что $H = \langle W \rangle = \langle W_H \rangle$, причем W_H — базис H. Переход от W к W_H осуществляется алгоритмически с помощью обычного перебора.

Свободная группа F_n, $n \in \mathbf{N}$, не может порождаться менее чем n элементами. Любое множество из n элементов, порождающее F_n, является ее базисом.

Группа P называется *проективной*, если для любых групп G и H, любых эпиморфизма $\varphi: G \to H$ и

гомоморфизма $\psi\colon P\to H$ существует гомоморфизм $\chi\colon P\to G$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\ P \arrow[ur, dashed, "\chi"] \arrow[rr, "\psi"'] & & H \end{tikzcd}$$

Любая свободная группа $F(X)$ проективна. Верно и обратное, любая проективная группа свободна.

Подгруппа H группы G называется ее *ретрактом*, если существует эпиморфизм $\alpha\colon G\to H$, тождественный на H (это равносильно существованию полупрямого разложения $G=N\rightthreetimes H$). Все ретракты свободной группы F_n, $n\in\mathbf{N}$, допускают следующее описание: если $R\leqslant F_n$ — ретракт, то найдется множество свободных порождающих $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ группы F_n и элементы вида $r_1=x_1u_1$, $r_2=x_2u_2$, $\ldots$, $r_k=x_ku_k$, $u_i\in\langle\langle x_{k+1}, \ldots, x_n\rangle\rangle$, свободно порождающие R. Простейший случай: $r_1=x_1$, $r_2=x_2$, $\ldots$, $r_k=x_k$, т. е. R — свободный множитель F_n (см. п. 1.3). Не все ретракты групп F_n их свободные множители.

Любая конечно порожденная подгруппа H свободной группы F является свободным множителем некоторой подгруппы $G\leqslant F$ конечного индекса (*теорема М. Холла*).

Любая свободная группа F обладает *свойством Хаусона*: пересечение ее конечно порожденных подгрупп конечно порождено. Если F_m, $F_n\leqslant F$ — подгруппы конечных рангов свободной группы и $F_r=F_m\cap F_n$, то $r-1\leqslant 2(m-1)(n-1)-\min\{m-1, n-1\}$. Более того, если F_m, F_n допускают вложения в подгруппы A, $B\leqslant F$ в качестве подгрупп конечных индексов i, j соответственно, то $r-1\leqslant 2(m-1)(n-1)-\min\{j(m-1), i(n-1)\}$. Если пересечение F_r имеет конечный индекс в одной из пересекаемых подгрупп, скажем, в F_m, $m\neq 1$, то $|F_m:F_r|<2(n-1)$. В частности, при $n=2$ имеем $F_m\leqslant F_n$. Кроме того, из конечности индексов $|F_m:F_r|$, $|F_n:F_r|$ следует конечность индекса $|\langle F_m, F_n\rangle:F_r|$ (Burns R. G., Imrich W., Servatius B.//Can. Math. Bull. — 1986. — V. 29, N 2. — P. 204—207).

Неединичная нормальная подгруппа N свободной группы F_n, $n \in \mathbf{N}$, конечно порождена тогда и только тогда, когда индекс $|F_n : N|$ конечен.

Свободные группы аппроксимируются относительно сопряженности классом конечных p-групп для любого простого числа p. Свободные группы финитно аппроксимируемы относительно вхождения в конечно порожденные подгруппы. Заметим, что последним свойством не обладает прямой квадрат $F_2 \times F_2$.

Пересечение всех членов нижнего центрального ряда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n F$ свободной группы F равно E. Тем более верно, что пересечение всех членов ряда коммутантов $\bigcap_{n=0}^{\infty} \delta_n F$ равно E. Все факторы $\gamma_i F/\gamma_{i+1} F$ $(i \in \mathbf{N})$, $\delta_j F/\delta_{j+1} F$ $(j = 0, 1, \ldots)$ — свободные абелевы группы (см. п. 1.4). Если ранг группы F конечен, то факторы $\gamma_i F/\gamma_{i+1} F$ $(i \in \mathbf{N})$ также имеют конечные ранги, однако, в этом случае лишь фактор $\delta_0 F/\delta_1 F = F/F'$ среди факторов ряда коммутантов имеет конечный ранг.

Группа F_{ω_0} обладает автоморфно, но не эндоморфно допустимыми подгруппами. Таковы, например, наименьшие автоморфно допустимые подгруппы группы $F(X)$, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, содержащие элемент $v = \left[x_1^2, (x_1^2)^{x_2}, (x_1^2)^{x_3}\right]$ (см. [47]) или элемент $w = x_1^4 x_2^4$ (Клейман Ю. Г.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 37—74).

Пусть G — конечно порожденная группа с заданным (конечным) множеством порождающих элементов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Функцией роста* группы G относительно X называется функция γ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, сопоставляющая числу $n \in \mathbf{N}$ число всех различных элементов группы G, записываемых (несократимыми) словами в алфавите X длины не больше n. Пусть $\gamma_{\text{н}}(n)$ — число всех несократимых слов в алфавите X длины не больше n. Очевидно, что в любом случае $\gamma(n) \leqslant \gamma_{\text{н}}(n)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Как уже отмечалось, $\gamma = \gamma_{\text{н}}$ в том и только в том случае, если X — базис (свободной) группы F.

На множестве функций роста вводится отношение предпорядка $\leqslant$: $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$ тогда и только тогда, когда найдется $q \in \mathbf{N}$ такое, что $\gamma_1(n) \leqslant \gamma_2(qn)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Полагаем $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$ и $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$. Класс

эквивалентности $[\gamma]$, содержащий функцию роста γ группы G, не зависит от выбора множества порождающих X и называется *степенью роста* группы G.

Функция $\gamma_{\text{н}}(n)$ эквивалентна показательной функции, для определенности 2^n. Более того, если группа G содержит свободную подгруппу F_2 (а значит, и F_{ω_0}), то ее функция роста также эквивалентна 2^n. Функция роста любой конечно порожденной нильпотентной группы эквивалентна какой-либо степенной функции $n^k (k \in \mathbf{N})$. Известно, что почти разрешимая группа G имеет степенной рост (в понятном смысле) тогда и только тогда, когда она почти нильпотентна. В противном случае G имеет показательный рост. Класс групп, каждую из которых можно получить из конечных и абелевых групп последовательностью операций взятия подгрупп, эпиморфных образов, расширений и прямых пределов, называют *классом элементарных групп*. Для него также справедливо высказанное выше утверждение: либо элементарная группа G почти нильпотентна, и тогда у нее степенной рост, либо — нет, и тогда рост показательный.

Для любого простого числа p существует континуум неизоморфных 2-порожденных p-групп, функции роста которых не эквивалентны ни степенной, ни показательным функциям. Существуют группы без кручения с тем же свойством. (Григорчук Р. И.//Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 4. — С. 383—394; Мат. сб. — 1985. — Т. 126, № 2. — С. 194—214).

Интересна связь между наличием в группе свободной подгруппы, функцией роста группы G и возможностью определить в пространстве всех ограниченных функций над группой G инвариантное среднее (см. [14]). Группа G называется аменабельной, если такая возможность реализуема. Все элементарные группы (в том числе, все локально разрешимые группы) аменабельны. Существование неэлементарных аменабельных групп вытекает из цитированного выше результата Григорчука. Все группы непоказательного роста аменабельны. Конечно порожденные периодические группы не элементарны.

Отметим также, что достаточным признаком неаменабельности группы G является наличие в ней подгруппы F_2. Этот признак не является необходимым: группы из теоремы Ольшанского (см. 150)

аменабельны и, очевидно, не содержат F_2 (Ольшанский А. Ю.//Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 4. — С. 199—200); то же самое верно относительно свободных бернсайдовых групп $B_m(n)$, где $m \geqslant 2$, n нечетно и $n \geqslant 665$ (Адян С. И.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 46, № 6. — С. 1139—1149).

Говорят, что для группы G имеет место *альтернатива Титса*, если любая конечно порожденная подгруппа H в G либо почти разрешима, либо содержит F_2. Всякая матричная группа над полем обладает более сильным свойством. Она либо есть расширение разрешимой группы посредством матричной периодической группы, либо содержит подгруппу F_2. Для конечно порожденной матричной группы G или в случае, если поле имеет характеристику нуль, заключение эквивалентно приведенному ранее (см. [40]).

Группа G называется *делимой* (раньше чаще говорили «*полной*»), если для любого элемента $g \in G$, любого числа $n \in \mathbf{N}$ существует элемент $f \in G$ такой, что $f^n = g$ (f — «корень n-й степени из элемента g»). *R-группой* называется группа с однозначным извлечением корней (если $f_1^n = f_2^n$, $n \in \mathbf{N}$, то $f_1 = f_2$). Делимая R-группа именуется *D-группой*. Свободные группы, нильпотентные группы без кручения являются R-группами. Известно, что любую группу G можно вложить в делимую группу $\tilde{G}$. При этом, если G периодична, локально нильпотентна или разрешима ступени l, то $\tilde{G}$ можно выбрать соответственно периодичной, локально нильпотентной или разрешимой ступени l группой.

Любая свободная группа F вложима в делимую группу $F^{\mathbf{Q}}$, построение которой можно осуществить вполне определенным образом. При этом $F^{\mathbf{Q}}$ оказывается минимальной среди делимых групп, содержащих F (Lyndon R.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1960.— V. 96, N 3. — P. 518—533).

Аналогичное утверждение верно, если заменить F на нильпотентную группу без кручения или метабелеву R-группу G. Группа $G^{\mathbf{Q}}$ в этом случае также нильпотентна (той же ступени) или метабелева (см. [47]).

Можно определить общее понятие группы G над кольцом K с 1, потребовав, чтобы для каждого $k \in K$

отображение $g \mapsto g^k$ отвечало условиям:

$$g^1 = g, \quad g^{k_1+k_2} = g^{k_1}g^{k_2},$$
$$(g^{k_1})^{k_2} = g^{k_1k_2}, \quad (hgh^{-1})^k = hg^kh^{-1},$$
$$g, h \in G, \quad k, k_1, k_2 \in K.$$

Относительно такого подхода и конструктивных построений F^K см. упомянутую выше работу Линдона.

Относительно основных определений и свойств, касающихся групповых колец $\mathbf{Z}G$ и групповых алгебр PG см. п. III. 2.3. *Дифференцированием* в групповом кольце $\mathbf{Z}G$ называется любое отображение D: $\mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}G$, удовлетворяющее условиям:

$$D(r_1 + r_2) = D(r_1) + D(r_2), \quad D(r_1r_2) = D(r_1)\varepsilon(r_2) + r_1D(r_2),$$

где ε — гомоморфизм тривиализации. Подчеркнем, что это определение отлично от стандартного дифференцирования в кольце из п. III 5.5. Дифференцирование D достаточно определить на группе G, а затем продолжить на $\mathbf{Z}G$ по линейности. Сумма дифференцирований снова дифференцирование. Если D — дифференцирование, $r_0 \in \mathbf{Z}G$, то определимо дифференцирование Dr_0: $r \mapsto D(r)r_0$. Заметим, что для любого дифференцирования D выполнены свойства: $D(1) = 0$, $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)$, $D(g^n) = \frac{g^n - 1}{g - 1}D(g)$, если $1 \neq g \in G$, $n \in \mathbf{Z}$, где $\frac{g^n - 1}{g - 1} = g^{n-1} + g^{n-2} + \ldots + 1$ при $n > 0$, $\frac{g^n - 1}{g - 1} = -g^{-1} - g^{-2} - \ldots - g^n$ при $n < 0$.

Пусть F — свободная группа над X. Всякому $x_i \in X$ соответствует единственное дифференцирование $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ в кольце $\mathbf{Z}F$, называемое (частным) *дифференцированием Фокса* по x_i, такое, что

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i. \end{cases}$$

Для любых элементов $r_1, r_2, \ldots \in \mathbf{Z}F$ найдется одно и только одно дифференцирование в кольце $\mathbf{Z}F$, что $D(x_k) = r_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Более того, для любого $r \in \mathbf{Z}F$ имеем $D(r) = \sum\limits_i \frac{\partial r}{\partial x_i} r_i$. Дифференцированием является отображение $r \mapsto r - \varepsilon(r)$, $r \in \mathbf{Z}F$.

Основной формулой дифференцирования называют равенство

$$r-\varepsilon(r)=\sum_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_i-1).$$

Если $r=f\in F$, то получаем $f-1=\sum\limits_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-1)$. Если элемент $f=f(h_1, h_2, \ldots, h_n)\in F$ записан как слово от $h_1, h_2, \ldots, h_n\in F$, то для любого дифференцирования D имеем равенство $D(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial h_i}D(h_i)$.

Важным является следующее обобщение. Пусть $N\trianglelefteq F$, φ: $F\to F/N$ — естественный гомоморфизм, определяющий гомоморфизм колец φ: $\mathbf{Z}F\to\mathbf{Z}F/N$ с тем же обозначением. Будем рассматривать композиции $D\varphi$ для дифференцирований кольца $\mathbf{Z}F$, получая значения в $\mathbf{Z}F/N$. Ограничимся частными дифференцированиями. Получающееся отображение $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\varphi=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$: $\mathbf{Z}F\to\mathbf{Z}F/N$ назовем *частным дифференцированием со значениями в* $\mathbf{Z}F/N$. При этом остаются справедливыми аналоги приведенных выше формул.

Все значения $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varphi$ элемента $f\in F$ равны нулю в том и только том случае, если $f\in N'$. Элемент $f\in F$ принадлежит N тогда и только тогда, когда $\sum\limits_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varphi(\varphi(x_i)-1)=0$.

Эти утверждения позволяют рассматривать $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\varphi$ как частные дифференцирования группы F/N' или кольца $\mathbf{Z}F/N'$ со значениями в кольце $\mathbf{Z}F/N$. Они играют важную роль при исследовании групп типа F/N'.

Любую абелеву нормальную подгруппу A группы G можно превратить в (левый) модуль над кольцом $\mathbf{Z}G$, полагая

$$a^{\sum r_g g}\underset{\text{def}}{=}\prod (a^g)^{r_g},\quad r_g\in\mathbf{Z},\quad g\in G.$$

Можно также рассматривать A как модуль над кольцом $\mathbf{Z}G/A$, переходя от элементов $g\in G$ к их обра-

зам в G/A (действие определяется как $\bar{g}a = a^g$, где g — прообраз $\bar{g}$ в G, и не зависит от выбора g).

В частности, если $N \trianglelefteq F$, то $\bar{N} = N/N'$ — модуль над кольцом $\mathbf{Z}F/N$, который называется модулем соотношений.

Пусть F/N нециклична, тогда для любого элемента $0 \neq r \in \mathbf{Z}F/N$ найдется элемент $a \in \bar{N}$ с условием $a^r \neq 0$ (см. [47]).

В частности, центр группы F/N' лежит в N/N'.

Пусть G — произвольная группа, $\mathfrak{g}$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}G$. Подгруппа $D_iG \underset{\text{def}}{=} G \cap (1 + \mathfrak{g}^i)$, $i \in \mathbf{N}$, называется *i-й размерной подгруппой* группы G. Легко показать, что $\gamma_i G \leqslant D_i G$ для любого $i \in \mathbf{N}$.

Для свободной группы F имеем $\gamma_i F = D_i F$ при любом $i \in \mathbf{N}$. Справедливо более общее утверждение: если факторы нижнего центрального ряда группы G — группы без кручения, то $D_i G = \gamma_i G$ при любом $i \in \mathbf{N}$.

Для любой группы G имеем $\gamma_1 G = D_1 G$, $\gamma_2 G = D_2 G$; если G является p-группой (простое $p \geqslant 3$), то $\gamma_3 G = D_3 G$. Существует 2-группа G, для которой $|D_4 G/\gamma_4 G| = 2$. Пока нет примеров групп G, для которых один из факторов $D_n G/\gamma_n G$ содержал бы нетривиальный элемент нечетного порядка.

Пусть $b_m =$ н. о. к. $\{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $c_1 = c_2 = 1$ и $c_n = \prod\limits_{i=1}^{n-2} b_i^{\binom{n-2}{i}}$ для $n \geqslant 3$. Тогда для любой группы G, любого $n \in \mathbf{N}$, период группы $D_n G/\gamma_n G$ делит c_n. В частности, если G является p-группой (p — простое), то $D_n G = \gamma_n G$ при $n \leqslant p + 1$ (*теорема Сёгрена*). См. [87].

Пусть L — кольцо Ли, порожденное в кольце $\mathbf{Z}G$ множеством элементов $\{g - 1 \mid g \in G\}$, L^i ($i \in \mathbf{N}$) — его лиева степень. Пусть $I^i = I(L^i)$ — идеал, порожденный в $\mathbf{Z}G$ кольцом L^i. Подгруппа $LD_i G \underset{\text{def}}{=} G \cap (1 + {}^i)$ называется *i-й лиевой размерной подгруппой* группы G. При любом i имеем $\gamma_i G \leqslant LD_i G \leqslant D\ G$. Для любой группы G, любого $i \leqslant 6$ имеем $\gamma_i G = LD_i G$. Вопрос о совпадении $\gamma_i G = LD_i G$ для всех $i \in \mathbf{N}$ пока открыт.

1.3. Задания и конструкции групп. Пусть G — произвольная группа, X — множество порождающих ее

элементов. *Соотношением* группы G относительно X называется равенство $v = 1$, где v — любое слово в алфавите X, записывающее единицу группы G. Допустимо называть соотношением также равенство $u = v$, где u, v — слова в алфавите X, записывающие одинаковые элементы группы G. Ясно, что в этом случае мы имеем дело с соотношением $uv^{-1} = 1$.

Левые части всех соотношений $v = 1$ группы G образуют нормальную подгруппу N свободной группы $F = F(X)$. Подгруппа N — это ядро гомоморфизма F на G, при котором X отображается тождественно. В этом случае $G \simeq F/N$.

Подмножество $R \subseteq N$ называется *множеством определяющих слов* группы G относительно X, если N является нормальным замыканием R в F. Соответствующее множество соотношений $\{r = 1 \mid r \in R\}$ называется *множеством определяющих соотношений* группы G относительно X. Говорят, что соотношение $w = 1$ *вытекает*, *следует* или *выводимо* из множества соотношений $\{s = 1 \mid s \in S\}$, если $w \in \langle\langle S \rangle\rangle$ в группе F. Любое соотношение $w = 1$ вытекает из множества определяющих соотношений $\{r - 1 \mid r \in R\}$. Выбор множества определяющих слов R неоднозначен.

Пусть R — множество определяющих слов группы G в алфавите X. Говорят, что $\langle X \| \{r = 1 \mid r \in R\} \rangle$ или, более кратко, $\langle X \| R \rangle$ — *задание* (или *представление*) группы G через порождающие элементы и определяющие соотношения. В последнее время в советскую литературу введен термин *генетический код* $\langle X \| R \rangle$ (или просто *код*) группы G.

Если группа G задана специальным образом (матрицами, подстановками и т. п.), то для полноты картины вместе с кодом $\langle X \| R \rangle$, задающим G как абстрактную группу, необходимо привести отображение φ множества X на множество конкретных порождающих элементов группы G. Задание $\langle X \| R \rangle_\varphi$ называется *копредставлением* группы G.

Примеры. 1) $\langle X \| \varnothing \rangle$ — код свободной группы $F(X)$. 2) $\langle x \| x^n = 1 \rangle$ — код циклической группы $\mathbf{Z}(n)$; 3) $\langle x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{n-1} \| x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_{n-1}^2 = 1, (x_i x_{i+1})^3 = 1 \ (1 \leqslant i \leqslant n-2), (x_j x_k)^2 = 1 \ (1 \leqslant j \leqslant k-2 \leqslant n-3) \rangle_\varphi$, где φ: $x_i \mapsto (i, i+1)$, — копредставление симметрической группы $\mathbf{S}_n$.

Коды многих хорошо известных групп приведены в книге Коксетера и Мозера [21].

При заданном множестве $R \subseteq F$ важно иметь хорошее представление о словах $w \in F$, выводимых из R. Для этой цели эффективен геометрический метод исследования. Представим его основные компоненты (подробности см. в [30], [48]).

Будем обозначать через ∂S границу, а через $\bar{S}$ — замыкание любого подмножества S плоскости $\mathbf{R}^2$. *Карта* — это конечное множество M, состоящее из *вершин* (точек $\mathbf{R}^2$), *ребер* (ограниченных гомеоморфных образов открытого единичного интервала в $\mathbf{R}^2$) и *областей* (ограниченных гомеоморфных образов открытого единичного круга в $\mathbf{R}^2$). Различные составляющие не пересекаются и удовлетворяют следующим требованиям: 1) если e — ребро, то $\overline{\{e\}} = e \cup \{v\} \cup \{w\}$ для некоторых вершин v, w, 2) граница ∂O каждой области есть связное множество, совпадающее с $\overline{\{e_1\}} \cup \overline{\{e_2\}} \cup \ldots \cup \overline{\{e_n\}}$ для подходящих ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Зафиксируем для каждого ребра e одну из двух возможных ориентаций, что позволяет говорить о его начале $\alpha(e)$ и конце $\omega(e)$ — вершинах из M. То же самое ребро e с противоположной ориентацией обозначается e^{-1}, его начало $\alpha(e^{-1}) = \omega(e)$, конец $\omega(e^{-1}) = \alpha(e)$. Удобно считать, что $(e^{-1})^{-1} = e$. *Путь* p — это последовательность ребер $e_1, e_2, \ldots, e_m$ такая, что $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$. Путь p *замкнут*, если его начало $\alpha(p) \underset{\mathrm{def}}{=} \alpha(e_1)$ совпадает с концом $\omega(p) \underset{\mathrm{def}}{=} \omega(e_m)$, *приведен*, если $e_i \neq e_{i+1}^{-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. Очевидным образом определяется *обратный путь* p^{-1}, *длина пути* и т. п. Выберем на $\mathbf{R}^2$ одну из двух возможных ориентаций и ориентируем в соответствии с ней каждую область O. Для любой точки $v \in \partial O$ существует единственный замкнутый приведенный путь p с началом в v, обходящий O в соответствии с заданной ориентацией. Если M связна и односвязна, то аналогично определяется замкнутый приведенный путь p, обходящий ∂M в соответствии с заданной ориентацией и начинающийся (кончающийся) в любой заданной вершине $v \in \partial M$. Такие пути назовем *граничными*.

Диаграммой D над множеством циклически несократимых слов $R \subseteq F(X)$ называется пара, состоящая

из связной односвязной карты M и функции φ, сопоставляющей каждому ребру $e \in M$ элемент $\varphi(e) = x^{\varepsilon}$, $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$, причем $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1}$. Требуется, чтобы для любого (приведенного) граничного пути $p = e_1, e_2, \ldots, e_m$ произвольной области O слово

$$\varphi(p) \underset{\text{def}}{\overset{\circ}{=}} \varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_m)$$

являлось бы циклической перестановкой одного из слов $r \in R^{\pm 1}$.

Лемма ван Кампена: несократимое слово v принадлежит нормальному замыканию $\langle\langle R\rangle\rangle$ множества циклически несократимых слов $R \subseteq F(X)$ в том и только в том случае, если существует диаграмма D над R и такой (приведенный) граничный путь $p = e_1, e_2, \ldots, e_n$ границы ∂M соответствующей карты M, что $v \overset{\circ}{=} \varphi(p)$.

Более того, можно выбрать такую диаграмму D с указанными свойствами, что для любой пары ее областей O_1, O_2 и их общего граничного ребра $e \in \partial O_1 \cap \partial O_2$ справедливо $\varphi(p_1) \neq \varphi(p_2)$, если граничные пути этих областей имеют вид ep_1 и $e^{-1}p_2^{-1}$. Такие диаграммы называются *редуцированными* (*приведенными*).

Лемма ван Кампена позволяет использовать в исследованиях не только наглядную интуицию, но и различные формулы и неравенства из комбинаторной геометрии (см. [30], [48]).

Аналогичным образом строятся также так называемые кольцевые диаграммы, внутренний и внешний граничные пути которых «записывают» сопряженные по модулю $\langle\langle R\rangle\rangle$ слова группы $F(X)$ (см. [30]).

Очевидна связь с алгоритмическими проблемами равенства и сопряженности в группах (см. п. 4.4).

Введем на множестве всех кодов отношение эквивалентности, полагая $\langle X \| R\rangle \sim \langle Y \| S\rangle$, если изоморфны группы $F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle$ и $F(Y)/\langle\langle S\rangle\rangle$.

Элементарными преобразованиями Тице кода $\langle X \| R\rangle$ называются преобразования следующих типов: а) добавление к R слова $v \in \langle\langle R\rangle\rangle$; б) вычеркивание из R слова $w \in \langle\langle R \setminus \{w\}\rangle\rangle$; в) добавление к X буквы $y \notin X$ с одновременным добавлением к R слова $v \overset{\circ}{=} yw^{-1}$, где w — любое слово в алфавите X; г) удаление из X буквы x, если в R есть слово $v \overset{\circ}{=} xw^{-1}$,

где w — слово в алфавите $X \setminus \{x\}$, с одновременной заменой x на w во всех словах $r \in R$.

Теорема Тице: коды групп эквивалентны тогда и только тогда, когда существует переход от одного к другому последовательностью (возможно, бесконечной) преобразований Тице.

Если эквивалентные коды конечны, т. е. состоят из конечных множеств порождающих и соотношений, то переход в теореме Тице можно осуществить конечной последовательностью преобразований. Заметим, что даже в этом случае нет эффективного способа произвести указанный переход в произвольном случае. См. по этому поводу п. 4.4.

Пусть $\langle X \| R \rangle$ — код группы G. Отображение φ множества X в произвольную группу H продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi}$ группы G в группу H в том и только том случае, если при гомоморфизме $\tilde{\varphi}$ группы $F(X)$, продолжающем φ (и существующем по свойству базиса свободной группы), определяющие слова из R переходят в единицу.

Для проверки приведенного условия нужно записать определяющие слова $r \in R$ в алфавите X, а затем в каждое из них вместо букв $x \in X$ подставить их образы $\varphi(x) \in H$ и посмотреть, будет ли получившееся слово записывать единицу в группе H.

Код группы G/N записывается по коду $\langle X \| R \rangle$ группы G следующим образом. Пусть U — множество слов в алфавите X, записывающих такое множество элементов группы G, нормальное замыкание которого в G совпадает с N. Тогда группа G/N имеет код $\langle X \| R \cup U \rangle$.

Покажем теперь, как, зная код $\langle X \| R \rangle$ группы G, выписать код $\langle Y \| V \rangle$ ее подгруппы H. Считаем, что $G = F/N$, где $F = F(X)$, $N = \langle\langle R \rangle\rangle$. Пусть $\bar{H}$ — полный прообраз H в F относительно естественного гомоморфизма F на F/N. Пусть T — шрайерова система представителей правых смежных классов F по $\bar{H}$. Пусть $Y = S(T, X)_0$ — множество свободных порождающих группы $\bar{H}$, определенное в п. 1.2. Если $h \in \bar{H}$, то через $\rho(h)$ обозначим запись h в виде (несократимого) слова в алфавите Y (алгоритм получения такой записи описан в п. 1.1, нужно только вычеркивать элементы $S(T, X)$, равные 1 и поэтому не входящие в $S(T, X)_0$).

Пусть V — множество всех слов в алфавите Y вида $\rho(trt^{-1})$, $t \in T$, $r \in R$, тогда код $\langle Y \| \tilde{V} \rangle$ задает подгруппу $H \leqslant G$.

Группа G называется *конечно определенной*, если существует задающий G конечный код $\langle X \| R \rangle$.

Для любого кода $\langle X \| R \rangle$ конечно определенной группы G найдется конечный подкод $\langle X_1 \| R_1 \rangle$, $X_1 \subseteq X$, $R_1 \subseteq R$, также задающий группу G. Расширение любой конечно определенной группы посредством конечно определенной группы снова конечно определено.

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ — конечный или счетный алфавит. Существуют различные эффективные способы нумерации (полугрупповых) слов вида $y_{k_1} y_{k_2} \ldots y_{k_n}$ в алфавите Y натуральными числами. Например, можно сопоставить слову $w \overline{\overline{\circ}} y_{k_1} y_{k_2} \ldots y_{k_n}$ номер $\gamma(w) \underset{\mathrm{def}}{=} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, где в качестве p_l берется l-е простое число. Соответствие $w \to \gamma(w)$, как легко видеть, взаимно однозначное. Сопоставим конечному или счетному алфавиту $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ алфавит $Y = X^{\pm 1} = \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots\}$. Любому (групповому) слову w в алфавите X соответствует (полугрупповое) слово w' в алфавите Y. Определим $\gamma(w)$ как $\gamma(w')$. Можно говорить о нумерации элементов группы $F(X)$, рассматривая их как несократимые слова в алфавите X. Пустому слову присваиваем при этом номер 1. Подмножество $U \subseteq F(X)$ называется *рекурсивным*, *рекурсивно перечислимым* и т. п., если рекурсивно, рекурсивно перечислимо и т. п. соответствующее подмножество номеров $\{\gamma(u) \mid u \in U\} \subseteq \mathbf{N}$. Если вместо γ взять какую-либо другую эффективную нумерацию δ, то совокупности рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств не изменяются.

Группа G называется *рекурсивно определенной*, если для нее существует код $\langle X \| R \rangle$ с конечным множеством X и рекурсивно перечислимым множеством R. Оказывается, что в этом случае группа G обладает также кодом $\langle X \| \tilde{R} \rangle$ с рекурсивным множеством $\tilde{R}$.

Конечно порожденная группа G рекурсивно определена тогда и только тогда, когда G вложима в некоторую конечно определенную группу (*теорема Хигмана*).

Группа H называется *универсальной группой класса* $\mathscr{K}$, если любая группа $K \in \mathscr{K}$ вложима в H.

Если при этом $H \in \mathscr{K}$, то H называется *универсальной $\mathscr{K}$-группой*.

Существуют универсальные конечно определенные группы.

Любая универсальная конечно определенная группа содержит изоморфные образы всех рекурсивно определенных групп. Множество рекурсивно определенных групп таким образом счетно. Существует континуум конечно порожденных не рекурсивно определенных групп.

Сейчас известны примеры универсальных конечно определенных групп с 12 определяющими соотношениями. Точная нижняя граница r числа соотношений универсальных конечно определенных групп пока не установлена. Можно гарантировать, что $r \geqslant 2$, так как группы с одним соотношением имеют много специфических свойств (см. ниже) и по этой причине не могут быть универсальными. Скорее всего, $r = 2$.

Рассмотрим некоторые классы конечно определенных групп.

Группы с одним соотношением $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \| r = 1 \rangle$, где r — циклически несократимое слово из $F_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладают следующими свойствами. 1) Если из r не извлекается корень собственной степени в F_n, то группа G не имеет кручения, групповое кольцо $\mathbf{Z}G$ — делителей нуля и, более того, $\mathbf{Z}G$ вложимо в тело. 2) Если $r_{\max}$ — корень максимально возможной степени $k \geqslant 2$ из элемента r в F_n, то все элементы конечных порядков в G записываются как слова в алфавите X вида $(g r_{\max} g^{-1})^l$, $1 \leqslant l \leqslant k - 1$, в то же время в G найдется подгруппа конечного индекса без кручения, а централизатор $C_G(h)$ любого элемента $1 \neq h \in G$ — циклическая группа. 3) Любое собственное непустое подслово из r записывает неединичный элемент группы G. 4) При $n \geqslant 3$ центр группы G равен E; при $n = 2$ либо группа G абелева, и тогда $G \simeq \mathbf{Z}$ или $G \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, либо G неабелева, и тогда $C(G) \simeq \mathbf{Z}$ или E; при $n = 1$ очевидно, что $G \simeq \mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}(n)$, $n \in \mathbf{N}$. 5) Каждая подгруппа $H \leqslant G$ либо разрешима, либо содержит F_2. Если в G есть кручение, то в первом случае H или циклическая, или бесконечная диэдральная группа. 6) Если G не имеет кручения, то она локально индикабельна.

Индикабельность означает существование эпиморфизма на $\mathbf{Z}$.

Теорема Магнуса о свободе: если в задании группы $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \| r = 1\rangle$ циклически несократимое слово r содержит в своей записи x_n, то элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ порождают в G свободную подгруппу и составляют в ней базис.

Известно, что группа $G = \langle x_1, x_2 \| x_1^k x_2^l x_1^m x_2^n = 1\rangle$ финитно аппроксимируема, если $(k+m)(l+n) \neq 0$ или $k = -m$, $l = -n$ (здесь и далее все параметры — ненулевые целые числа). Поэтому наибольший интерес вызывают группы указанного вида, для которых только одна из сумм $k+m$, $l+n$ равна 0.

Группы Баумслага — Солитера имеют код $G_{kl} = \langle x_1, x_2 \| x_1 x_2^k x_1^{-1} = x_2^l\rangle$. Ясно, что $G_{kl} \simeq G_{lk}$.

Группа G_{kl} обладает эндоморфизмом φ_m: $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto x_2^m$. Если $(k, l) = 1$, то φ_k — эпиморфизм; если, кроме того, $|k|$, $|l| > 1$, то $1 \neq [x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2] \in \operatorname{Ker} \varphi_k$, и группа G_{kl} при этих предположениях нехопфова и не финитно аппроксимируема (группа G называется *хопфовой*, если любой эпиморфизм φ: $G \to G$ является автоморфизмом).

Приведем ряд наиболее интересных результатов о группах Баумслага — Солитера и их обобщениях. 1) При $t > 1$ и непустых несократимых словах $u(\bar{x})$, $v(\bar{x})$ группа $G = \langle y, x_1, \ldots, x_n \| (y^{-l} u(\bar{x}) y^l v(\bar{x}))^t = 1\rangle$ финитно аппроксимируема, в частности, ФА-группой является группа $G = \langle x_1, x_2 \| (x_1^k x_2^l x_1^m x_2^n)^t = 1\rangle$ (Allenby R. B. J. T., Tang C. Y.//J. Algebra.— 1981.— V. 71, N 1.— P. 132—140). 2) Верно условное утверждение: если $G = \langle x_1, x_2 \| (x_1^k x_2^l x_1^m x_2^n)^s = 1\rangle$ финитно аппроксимируема, то и группа $H = \langle x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q \| (u(\bar{x})^k v(\bar{y})^l u(\bar{x})^m v(\bar{y})^n)^s = 1\rangle$ является финитно аппроксимируемой для любых непустых несократимых слов $u(\bar{x})$, $v(\bar{y})$, не являющихся собственными степенями в свободной группе (Allenby R. B. J. T., Tang C. Y.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1985. — V. 97, N 2. — P. 225—230). Группа G_{kl} хопфова, если $l = kl'$, $|k|$, $|l'| > 1$, k и l имеют одни и те же простые делители (Collins D. J., Levin F.//Arch. Math. — 1983. — V. 40, N 5. — P. 385—400).

Кроме того, имеют место следующие факты: $G=\langle x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \| (u(\bar{x})^k v(\bar{y})^l)^s = 1\rangle$ есть ФА-группа, G_{1k} и $H=\langle x_1, x_2 \| (x_1^l x_2^m)^s = 1\rangle$ являются ФАС-группами (Tang C. Y.//Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 86, N 3. — P. 379—384).

Группы Фибоначчи $F(r, n)$ задаются кодом

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \| x_i x_{\overline{i+1}} x_{\overline{i+2}} \ldots x_{\overline{i+r-1}} = x_{\overline{i+r}},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \ \bar{k} \equiv k \bmod n\rangle.$$

Приведем некоторые данные об этих группах, заключив их в таблицу. На (r, n)-пересечении указана либо группа $F(r, n)$, либо ее порядок (K_8 — группа кватернионов, см. [17], [21]).

r \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, 11, ...
2	E	E	K_8	$\mathbf{Z}(5)$	$\mathbf{Z}(11)$	∞	$\mathbf{Z}(29)$	∞	∞ *)	∞
3	$\mathbf{Z}(2)$	K_8	$\mathbf{Z}(2)$	∞	$\mathbf{Z}(22)$	1512				
4	$\mathbf{Z}(3)$	$\mathbf{Z}(3)$	63	$\mathbf{Z}(3)$	∞					
5	$\mathbf{Z}(4)$	24	∞	624	$\mathbf{Z}(4)$	∞				
6	$\mathbf{Z}(5)$	$\mathbf{Z}(5)$	$\mathbf{Z}(5)$	125	7775	$\mathbf{Z}(5)$				
7	$\mathbf{Z}(6)$	48	342	∞	?	117 648				

При $n > 5r$ имеем $|F(r, n)| = \infty$. Если n делит r, то $F(r, n) \simeq \mathbf{Z}(r-1)$, если $r \equiv 1 \bmod n$, то $F(r, n)$ — метациклическая (т. е. расширение циклической посредством циклической) группа порядка $k \leqslant n(r^n - 1)$, при $s \geqslant 1$ группа $F(2s+1, 2)$ является метациклической порядка $4s(s+1)$.

*) Newman M.//Austral. Math. Univ. — 1988. — Preprint N 26.

Если $d = (r+1, n)$ и $d > 3$, или $d = 3$ и n четно, то $|F(r,n)| = \infty$ (Thomas R. M.//Bull. London Math. Soc. — 1983. — V. 15, N 4. — P. 384—386).

Для любой группы G может существовать только конечное множество пар (r, n) таких, что $G \simeq F(r, n)$, причем всегда $F(n, n+1) \simeq F(2n-1, n)$, если $n \geqslant 2$. Любая конечная группа представима как фактор-группа некоторой группы $F(r, n)$.

Пусть $A(r, n) \underset{\mathrm{def}}{=} F(r, n)/F(r, n)'$. Порядок $a(r, n) = |A(r, n)|$ всегда конечен. Пусть $r = kn + s$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$, тогда $s \neq 1$ влечет $a(r, n) = \frac{r-1}{s-1} a(s, n)$; $s = 1$ влечет $a(r, n) = n(r-1)$; $s = 0$ влечет $a(r, n) = r-1$; $s = n-1$ влечет $a(r, n) = (r-1)2^{n-1}$; $s = n-2$ влечет $a(r, n) = \frac{1}{3}(r-1)\left(2^n + (-1)^{n+1}\right)$.

Подробности о группах Фибоначчи см. в [91].

Обобщенная группа Коксетера $G(M)$ определяется по симметрической матрице $M = (m_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, с неотрицательными целыми элементами: $G(M) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \,\|\, x_i^{m_{ii}} = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \left(x_i x_j\right)^{m_{ij}} = 1 \ (1 \leqslant i < j \leqslant n)\right\rangle$. В частных случаях получаем *группы Дика* $D(l, m, n) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\langle x_1, x_2 \,\|\, x_1^l = x_2^m = \left(x_1 x_2\right)^n \ (l, m, n \geqslant 2)\right\rangle$ и треугольные группы $\Delta(l, m, n) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\langle x_1, x_2, x_3 \,\|\, x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = \left(x_1 x_2\right)^l = \left(x_2 x_3\right)^m = \left(x_3 x_1\right)^n = 1 \ (l, m, n \geqslant 2)\right\rangle$.

В группе $D(l, m, n)$ элементы x_1, x_2, $x_1 x_2$ имеют порядки l, m, n соответственно. Группа $D(l, m, n)$ вложима в проективную специальную линейную группу $PSL(2, \mathbf{C})$.

При $s(l, m, n) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant 1$ группа $D(l, m, n)$ содержит в качестве подгруппы конечного индекса фундаментальную группу ориентируемой поверхности положительного рода g (см. п. 4.5) и является, следовательно, бесконечной. Если $s(l, m, n) < 1$, то $g > 1$, и группа $D(l, m, n)$ содержит группу F_2.

Группы $D(l, m, n)$ иногда так же, как и $\Delta(l, m, n)$, называют *треугольными*. *Обобщенно треугольными* при этом называют группы $D(l, m, n; w) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\langle x_1, x_2 \,\|\, x_1^l = x_2^m = w^n = 1 \ (l, m, n \geqslant 2)\right\rangle$, где $w \overset{\circ}{=} x_1^{r_1} x_2^{s_1} \ldots x_1^{r_k} x_2^{s_k}$ $(k \geqslant 1, \ 0 < r_i < l, \ 0 < s_i < m)$. Элементы x_1, x_2, $w \in$

$\in D(l, m, n; w)$ имеют порядки l, m, n соответственно. Существует гомоморфизм φ: $D(l, m, n; w) \to PSL(2, \mathbf{C})$, для которого образы $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(w)$ также имеют указанные порядки l, m, n соответственно. Если $s(l, m, n) \leqslant 1$, то группа $D(l, m, n; w)$ содержит индикабельную подгруппу $H \neq E$ конечного индекса и, следовательно, является бесконечной. Если $s(l, m, n) < < 1$, подгруппу H можно выбрать таким образом, что существует эпиморфизм φ: $H \to F_2$, в частности, $D(l, m, n; w)$ содержит в этом случае подгруппу F_2 (Baumslag G., Morgan J. W., Shalen P. B. // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1987. — V. 102. — P. 25—31).

Группы Фокса задаются кодом: $F_{(k, l)} \underset{\text{def}}{=} \langle x_1, x_2 \| x_1 x_2^k = x_2^l x_1,\ x_2 x_1^k = x_1^l x_2\ (k, l \in \mathbf{N}) \rangle$. При $(k, l) \neq 1$ группа $F_{(k, l)}$ бесконечна, при $(k, l) = 1$ — метациклическая порядка $|k - l|^3$. *Группа трилистника* $T \underset{\text{def}}{=} = \langle x_1, x_2 \| x_1^2 = x_2^3 \rangle$ интересна тем, что для $i = 1, 2$ она порождается также парами элементов x_1^{2i+1}, x_2^{3i+1}, однако не может быть задана одним соотношением между ними.

Дефицитом кода $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \| r_1 = r_2 = \ldots \ldots = r_m = 1 \rangle$ называется число $d = n - m$.

Обобщенная теорема о свободе: если $d \geqslant 0$, то среди заданных порождающих элементов группы G найдутся d элементов, порождающих в G свободную подгруппу F_d и, следовательно, образующих в ней базис (Романовский Н. С.//Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 88—97).

Если дефицит $d \geqslant 2$, то группа G содержит подгруппу конечного индекса, допускающую эпиморфизм на группу F_2 (Baumslag B., Pride S. J.//J. London Math. Soc. — 1978. — V. 17, N 3. — P. 425—426). То же самое верно, если $d = 1$, но при этом хотя бы одно из слов r_i является собственной степенью в свободной группе (Stöhr R.//Math. Z. — 1983. — Bd 182, N 1. — S. 45—47). Задание $\mathbf{Z} = \langle x_1, x_2 \| x_1 = 1 \rangle$ показывает существенность последнего условия.

Дадим понятие о группах с малым сокращением. Пусть R — симметризованное множество определяющих слов, т. е. множество циклически несократимых слов, содержащее вместе с каждым своим элементом обратный к нему и все его циклические перестановки.

Общее начальное подслово двух различных слов из R называется *куском*. Рассматриваются следующие условия относительно кода $\langle X \| R\rangle$: 1) $\mathscr{C}'(\lambda)$, $0<\lambda\in\mathbf{R}$, — длина любого куска меньше λ ($\lambda<1$) от длины соответствующего слова; 2) $\mathscr{C}(k)$, $k\in\mathbf{N}$, — никакой элемент из R не разбивается в произведение менее чем k кусков; 3) $\mathscr{T}(q)$, $3\leqslant q\in\mathbf{N}$, — для любого набора элементов $r_1, r_2, \ldots, r_q\in R$, $r_i\neq r_{i+1}^{-1}$, по крайней мере одно из слов r_1r_2, r_2r_3, ..., $r_{q-1}r_q$, r_qr_1 не сократимо. Под *группой с малым сокращением* понимается группа, в которой выполняется одно из условий 1) — 3).

Заметим, что из $\mathscr{C}'(1/k)$ следует $\mathscr{C}(k+1)$.

Любая конечно определенная группа допускает код (его можно эффективно получить из данного кода, в котором длина каждого куска не превышает 1/5 длины соответствующего слова (Гольберг А. И.//Успехи мат. наук.— 1978.— Т. 33, № 6.— С. 201—202).

Группы, удовлетворяющие условию $\mathscr{C}'(1/5)$ имеют разрешимые проблемы равенства и сопряженности (см. п. 4.4). В группе, удовлетворяющей условию $\mathscr{C}'(1/6)$ любое слово w, записывающее единицу содержит подслово v, являющееся куском, и такое, что $|v|>\frac{1}{2}|w|$.

Подробности о группах с малым сокращением см. в [30].

Введем группы, связанные с алгебрами Каца — Муди. Пусть $A=(a_{ij})$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, — обобщенная матрица Картана, т. е. $a_{ii}=2$, a_{ij} — неотрицательные целые для $i\neq j$, причем $a_{ji}=0$, если $a_{ij}=0$. Положим для $i\neq j$ $m_{ij}=2$, 3, 4 или 6, если $a_{ij}a_{ji}=0, 1, 2$ или 3 соответственно. В остальных случаях пусть $m_{ij}=1$.

Группа $\overline{W}(A)$ в порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задается соотношениями следующих типов: 1) $x_jx_i^2x_j^{-1}=x_i^2x_j^{-2a_{ij}}$, 2) $x_ix_jx_i\ldots=x_jx_ix_j\ldots$ (m_{ij} множителей с каждой стороны). Абелева подгруппа $T_{(2)}=\langle x_i^2 \mid i=1, 2, \ldots, n\rangle$ нормальна в $\overline{W}(A)$. Пусть $W(M)$ — обобщенная группа Коксетера, соответствующая M с порождающими $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ядром эпиморфизма $\overline{W}(A)\to W(M)$, где $x_i\mapsto y_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$), служит $T_{(2)}$ (см. [93]).

Определим группы Стейнберга. Пусть Λ — ассоциативное кольцо с $1, 3 \leqslant n \in \mathbb{N}$. *Группой Стейнберга* $\mathrm{St}(n, \Lambda)$ называется группа, порожденная всеми элементами вида $x_{ij}(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ и имеющая следующее множество определяющих соотношений: 1) $x_{ij}(\lambda)x_{ij}(\mu) = x_{ij}(\lambda + \mu)$; 2) $[x_{ij}(\lambda), x_{jl}(\mu)] = x_{il}(\lambda\mu)$ при $i \neq l$, $[x_{ij}(\lambda), x_{kl}(\mu)] = 1$ при $j \neq k$, $i \neq l$.

Существует канонический гомоморфизм σ_n: $\mathrm{St}(n, \Lambda) \to GL(n, \Lambda)$, для которого $\sigma_n(x_{ij}(\lambda)) = t_{ij}(\lambda)$. Группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Lambda)$ определяется как естественный индуктивный предел $\mathrm{St}(\Lambda) = \varinjlim \mathrm{St}(n, \Lambda)$. Группа $\mathrm{St}(\Lambda)$ является универсальным центральным расширением группы $E(\Lambda) \underset{\text{def}}{=} [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$, где $GL(\Lambda) \underset{\text{def}}{=} \varinjlim GL(n, \Lambda)$ (см. [41]).

Свободным произведением семейства групп $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$ называется группа $G = * G_\alpha$ со следующими свойствами: 1) любая из групп G_α вложена в G, 2) группа G порождена подгруппами G_α, 3) любое семейство гомоморфизмов φ_α: $G_\alpha \to H$ в произвольную группу H однозначно продолжается до гомоморфизма φ: $G \to H$.

Для любого семейства групп G_α, $\alpha \in A$, существует единственное с точностью до изоморфизма свободное произведение $G = * G_\alpha$.

Группа $G = * G_\alpha$ может быть задана следующим образом. Возьмем коды $G_\alpha = \langle X_\alpha \| R_\alpha \rangle$, считая, что $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда $G = \langle \bigcup X_\alpha \| \bigcup R_\alpha \rangle$.

Операция свободного произведения ассоциативна и коммутативна. Для конечного набора множителей она обычно записывается как $G = G_1 * G_2 * \ldots * G_n$.

В группе $G = * G_\alpha$ любой элемент однозначно записывается в виде $g = g_1 g_2 \ldots g_n$, где все множители g_i неединичны, соседние из них принадлежат разным группам G_α, G_β. Единице соответствует пустая запись. Описанная запись называется *нормальной* или *несократимой формой* элемента g, а ее длина — длиной элемента g. Произвольное произведение $g = g_1 g_2, \ldots g_n$, где множители g_i принадлежат группам G_{α_i}, можно сократить или привести к нормальной форме, последовательно вычеркивая единичные множители и заменяя произведения $g_i g_{i+1}$

элементами $g'_i = g_i g_{i+1}$, если g_i, g_{i+1} принадлежат одной и той же группе G_β. Нормальная форма называется *циклически несократимой*, если она либо имеет длину $l \leqslant 1$, либо элементы g_1 и g_n принадлежат разным группам G_α, G_β. Любая нормальная форма длины $l \geqslant 2$ сопряжена с циклически несократимой нормальной формой. Циклически несократимые нормальные формы длины $l \geqslant 2$ сопряжены между собой тогда и только тогда, когда одна из них является циклической перестановкой другой.

Отметим элементарные свойства свободных произведений. Говорим «[циклически] несократимый элемент», имея в виду его нормальную форму в группе $G = * G_\alpha$. При этом считаем, что сомножителей G_α не менее двух и все они неединичны.

1) Элементы конечного порядка группы G существуют, если только они есть в сомножителях G_α, причем каждый элемент $g \in G$ порядка $k \in \mathbf{N}$ сопряжен с некоторым элементом $g_\alpha \in G_\alpha$ порядка k. 2) Если g — циклически несократимый элемент группы G длины $l \geqslant 2$, то корень степени $k \in \mathbf{N}$ из g единствен и существует тогда и только тогда, когда g разбивается на k одинаковых подслов: $g \underset{\circ}{=} hh \ldots h$. В частности, из любого циклически несократимого элемента g длины $l \geqslant 2$ извлекается корень максимальной степени $g_{\max}$. Произвольный элемент g сопряжен с циклически несократимым элементом g' (т. е. $g = fg'f^{-1}$), и если $g' = h^k$, $k \in \mathbf{N}$, то $g = (fhf^{-1})^k$. Соответствие $h \to fhf^{-1}$ между корнями из элементов g и g' взаимно однозначно. Если длина g' не меньше 2, то элемент g также обладает единственным корнем максимальной степени $g_{\max}$. 3) Централизатор любого элемента $g \in G$, сопряженного с циклически несократимым элементом длины $l \geqslant 2$, есть бесконечная циклическая группа $\langle g_{\max} \rangle$. Центр свободного произведения единичен. 4) Ядро очевидного гомоморфизма G на прямое произведение $\bar{G} = \prod G_\alpha$ называется *декартовой подгруппой* $D(G) \trianglelefteq G$. Декартова подгруппа $D(G)$ является свободной группой. Подгруппа $D(G)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$ тогда и только тогда, когда $G = \mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)$ — бесконечная диэдральная группа. Во всех остальных случаях группа $D(G)$ некоммутативна.

Пример. Проективная специальная линейная группа $PSL(2, \mathbf{Z}) = SL(2, \mathbf{Z})/\{\pm E\}$ изоморфна свободному произведе-

нию своих подгрупп $\left\langle\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}\right\rangle \simeq \mathbf{Z}(2)$ и $\left\langle\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right\rangle \simeq \mathbf{Z}(3)$ (черта — образ в $PSL(2, \mathbf{Z})$).

Строение подгрупп свободного произведения описывается *теоремой Куроша*: подгруппа $H \leqslant G = \ast G_\alpha$ есть свободное произведение вида

$$H = F * (\ast H \cap G_\alpha^{g_\alpha}),$$

где F — свободная группа, а элементы g_α являются представителями двойных смежных классов $Hg_\alpha G_\alpha$; более того, если $|G:H| = m < \infty$, то ранг r группы F вычисляется по формуле $r = \sum\limits_\alpha (m - m_\alpha) + 1 - m$, где m_α — число различных двойных смежных классов HfG_α, $f \in G$ (т. е. $|G:(H, G_\alpha)|$).

Теорема Грушко—Неймана: если φ: $F_n \to G = \ast G_\alpha$ — эпиморфизм свободной группы конечного ранга на свободное произведение, то группа F_n разлагается в свободное произведение $F_n = \ast F_\alpha$ (свободных групп) такое, что $\varphi(F_\alpha) = G_\alpha$ для всех α.

Отсюда следует, что наименьшее число порождающих элементов группы $G = \ast G_\alpha$ равно сумме соответствующих чисел сомножителей G_α.

Свободное произведение двух или более неединичных групп неразложимо в прямое произведение двух или более неединичных групп.

Свободным произведением групп G_1, G_2 с объединенной подгруппой (объединением) $A \leqslant G_1, G_2$ называется такая группа $G = G_1 \ast_A G_2$, что: 1) группы G_1, G_2 вложены в G, при этом $G_1 \cap G_2 = A$, 2) $G = \langle G_1, G_2 \rangle$, 3) любая пара гомоморфизмов φ_i: $G_i \to H$, $i = 1, 2$, в произвольную группу H, совпадающих на A, однозначно продолжается до гомоморфизма φ: $G \to H$.

Группа $G = G_1 \ast_A G_2$ с указанными свойствами существует и единственна. Иногда говорят о свободном произведении групп G_1, G_2 с объединением по паре изоморфных подгрупп $A_1 \simeq A_2$ $(A_i \leqslant G_i,\ i = 1, 2)$. Изоморфизм φ: $A_1 \to A_2$ при этом фиксируется, и мы приходим к приведенному выше определению после отождествления A_1 с A_2 в силу φ.

Группу $G = G_1 \ast_A G_2$ можно задать следующим образом. Пусть $G_1 = \langle X \| R \rangle$, $G_2 = \langle Y \| S \rangle$, причем $X \cap Y = \varnothing$. Возьмем множество порождающих элементов

$\{a_\alpha\}$ группы A и запишем каждый из них в виде слов $a_\alpha = w_\alpha(\bar{x})$ и $a_\alpha = v_\alpha(\bar{y})$ от порождающих из X и Y, соответственно. Тогда

$$G = \langle X \cup Y \parallel R \cup S \cup \{w_\alpha(\bar{x})\, v_\alpha(\bar{y})^{-1}\}\rangle.$$

Обобщением введенного понятия является конструкция древесного произведения. Пусть T — дерево (т. е. связный граф без циклов), вершинам которого взаимно однозначно соответствуют группы G_α. Пусть каждому неориентированному ребру $e \in T$ между G_α и G_β соответствует общая подгруппа $A_e \leqslant G_\alpha, G_\beta$ (или пара отождествленных изоморфных подгрупп $A_\alpha \simeq A_\beta$, $A_\alpha \leqslant G_\alpha$, $A_\beta \leqslant G_\beta$). Стянем

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, dash, "A_e"] & G_\beta \end{tikzcd}$$

в вершину $G_\alpha *_{A_e} G_\beta$. Продолжая этот процесс (возможно, трансфинитный), получим в конце концов граф с единственной вершиной G. Группа G не зависит от порядка выполнения стягиваний и называется *древесным произведением* семейства групп G_α относительно дерева T. Если $G_\alpha = \langle X_\alpha \| R_\alpha\rangle$, где $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, то группа G может быть задана кодом $G = \langle \bigcup X_\alpha \| \bigcup R_\alpha \cup \{A_e = G_\alpha \cap G_\beta\}\rangle$, где соотношения, символически обозначенные $A_e = G_\alpha \cap G_\beta$, соответствуют ребру e с вершинами G_α, G_β и записываются так же, как это делалось для свободного произведения с объединением.

Для древесного произведения G имеют место очевидно переформируемые аналоги определяющих свойств свободного произведения с объединением: сомножители G_α вложены в группу G, причем $G_\alpha \cap G_\beta = A_e$, если e — ребро с вершинами G_α и G_β, группа G порождена группами G_α, любое семейство гомоморфизмов $\varphi_\alpha\colon G_\alpha \to H$ в произвольную группу, совпадающих на группах A_e, однозначно продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon G \to H$.

Примеры. 1) Группа $SL(2, \mathbf{Z})$ изоморфна свободному произведению подгрупп $\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle \simeq \mathbf{Z}(4)$ и $\left\langle\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle \simeq \mathbf{Z}(6)$ с объединенной подгруппой $\left\langle\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle \simeq \mathbf{Z}(2)$. 2) Пусть $P[x]$ — кольцо многочленов над полем P от переменной x. Тогда $GL(2, P[x]) = GL(2, P) *_{UT(2, P)} H$, где $UT(2, P)$ — группа верхних

унитреугольных матриц, H — группа матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & f(x) \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $0 \neq \alpha,\ \beta \in P,\ f(x) \in P[x]$. 3) Пусть число $d \in \mathbf{N}$ свободно от квадратов, O_d — кольцо целых в поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Группа $\Gamma_d \underset{\text{def}}{=} PSL\,(2,\ O_d) = SL\,(2,\ O_d)/\{\pm E\}$ называется *группой Бьянки*. При всех $d \neq 3$ группа Γ_d представляется в виде свободного произведения с объединением $\Gamma_d = G_d *_{A_d} H_d$ собственных подгрупп. Если кольцо O_d неевклидово, т. е. $d \neq 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11$, то можно взять $H_d = PE\,(2,\ O_d)$ — образ $E\,(2,\ O_d) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \middle|\ \alpha,\ \beta \in O_d \right\rangle$. Известно, что в этом случае H_d не зависит от d (Frohman C., Fine B.//C. R. Math. Rep. Sci., Canada. — 1986. — V. 8, N6. — P. 353—356).

Выберем в сомножителях группы $G = G_1 *_A G_2$ системы представителей правых смежных классов T_{1A}, T_{2A} по подгруппе A, включающие 1. Любой неединичный элемент $g \in G$ записывается в виде $g = g_1 g_2 \ldots \ldots g_n$, где все $g_i \neq 1$ и соседние принадлежат разным множителям. Любой неединичный элемент $g \in G$ однозначно записывается в нормальной форме $g = = a f_1 f_2 \ldots f_m$, где $a \in A$, $1 \neq f_i \in T_{1A}$ или T_{2A}, причем соседние из f_i лежат в разных множествах T_{lA}, $l = 1,\ 2$. Если $m \geqslant 2$ и элементы f_1 и f_m принадлежат разным множествам T_{lA}, $l = 1,\ 2$ то элемент g имеет бесконечный порядок. Более того, элемент g конечного порядка группы G обязан быть сопряжен с элементом того же порядка одного из сомножителей. В частности, свободное произведение с объединением определено в классе групп без кручения.

Перейдем к конструкции HNN-расширения. Пусть $A \simeq B$ — пара изоморфных подгрупп группы G с фиксированным изоморфизмом φ. Назовем *HNN-расширением* $\bar{G}$ группы G *с ассоциированными* (в силу φ) *подгруппами* A, B группу со следующими свойствами: 1) группа G вложена в $\bar{G}$; 2) группа $\bar{G}$ порождена группой G и элементом t, причем для любого элемента $a \in A$ имеем $\varphi(a) = a^t$; 3) любой гомоморфизм ψ группы G в произвольную группу H такой, что $\psi(a) = \psi(\varphi(a))^h$ для некоторого фиксированного элемента $h \in H$ и любого элемента $a \in A$, однозначно продолжается до гомоморфизма $\bar{\psi}$: $\bar{G} \to H$, при котором $\bar{\psi}(t) = h$.

HNN-расширение $\bar{G}$ группы G с указанными свойствами существует и единственно. Если группа G задается кодом $\langle X \| R \rangle$, а группа A порождена элементами $\{a_\alpha | \alpha \in \mathrm{A}\}$, то группа $\bar{G}$ может быть задана кодом $\bar{G} = \langle X \cup \{t\} \| R \cup \{a_\alpha^t \varphi(a_\alpha)^{-1} | \alpha \in A\} \rangle$, где $t \notin X$.

Каждый элемент $g \in \bar{G}$ может быть единственным образом записан в нормальной форме $g = g_0 t^{m_1} f_1 t^{m_2} \ldots \ldots f_r t^{m_{r+1}}$, где $0 \neq m_i \in \mathbf{Z}$, за исключением, быть может, $m_{r+1} \in \mathbf{Z}$, элементы $f_j \neq 1$ — представители правых смежных классов T_A, T_B группы G по подгруппам A, B соответственно (предполагаем, что $1 \in T_A \cap T_B$), причем если $m_i > 0$, то $f_i \in T_A$, если $m_i < 0$, то $f_i \in \in T_B$, а элемент $g_0 \in G$ произволен.

Графом групп $(\mathfrak{G}, \Gamma)$ называется связный неориентированный граф Γ, в котором: а) каждой вершине $v \in V(\Gamma)$ и каждому ребру $e \in E(\Gamma)$ сопоставлены группы G_v, G_e соответственно; б) для любого $e \in \in E(\Gamma)$ указаны вложения группы G_e в группы G_v, G_w, где вершины v, w соединяются ребром e (если $v = w$, то вложения, вообще говоря, разные). Пусть T — максимальное поддерево графа Γ (T обязательно содержит все вершины графа). Обозначим через $G(T)$ древесное произведение относительно T. Для каждого ребра $e \in \Gamma \setminus T$ группа $G(T)$ содержит пару подгрупп изоморфных G_e, так что можно сконструировать HNN-расширение, для которого они ассоциированы. После того, как будут проделаны все такие HNN-расширения, получится фундаментальная группа $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma, T)$ графа групп $(\mathfrak{G}, \Gamma)$ относительно максимального дерева T. Группа $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma, T)$ не зависит от последовательности выполнения при ее построении HNN-расширений. С точностью до изоморфизма при всех T группы $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma, T)$ одинаковы. Пишем $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma)$, убирая из названья упоминание о T. Группа $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma)$ называется *фундаментальной группой графа групп* Γ.

Пример. Если Γ — дерево, то $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma)$ — древесное произведение. Если Γ состоит из одной вершины v и одного ребра e, то $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma)$ является HNN-расширением G_v с ассоциированными образами группы G_e в G_v.

Теория групп, действующих на деревьях, существенно развита Бассом и Серром (см. [59], [80], [112]).

Граф Γ включает множество вершин $V(\Gamma)\neq\varnothing$, множество ориентированных ребер $E(\Gamma)$, отображения α, ω: $E(\Gamma)\to V(\Gamma)$, сопоставляющие ребру $e\in E(\Gamma)$ его начало $\alpha(e)\in V(\Gamma)$ и конец $\omega(e)\in V(\Gamma)$, инверсию ребер $^{-1}$: $E(\Gamma)\to E(\Gamma)$, где $e\mapsto e^{-1}$, причем $\alpha(e)=\omega(e^{-1})$, $\omega(e)=\alpha(e^{-1})$, $e\neq e^{-1}$, $(e^{-1})^{-1}=e$.

Группа G действует на графе Γ, если определен гомоморфизм φ: $G\to\operatorname{Aut}\Gamma$. Группа G действует без инверсий (ребер), если для любого $g\in G$, любого $e\in E(\Gamma)$ имеем $\varphi(g)e\neq e^{-1}$. При действии без инверсий определен факторграф $\Gamma\diagdown G$, вершинами и ребрами которого служат орбиты вершин и ребер в Γ. Группа G действует на Γ *свободно* (без неподвижных точек), если для любой вершины $v\in V(\Gamma)$, любого неединичного элемента $g\in G$ имеем $\varphi(g)(v)\neq v$.

Группа, действующая свободно на дереве T, сама свободна. Верно и обратное, каждая свободная группа действует свободно на некотором дереве.

Группа G тогда и только тогда представляется в виде $\pi(\mathfrak{G},\Gamma)$, когда G действует на некотором дереве T (*теорема Серра*).

Подгруппа $H\leqslant\pi(\mathfrak{G},\Gamma)$ также действует на дереве T, поэтому $H=\pi(\mathfrak{G}',\Gamma')$ для некоторого графа групп $(\mathfrak{G}',\Gamma')$.

В случае конкретных свободных конструкций — свободного произведения с объединением и HNN-расширения приведенную теорему можно детализировать. См. по этому поводу [59], [112].

Говорят, что группа G обладает *свойством* FA, если всякое дерево, на котором действует G, имеет неподвижную вершину ($v\in V(\Gamma)$ неподвижна относительно действия φ: $G\to\operatorname{Aut}\Gamma$, если $\varphi(g)v=v$ для всех $g\in G$).

Счетная группа G тогда и только тогда обладает свойством FA; когда: а) G не имеет факторгруппы, изоморфной $\mathbf{Z}$; б) G не представляется как $G=G_1*_A G_2$, где $A\neq G_1, G_2$; в) G конечно порождена.

Если не накладывать условие счетности на группу G, то приведенное утверждение также верно, только условие в) нужно заменить на в′) G не является объединением строго возрастающей последовательности собственных подгрупп. Например, бесконечная декартова степень неабелевой конечной простой группы является FA-группой. Условия а), б) эквивалентны

тому, что при действии без инверсий группы G на дереве T образ каждого элемента $g \in G$ оставляет неподвижной некоторую вершину $v \in V(\Gamma)$. При выполнении этого условия либо образы всех элементов из G оставляют неподвижной некоторую вершину $v \in V(\Gamma)$, либо G является объединением возрастающей последовательности стабилизаторов вершин из $V(\Gamma)$. Например, каждая проконечная (см. п. 3.3) группа удовлетворяет этому условию (Bass H.//Commun. Algebra. — 1976. — V. 4, N 12).

Приведем другие характеризации и некоторые общие свойства свободных конструкций. *Функцией длины* на группе G со значениями в упорядоченной абелевой группе A называется отображение $l\colon G \to A$, отвечающее следующим условиям: 1) $l(1) = 0$, 2) $l(g^{-1}) = l(g)$, 3) $d(g, f) > d(g, h)$ влечет $d(g, h) = d(f, h)$, где $d(a, b) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(l(a) + l(b) - l\left(ab^{-1}\right)\right)$.

Перечисленным условиям удовлетворяет обычная функция длины $l(g) = |g|_X$ в свободной группе $F(X)$ и очевидная функция длины в свободном произведении групп, соответствующая нормальной форме записи его элементов.

Пусть $l\colon G \to \mathbf{Z}$ — целочисленная функция длины, удовлетворяющая условиям: 4) $l(g^2) > l(g)$ при $g \neq 1$, 5) $d(g, f) \in \mathbf{Z}$. Тогда группа G вложима в свободную группу $F(X)$ таким образом, что $l(g) = |g|_X$ для всех $g \in G$ (значит, группа G сама свободна).

Пусть целочисленная функция длины $l\colon G \to \mathbf{Z}$ удовлетворяет условиям: 6) $d(g, f) + d(g^{-1}, f^{-1}) > l(g) = l(f)$ влечет $g = f$; 7) если $l(g)$, $g \neq 1$, четно, то $l(g^2) > l(g)$; 8) $l(g^2) \neq l(g) + 1$. Тогда группа G вложима в свободное произведение групп таким образом, что l индуцируется очевидной функцией длины в нем.

Биполярной структурой на группе G называется разбиение G на попарно непересекающиеся подмножества B, SS, SS^*, S^*S, S^*S^*, удовлетворяющее следующим условиям (буквы X, Y, ... употребляются вместо S, S^*, причем всегда $(X^*)^* = X$): а) B — подгруппа в G, б) если $b \in B$, $g \in XY$, то $gb \in XY$, в) если $g \in XY$, то $g^{-1} \in YX$, г) если $g \in XY$, $h \in Y^*Z$, то $gh \in XZ$, д) для всякого элемента $g \in G$ найдется такое число $m \in \mathbf{N}$, что любое представление $g =$

$= g_1 g_2 \ldots g_n$, где $g_i \in X_{i-1}^* X_i$, удовлетворяет условию $n \leqslant m$, е) $SS^* \neq \varnothing$.

Пример. Полагаем для $G = G_1 *_A G_2$, что $B = A$, SS — множество всех элементов, нормальная форма которых $f = f_1 f_2 \ldots f_r$ такова, что $f_1, f_r \in G_1$, аналогично определяются остальные множества по соответствию $G_1 \to S$, $G_2 \to S^*$.

Используя нормальную форму элемента из HNN-расширения G, нетрудно определить биполярную структуру на G.

Группа G тогда и только тогда обладает биполярной структурой, когда она разлагается в свободное произведение с объединением собственных подгрупп или представляется как HNN-расширение (см. [30], [38]).

Пример. На группе $G = GL(2, P[x])$ определима биполярная структура, дающая разложение $G = G_1 *_A G_2$ из примера 2) на с. 122. Здесь $B = UT(2, P)$ — подгруппа верхних унитреугольных матриц. Все матрицы из $GL(2, P) \setminus UT(2, P)$ относят к SS. Матрица $D = (d_{ij})$ принадлежит SS, если ст. $d_{12} \leqslant$ ст. d_{11} и ст. $d_{12} \leqslant$ ст. d_{22} (ст. — степень); $D \in SS^*$, если ст. $d_{12} \leqslant$ ст. d_{11}; и ст. $d_{12} >$ ст. d_{22}; $D \in S^*S$, если ст. $d_{12} >$ см. d_{11} и ст. $d_{12} \leqslant$ ст. d_{22}; $D \in S^*S^*$, если ст. $d_{12} >$ ст. d_{11} и ст. $d_{12} >$ ст. d_{22}.

Конечно порожденная группа G почти свободна в том и только том случае, когда G является фундаментальной группой $\pi(\mathfrak{G}, \Gamma)$ конечного графа Γ конечных групп G_v, $v \in V(\Gamma)$, для которой соответствующие ассоциированные подгруппы принадлежат одной из групп G_v. Другими словами, группа G допускает код $G = \langle t_1, t_2, \ldots, H \| R, L_1^{t_1} = M_1, \ldots, L_n^{t_n} = M_n \rangle$, в котором H — древесное произведение конечного множества конечных групп G_v, $v \in V(T)$, с объединением по подгруппам G_e, $e \in E(T)$, где $V(T)$, $E(T)$ — множества вершин и ребер конечного дерева T, а подгруппы $L_i \simeq M_i$ принадлежат одной из вершин G_v, $v = v(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Справедлива *обобщенная формула Шрайера*, по которой вычисляется ранг r свободной подгруппы конечного индекса j в группе с приведенным выше заданием: $r = j\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|L_i|} + \sum_{e \in E(T)} \frac{1}{|G_e|} - \sum_{v \in V(T)} \frac{1}{|G_v|}\right) + 1$. Расширение свободной группы посредством циклической группы простого порядка $\mathbf{Z}(p)$ есть

свободное произведение групп, каждая из которых изоморфна либо группе $\mathbf{Z}$, либо прямому произведению $\mathbf{Z}(p)$ на свободную (возможно, единичную) группу (Karrass A., Pietvowski A., Solitar D.//J. Austral. Math. Soc. — 1973. — N 4. — P. 458—466). Счетная почти свободная группа вложима в конечно порожденную почти свободную группу (Scott G. P.// Bull. London Math. Soc. — 1974. — V. 6, N 3. — P. 304—306). Последняя — всегда ФАС-группа (Dyer J. L.// J. London Math. Soc. — 1979. — V. 20, N 2. — P. 215—221).

Почти свободные группы без кручения свободны (см. теорему Столлингса—Суона в п. 4.2).

Свойства ФА, ФАС, $\text{ФАВ}_{\text{к. п}}$ переносятся на свободные произведения с объединением по конечной подгруппе и на HNN-расширения с конечными ассоциированными подгруппами. Группа $G = G_1 *_A G_2$ есть ФА-группа, если G_1, G_2 — конечно порожденные нильпотентные группы или свободные группы, а подгруппа A — циклическая группа (Dyer J. L.//J. Austral. Math. Soc. — 1980. — A 29, N 1. — P. 35—51; Шахова Н. Г.//Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1981, № 5. — С. 57—62). Другой достаточный признак финитной аппроксимируемости группы $G = G_1 *_A G_2$: а) A является ФА-группой и для любых элементов $g_i \in G_i \setminus A$, $i = 1, 2$, найдутся нормальные подгруппы конечных индексов $N_i \trianglelefteq G_i$ такие, что $g_i \notin N_i A$, б) для всякой нормальной подгруппы конечного индекса $N \trianglelefteq A$ существуют нормальные подгруппы конечных индексов $N_i \trianglelefteq G_i$, $i = 1, 2$, такие, что $N_1 \cap A = N_2 \cap \cap A \leqslant N$ (Wehrfritz B. A. F.//J. London Math. Soc. — 1981. — V. 24, N 1. — 123—126).

Пусть группа G задается одним соотношением в свободном произведении локально индикабельных групп G_1 и G_2, т. е. $G = G_1 * G_2/\langle\langle r\rangle\rangle$. Предположим, что элемент r циклически несократим и имеет длину $l \geqslant 2$ в свободном произведении $G_1 * G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 естественным образом вложены в группу G и группа G сама является локально индикабельной (Бродский С. Д.//Сиб. мат. ж. — 1984. — Т. 25, № 2. — С. 84—103; Howie J.//Math. Z. — 1982. — Bd 180, N 4. — S. 445—461). Пусть $G = * G_\alpha$ — свободное произведение произвольных групп, r — циклически несократимый элемент в G длины $l \geqslant 2$, $m \geqslant 4$,

тогда группы G_α естественно вложены в группу $G/\langle\langle r^m\rangle\rangle$ (Howie J.//London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1986. — N 121. — P. 216—219).

Пусть группа G задается одним соотношением, являющимся собственной степенью в свободном произведении циклических групп, т. е. имеет код $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \| x_i^{l_i} = 1, i = 1, 2, \ldots, n, r(\bar{x})^m = 1\rangle$, где $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, $l_i = 0$ или $l_i \geqslant 2$, $r(\bar{x})$ — циклически несократимое слово в свободном произведении $\langle x_1\rangle * \ldots * \langle x_n\rangle$, включающее в запись x_n. Тогда $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle \simeq \langle x_1\rangle * \langle x_2\rangle * \ldots * \langle x_{n-1}\rangle$ (Fine B., Howie J., Rosenberger G.//Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — V. 102, N 2. — P. 249—254). При $n \geqslant 4$ группа G содержит подгруппу F_2. Если $n = 3$ $(l_1, l_2, l_3) \neq (2,2,2)$, то G также содержит подгруппу F_2. При $n = 3$, $(l_1, l_2, l_3) = (2, 2, 2)$ группа G либо содержит подгруппу F_2, либо является расширением индекса 2 группы $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Для $n = 2$ группа G имеет код $\langle x_1, x_2 \| x_1^p = x_2^q = r(\bar{x})^m = 1\rangle$ и является обобщенной треугольной группой.

1.4. Многообразия групп. Пусть $v(\bar{x}) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — групповое слово (см. с. 76). Его *значением* в произвольной группе G называется элемент $v(\bar{g}) = v(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, полученный подстановкой вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Говорят, что на группе G выполнено *тождество* $v(\bar{x}) = 1$, если все значения слова $v(\bar{x})$ в группе G равны единице. Часто тождеством называют само слово $v(\bar{x})$ с указанным свойством.

Вместилищем всех тождеств служит свободная группа счетного ранга F над $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Слово $v \in F$ будет тождеством группы G в том и только том случае, если при любом гомоморфизме $\varphi\colon F \to G$ имеем $\varphi(v) = 1$.

Пусть $V \subseteq F$ — множество слов. Класс $\mathfrak{V}(V)$ всех групп, для которых любое слово $v \in V$ является тождеством, называется *многообразием*, заданным или определенным множеством тождеств V.

Отметим некоторые многообразия. 1) $\mathbf{0}$ — многообразие всех групп, задается пустым множеством тождеств; 2) $\mathbf{1}$ — единичное многообразие, состоящее из единичной группы E, задается тождеством $x = 1$; 3) $\mathfrak{B}_n$, $n \in \mathbf{N}$, — многообразие всех групп периода n, задается

тождеством $x^n = 1$ и называется *бернсайдовым многообразием периода* (*экспоненты*) n; 4) $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп, задается тождеством $[x_1, x_2] = 1$; $\mathfrak{A}_n$, $n \in \mathbf{N}$, — многообразие всех абелевых групп периода n, задается тождествами $[x_1, x_2] = 1$, $x_1^n = 1$ (других многообразий, состоящих только из абелевых групп нет); 5) $\mathfrak{A}^k$, $k \in \mathbf{N}$, — многообразие всех разрешимых групп ступени не больше k, задается тождеством $d_k(\bar{x}) = 1$, где $d_1(\bar{x}) = [x_1, x_2]$, $d_k(\bar{x})$ при $k \geqslant 2$ определяется по рекуррентной формуле $d_k(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{2^k}) = [d_{k-1}(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}}), d_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \ldots, x_{2^k})]$, многообразие $\mathfrak{A}^2$ иногда обозначается $\mathfrak{M}$ и называется многообразием всех метабелевых групп; 6) $\mathfrak{M}_1$ — многообразие всех центрально метабелевых групп, задается тождеством $[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5] = 1$, состоит из всех групп с условием $G/C(G) \in \mathfrak{M}$ или, что то же самое, $G'' \leqslant C(G)$, частный случай многообразия $\mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbf{N}$, задаваемого тождеством $[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5, x_6, \ldots, x_{4+k}] = 1$; 7) $\mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbf{N}$, — многообразие всех нильпотентных групп ступени не больше k, задается тождеством $c_k(\bar{x}) = 1$, где $c_1(\bar{x}) = [x_1, x_2]$, $c_k(\bar{x})$ при $k \geqslant 2$ определяется рекуррентно по формулам $c_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = [c_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_k]$; 8) $\mathfrak{E}_k$, $k \in \mathbf{N}$, — многообразие всех *энгелевых групп* индекса не больше k, задается тождеством $e_k(\bar{x}) = 1$, где $e_1(\bar{x}) = [x_1, x_2]$, $e_k(\bar{x})$ при $k \geqslant 2$ определяется рекуррентно по формулам $e_k(x_1, x_2) = [e_{k-1}(x_1, x_2), x_2] = [x_1, kx_2]$.

Если G — группа, то $\mathrm{Var}\, G$ — *многообразие, порожденное группой* G. Оно состоит из всех групп, на каждой из которых выполнены все тождества, имеющие место в G. Более общо: если Γ — класс групп, то многообразие $\mathrm{Var}\, \Gamma$, порожденное Γ, состоит из всех групп, на каждой из которых выполнены все тождества, имеющие место в любой из групп класса Γ.

Очевидно, что произвольное многообразие $\mathfrak{C}$ наряду с любой группой $G \in \mathfrak{C}$ содержит все ее подгруппы и эпиморфные образы, а вместе с любым семейством групп их декартово произведение. Отсюда ясно, например, что неединичное многообразие не может состоять из конечных групп, что классы всех периодических, локально конечных, [локально] разрешимых и [локально] нильпотентных групп многооб-

разиями не являются. Очевидным образом вводится понятие подмногообразия $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$. Принято называть *абелевым*, *разрешимым*, *локально конечным* и т. п. многообразие, состоящее из абелевых, разрешимых, локально конечных и т. п. групп.

Класс групп $\mathfrak{C} \neq \varnothing$ является многообразием тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}$ замкнут относительно операций взятия подгрупп, эпиморфных образов и декартовых произведений (*теорема Биркгофа*).

Слово $v \in F$ является, по определению, *следствием множества слов* $V \subseteq F$, если $v = 1$ — тождество в любой группе $G \in \mathfrak{M}(V)$. Множество $V_1 \subseteq F$ следует из множества $V_2 \subseteq F$, если любое слово $v \in V_1$ является следствием V_2. Множества слов V_1, $V_2 \subseteq F$ *эквивалентны*, если они следуют друг из друга. Если V_1, V_2 — эквивалентные множества, то они определяют одинаковые многообразия, т. е. $\mathfrak{W}(V_1) = \mathfrak{W}(V_2)$. В любом множестве слов $V \subseteq F$ замена его части на эквивалентную не меняет многообразия $\mathfrak{W}(V)$. Например, перенумерация переменных в некоторой совокупности слов из V не меняет $\mathfrak{W}(V)$.

Совокупность слов x^{m_i}, $i = 1, 2, \ldots$, эквивалентна одному слову x^m, где $m = \text{н. о. д.}\{m_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Если в многообразии $\mathfrak{C}$ выполнено тождество $x^m = 1$, $m \in \mathbf{N}$, и m — наименьшее число с этим свойством, то m называется *периодом* или *экспонентой* многообразия $\mathfrak{C}$. В противном случае говорят, что многообразие $\mathfrak{C}$ имеет *экспоненту* 0. Произвольное слово $v \in F$ либо является коммутаторным, т. е. $v \in F'$, либо эквивалентно паре слов x^m, $m \in \mathbf{N}$, и $v' \in F'$.

Множество всех тождеств (как элементов свободной группы $F = F(x_1, x_2, \ldots)$) многообразия $\mathfrak{C}$ обозначим через $V(\mathfrak{C})$. Множество $V(\mathfrak{C})$ — наибольшее среди всех эквивалентных множеств слов $V \subseteq F$, определяющих многообразие $\mathfrak{C}$.

Множество $V(\mathfrak{C})$ совпадает с пересечением ядер всех возможных гомоморфизмов группы F в группы многообразия $\mathfrak{C}$. В частности, $V(\mathfrak{C})$ — эндоморфно допустимая подгруппа в группе F.

Подгруппа $H \leqslant G$ называется *вербальной*, если H порождена всеми значениями некоторого множества слов $W \subseteq F$ в группе G (в обозначениях: $H = W(G)$). Вербальная подгруппа $W(G)$ эндоморфно допустима в группе G.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, любая ненулевая вербальная подгруппа абелевой группы A совпадает с mA для некоторого $m \in \mathbf{N}$. В то же время в группе $A = \mathbf{Z}(p) \oplus \mathbf{Z}(p^2)$ (p — простое) p-слой $A[p] \underset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid pa = 0\}$ эндоморфно допустим, но не равен единственной ненулевой собственной вербальной подгруппе pA группы A.

Каждая эндоморфно допустимая подгруппа свободной группы $F_\varkappa$ ($\varkappa$ — любое кардинальное число) вербальна.

Если H — эндоморфно допустимая подгруппа группы F, то $H = W(F)$ для некоторого множества слов $W \subseteq F$. В этом случае можно считать, что $W = H$. Очевидно, что $F/H \in \mathfrak{W}(W) = \mathfrak{W}(H)$. Существует взаимно однозначное соответствие α между многообразиями и эндоморфно допустимыми подгруппами группы $F = F(x_1, x_2, \ldots)$, определенное равенствами: $\alpha(\mathfrak{C}) = V(\mathfrak{C})$ и $\alpha^{-1}(H) = \mathfrak{W}(H)$.

Эндоморфно допустимое замыкание множества слов $W \subseteq F$, т. е. наименьшая эндоморфно допустимая подгруппа $H \leqslant F$, содержащая W, равно $V(\mathfrak{W}(W))$. Слово $v \in F$ будет следствием W тогда и только тогда, когда $v \in V(\mathfrak{W}(W))$. Множества слов W_1, $W_2 \subseteq F$ эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их эндоморфно допустимые замыкания в F. *Включение многообразий* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$ равносильно обратному включению $V(\mathfrak{C}) \geqslant V(\mathfrak{D})$ соответствующих им эндоморфно допустимых подгрупп группы F.

Пересечение многообразий $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ есть наибольшее многообразие, содержащееся одновременно в $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. Это позволяет определить в частично упорядоченном по включению множестве многообразий операцию взятия точной нижней грани $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D} \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$. Очевидно, что $V(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}) = \langle V(\mathfrak{C}), V(\mathfrak{D})\rangle \leqslant F$.

Наименьшее многообразие, содержащее $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$, получается замыканием класса групп $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{D}$ относительно операций взятия подгрупп, эпиморфных образов и декартовых произведений. Это многообразие является точной верхней гранью многообразий $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ в частично упорядоченном по включению множестве многообразий и обозначается $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$. Заметим, что $V(\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}) = V(\mathfrak{C}) \cap V(\mathfrak{D})$.

Из всего сказанного сейчас следует, что все многообразия с операциями $\wedge$, $\vee$ образуют решетку $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{O}$. Указанное выше отображение α является анти-

изоморфизмом решетки $\mathrm{Lat}\,\mathbf{0}$ на решетку всех эндоморфно допустимых подгрупп группы F. Решетка $\mathrm{Lat}\,\mathbf{0}$ модулярна, но недистрибутивна (см. с. 141). Если $\mathfrak{C}$ — произвольное многообразие, то $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{C}$ означает решетку всех его подмногообразий.

Многообразие $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, состоящее из всех расширений групп многообразия $\mathfrak{C}$ посредством групп многообразия $\mathfrak{D}$, называется *произведением многообразия* $\mathfrak{C}$ *на многообразие* $\mathfrak{D}$. Саму операцию называют *умножением многообразий*.

Операция умножения многообразий ассоциативна. Очевидны соотношения: $\mathbf{0}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathbf{1} = \mathfrak{C}$, из которых видно, что множество всех многообразий является полугруппой с единицей и присоединенным нулем. Справедливы следующие соотношения: 1) если $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$, то $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$; 2) если $\mathfrak{D} \neq \mathbf{0}$ и $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{C}_2\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2$, в частности, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2\mathfrak{D}$ влечет $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ (сокращение справа); 3) если $\mathfrak{C} \neq \mathbf{0}$ и $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{C}\mathfrak{D}_2$, то $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$, в частности, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{D}_2$ влечет $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ (сокращение слева).

Примеры. 1) Многообразие $\mathfrak{A}^k$, $k \in \mathbf{N}$, есть k-я степень многообразия $\mathfrak{A}$; 2) $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$ — многообразие всех расширений абелевых групп посредством нильпотентных групп ступени не больше k; 3) $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ — многообразие всех расширений нильпотентных групп ступени не больше k посредством абелевых групп; 4) $\mathfrak{N}_{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \mathfrak{N}_{k_l}\mathfrak{N}_{k_{l-1}} \ldots \mathfrak{N}_{k_1}$ — *многообразие полинильпотентных групп сигнатуры* $(k_1, k_2, \ldots, k_l)$.

Многообразие, не представимое в виде произведения неединичных многообразий, называется *неразложимым*. Неразложимы, например, любое многообразие нильпотентных групп и любое многообразие простой экспоненты.

Любое многообразие $\mathfrak{C} \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$ однозначно представимо в виде произведения $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_k$ неразложимых многообразий (*теорема Нейманов — Шмелькина*). Если $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$ — многообразия, отличные от $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_l$ — также разложение в произведение неразложимых многообразий, то найдется многообразие $\mathfrak{H}$ такое, что $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{C}$ с разложениями $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \ldots \mathfrak{H}_l = \mathfrak{H}'_1\mathfrak{H}'_2 \ldots \mathfrak{H}'_k$ в произведения не обязательно неразложимых многообразий, для которых выполнены включения $\mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$; $\mathfrak{H}'_j \subseteq \mathfrak{C}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ (Ольшанский А. Ю.//

Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1986. — № 6. — С. 61—64).

Коммутатор $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ *многообразий* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ определяется равенством $V([\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]) = [V(\mathfrak{C}), V(\mathfrak{D})]$.

Множество слов $V \subseteq F = F(x_1, x_2, \ldots)$, задающее многообразие $\mathfrak{C}$, называется *базисом* (*тождеств*) многообразия $\mathfrak{C}$. Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *конечно базируемым* (к. б.), если для него можно выбрать конечный базис $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. В этом случае $\mathfrak{C}$ можно задать одним тождеством $v = 1$, где v — произведение слов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, записанных на непересекающихся множествах букв $X_i \subseteq X$, $i = 1, 2, \ldots$ Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *наследственно конечно базируемым* (н. к. б.), если к. б. любое его подмногообразие $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$. Многообразие $\mathfrak{C}$ *стабильно конечно базируемо* (с. к. б.), если для любого к. б. многообразия $\mathfrak{D}$ произведение $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ также к. б. Заметим, что произведение $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ не к. б., если хотя бы одно из многообразий $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ не к. б.

Приведем известные факты о конечной базируемости. 1) Любое многообразие нильпотентных $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbf{N}$, или метабелевых $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}^2$ групп с. к. б. Более того, любое многообразие $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{N}_k \vee \mathfrak{A}^2$, $k \in \mathbf{N}$, с. к. б. 2) Любое многообразие $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbf{N}$, с. к. б. В этом случае, если $\mathfrak{D}$ к. б., то и $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ к. б.

Множество всех с. к. б. многообразий замкнуто относительно операций произведения, пересечения и коммутирования, следовательно, многообразия $\mathfrak{A}^l$, $l \in \mathbf{N}$, и другие многообразия, определенные «полилинейными» коммутаторными тождествами (т. е. тождествами, полученными из разных букв x_i с помощью только операции коммутирования), также являются с. к. б. Это относится, скажем, к многообразиям $\mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbf{N}$; $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_l}$, $k_i, l \in \mathbf{N}$, и т. п. 3) Если $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ — с. к. б. многообразия взаимно простых экспонент, то многообразие $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ также с. к. б. 4) Известные с. к. б. бернсайдовы многообразия — $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_6$. 5) Любое из многообразий $\mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbf{N}$, н. к. б. Существуют не с. к. б. многообразия $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_1$. 6) Любое из многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k \wedge \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$, $k, l \in \mathbf{N}$, н. к. б. (относительно $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ см. (Красильников А. Н.//11 Всес. симп. по теории групп. Тезисы сообщ. — Свердловск, 1989. — С. 65)). 7) Многообразие Var G к. б., если G конечна, сверхразрешима или является расширением конечной

группы посредством нильпотентной. 8) Многообразие $(s\mathfrak{A})_n$, которое составляют все локально конечные группы периода $n \in \mathbf{N}$, имеющие абелевы силовские p-подгруппы, к. б. Не известно, будет ли к. б. в общем случае многообразие $\operatorname{Var} G$, если G — полициклическая или матричная группа.

Существует континуум не к. б. многообразий.

Пересечение убывающей цепи не к. б. многообразий также не к. б. Значит, любое не к. б. многообразие содержит минимальное подмногообразие с этим свойством, называемое предельным многообразием. Предельных многообразий бесконечно много. В решетке многообразий $\operatorname{Lat} \mathfrak{O}$ присутствуют континуальные интервалы $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$, целиком состоящие из не к. б. многообразий. Не всегда из конечной базируемости $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ следует конечная базируемость $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ (но всегда к. б. многообразие $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}$, для которого базисом может служить объединение базисов из $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$).

См. относительно приведенных фактов [3], [45], [47].

Базис V многообразия $\mathfrak{W}(V)$ называется *независимым*, если ни одно из слов $v \in V$ не следует из совокупности остальных слов $V \setminus \{v\}$.

Пример. Если n — нечетное число и $n \geqslant 1003$, то множество слов $V = \{[x_1^{pn}, x_2^{pn}]^n\}$, где параметр p пробегает все простые числа, является независимым базисом многообразия $\mathfrak{W}(V)$ (см. [1]). Подмножества $V' \subseteq V$ определяют континуум различных многообразий $\mathfrak{W}(V')$.

Существует многообразие $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}^7$, не обладающее независимым базисом тождеств (Клейман Ю. Г.// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 37—74).

Среди примеров не к. б. многообразий укажем $\mathfrak{B}_{p^2}\mathfrak{B}_p$, p — простое, задаваемое тождествами $(x_1^p x_2^p \ldots \ldots x_n^p)^{p^2} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_{p^2n}\mathfrak{C}$, p — простое, $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{C}$ — многообразие экспоненты, делящейся на p (Клейман Ю. Г.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — Т. 37, № 1. — С.95—97; — 1974. — Т. 38, № 3. — С. 475—483).

Многообразие $\mathfrak{C}$ ненулевой экспоненты m назовем *периодическим периода* (*экспоненты*) m. По определению $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}_m$. Локально конечное многообразие обязано быть периодическим. Бернсайдовы многообразия

$\mathfrak{B}_m$ при $m = 2$, 3, 4, 6 локально конечны. Теорема Новикова—Адяна утверждает, что многообразие $\mathfrak{B}_m$ при нечетном $m \geqslant 665$ не локально конечно. Относительно этой теоремы и других фактов, касающихся бернсайдовых многообразий см. п. 1.5.

Класс локально конечных групп периода m порождает локально конечное многообразие тогда и только тогда, когда порядки всех n-порожденных подгрупп, $n = 1, 2, \ldots$, в нем ограничены значениями некоторой функции $f(n, m)$. В частности, локально конечные группы простого периода p в силу теоремы Кострикина (см. п. 1.5) образуют многообразие $\mathfrak{K}_p$, называемое *кострикинским*.

Группа G называется *критической*, если G не принадлежит многообразию, порожденному ее собственными факторами H/K, где $H < G$, $K \trianglelefteqslant H$. Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *кроссовым*, если оно локально конечно, конечно базируемо и содержит только конечное множество критических групп.

Многообразие $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда кроссово, когда $\mathfrak{C} = \operatorname{Var} G$, G — конечная группа.

Конечные простые группы являются критическими, причем неизоморфные из них порождают разные многообразия. В общем случае неизоморфные конечные группы могут порождать одинаковые многообразия.

Пример. Имеем $\operatorname{Var} D_8 = \operatorname{Var} K_8$, где D_8, K_8 — группы диэдра и кватернионов восьмого порядка (см. [3]).

Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *почти кроссовым*, если само $\mathfrak{C}$ не кроссово, однако все его собственные подмногообразия кроссовы. Замечено, что любое некроссово многообразие содержит почти кроссово подмногообразие.

Разрешимые почти кроссовы многообразия исчерпываются следующим списком: 1) $\mathfrak{A}$, 2) $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_p$, p — простое, 3) $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_r$, p, q, r — различные простые, 4) $\mathfrak{A}_p(\mathfrak{B}_q \wedge \mathfrak{N}_2)$, q — нечетное простое, $p \neq q$ — простое, 5) $\mathfrak{A}_p(\mathfrak{B}_4 \wedge \mathfrak{N}_2)$, p — нечетное простое. Иными словами, каждое разрешимое многообразие либо порождено конечной группой, либо содержит одно из перечисленных многообразий, причем эти возможности взаимно исключаются.

Любое подмногообразие к. б. локально конечного многообразия групп обладает независимым базисом.

В частности, всякое разрешимое локально конечное многообразие имеет независимый базис (Ольшанский А. Ю.//Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1978. — Т. 3. — С. 139—146).

Существуют неразрешимые почти кроссовы многообразия групп. Например, многообразие $\mathfrak{K}_p \wedge \mathfrak{C}_{p-2}$ при простом $p \geqslant 5$ неразрешимо и почти кроссово (см. теорему Размыслова в п. 1.5).

Группа F называется *свободной группой многообразия* $\mathfrak{C}$, если: 1) $F \in \mathfrak{C}$, 2) существует такое множество X порождающих элементов группы F, называемое ее *множеством свободных порождающих* или *базисом* (*относительно многообразия* $\mathfrak{C}$), что любое отображение χ множества X в произвольную группу $H \in \mathfrak{C}$ однозначно продолжается до гомоморфизма группы F в группу H. Обозначим F через $F(X, \mathfrak{C})$. Мощность $\varkappa$ множества X называется рангом группы $F(X, \mathfrak{C})$. Ясно, что обычные определения свободной группы, ее базиса и ранга относятся к многообразию всех групп $\mathbf{0}$.

Для любого неединичного многообразия $\mathfrak{C}$ и любой мощности $\varkappa$ существует единственная с точностью до изоморфизма группа $F_\varkappa(\mathfrak{C})$, являющаяся свободной группой многообразия $\mathfrak{C}$ ранга $\varkappa$. Если V — базис многообразия $\mathfrak{C}$, то $F_\varkappa(\mathfrak{C}) \simeq F_\varkappa / V(F_\varkappa)$.

Пример. Группы, свободные в многообразии $\mathfrak{A}$, называют *свободными абелевыми группами.* Свободная группа $F_\varkappa(\mathfrak{A}) = F_\varkappa / F'_\varkappa$ ранга $\varkappa$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus^\varkappa \mathbf{Z}$ $\varkappa$ экземпляров группы $\mathbf{Z}$, которую также записываем $\mathbf{Z}^\varkappa$.

Для любого локально конечного многообразия $\mathfrak{C}$ определяется *порядковая функция* $f_\mathfrak{C}(n) \overset{=}{\underset{\text{def}}{=}} |F_n(\mathfrak{C})|$. Если многообразия $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ локально конечны, то $f_{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2}(n) = f_{\mathfrak{C}_2}(n) f_{\mathfrak{C}_1}((n-1) f_{\mathfrak{C}_2}(n) + 1)$.

Существует континуум локально конечных многообразий с попарно различными порядковыми функциями. Локально конечное многообразие $\mathfrak{C}$ нильпотентно тогда и только тогда, когда функция $\log f_\mathfrak{C}$ имеет степенный рост.

Пример. Два многообразия $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p} \wedge \mathfrak{N}_q$, p — простое, $q = p^3 + p^2 + p + 2$, одно из которых задается дополнительным тождеством $[x_1, x_2, px_3, px_4, \ldots, px_{p+2}, p^3x_{p+3}] = 1$, а другое — тождеством $[x_1, x_2, p^2x_3, p^2x_4, \ldots, p^2x_{p+2}, px_{p+3}] = 1$, различны, но имеют одинаковые порядковые функции.

О порядковых функциях многообразий см. Ольшанский А. Ю.//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973. — Т. 37. — С. 89—94.

Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *шрайеровым*, если любая подгруппа группы $F_\varkappa(\mathfrak{C})$ для любого $\varkappa$ свободна в многообразии $\mathfrak{C}$. Шрайеровы многообразия исчерпываются следующим списком: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_p$, p — простое.

При $X_1 \subseteq X$ подгруппа $\langle X_1 \rangle$ группы $F_\varkappa(X, \mathfrak{C})$ свободна в $\mathfrak{C}$ над X_1 (т. е. с базисом X_1). В частности, группа $F_n(\mathfrak{C})$ вложима в $F_{n+1}(\mathfrak{C})$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Многообразие $\mathfrak{C}$ называется *регулярным*, если, наоборот, $F_{n+1}(\mathfrak{C})$ нельзя вложить в $F_n(\mathfrak{C})$ ни при каком $n \in \mathbf{N}$. Хорошо известно, что многообразие всех групп $\mathbf{0}$ нерегулярно. Например, коммутант F_n' свободной группы F_n при любом $n \geqslant 2$ — свободная подгруппа счетного ранга, что дает вложение группы F_{ω_0} в группу F_n. Многообразие $\mathfrak{C} \neq \mathbf{0}$, каждая свободная группа $F_n(\mathfrak{C})$, $n \in \mathbf{N}$, которого допускает конечный нормальный ряд $E = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \ldots \triangleleft N_k = F_n(\mathfrak{C})$, факторы которого N_{i+1}/N_i или локально конечны, или локально разрешимы, регулярно. Регулярны все многообразия нильпотентных и разрешимых групп, произведения локально конечных и локально разрешимых многообразий и т. д.

Существуют нерегулярные многообразия, отличные от $\mathbf{0}$. Например, при нечетном $n \geqslant 665$ имеет место вложение группы $F_m(\mathfrak{B}_n)$, $m \in \mathbf{N}$, в группу $F_2(\mathfrak{B}_n)$, что дает нерегулярность многообразия $\mathfrak{B}_n$ при заданных условиях (см. [1]). Более того, при тех же предположениях группа $F_{\omega_0}(\mathfrak{B}_n)$ также вложима в $F_2(\mathfrak{B}_n)$ (Ширванян В. Л.//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976. — Т. 40, № 1. — С. 190—208).

Пусть $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ — многообразия, свободные группы которых аппроксимируются конечными p-группами при одном и том же простом p. Пусть $Y \subseteq F_\varkappa(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ — подмножество, свободно порождающее по модулю $V(F_\varkappa(\mathfrak{C}\mathfrak{D}))$, где V — базис тождеств многообразия $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$-свободную подгруппу. Тогда Y свободно порождает $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$-свободную подгруппу $\langle Y \rangle \leqslant F_\varkappa(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$. В частности, если элементы множества $Y \subseteq F_\varkappa(\mathfrak{A}^l)$, $l \in \mathbf{N}$, независимы по модулю коммутанта $F_\varkappa'(\mathfrak{A}^l)$, то $\langle Y \rangle = F(Y, \mathfrak{A}^l)$.

Справедливо более общее утверждение. Пусть Y, $|Y| \geqslant 2$, — подмножество элементов свободной полинильпотентной группы $F_\varkappa(\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_l})$, $l \in N$. Тогда Y

является базисом группы $\langle Y\rangle = F(Y, \mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_l})$ в том и только том случае, когда элементы из Y линейно независимы над $\mathbf{Z}$ по модулю коммутанта $F'_{\varkappa}(\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_l})$.

Кодом группы G *в многообразии* $\mathfrak{C}$ называется перечень $\langle X \| R; \mathfrak{C}\rangle$, где $G \simeq F(X, \mathfrak{C})/\langle\langle R\rangle\rangle$. Множество слов R в алфавите X называется *множеством определяющих слов группы* G *относительно* $\mathfrak{C}$. Множество $\{r = 1 \mid r \in R\}$ называется *множеством определяющих соотношений группы* G *относительно* $\mathfrak{C}$. Если к тому же указано отображение $\varphi\colon X \to G$ на множество порождающих элементов группы G, то приходим к понятию *копредставления* $\langle X \| R;\ \mathfrak{C}\rangle_{\varphi}$ *относительно* $\mathfrak{C}$. Остальные термины аналогичны абсолютному случаю $\mathfrak{C} = \mathbf{0}$, нужно только отмечать соответствующее многообразие. Очевидно, что любую группу $G \in \mathfrak{C}$ можно задать бесконечным множеством различных кодов относительно $\mathfrak{C}$. По аналогии с абсолютным случаем $\mathfrak{C} = \mathbf{0}$ говорят о группах *конечно определенных в многообразии* $\mathfrak{C}$, которые могут не быть конечно определенными (в $\mathbf{0}$). Например, любая группа $F_n(\mathfrak{A}^l)$ при $n,\ l \geqslant 2$ не конечно определена, хотя в $\mathfrak{A}^l$ ее множество определяющих соотношений пусто.

В многообразиях $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_l}$ (а значит, в многообразиях $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{A}^l$ и т. д.) справедлив аналог обобщенной теоремы о свободе (см. § 2). Существуют многообразия, скажем, $\mathrm{Var}\, G$, где G — конечная неразрешимая группа, где такой аналог не имеет места (см. [47]).

Ступень разрешимости [нильпотентности] любого разрешимого [нильпотентного] многообразия $\mathfrak{C}$ ограничена, так как $\mathfrak{C}$ замкнуто относительно операции взятия декартовых произведений. Следовательно, любое разрешимое [нильпотентное] многообразие $\mathfrak{C}$ является подмногообразием некоторого многообразия $\mathfrak{A}^l$ $[\mathfrak{N}_k]$.

Если $\mathfrak{C}$ — разрешимое многообразие и $\mathfrak{C} \not\supseteq \mathfrak{A}^2$, то $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}_n \mathfrak{N}_k \mathfrak{B}_m$ для некоторых чисел n, k, $m \in \mathbf{N}$ (Каргаполов М. И., Чуркин В. А.//Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 6. — С. 651—657). Заключение приведенного утверждения остается справедливым, если заменить условие разрешимости $\mathfrak{C}$ на предположение о принадлежности $\mathfrak{C}$ как подмногообразия произведению конечного числа разрешимых и

локально конечных многообразий (Groves J. R. I.// Bull. Austral. Math. Soc. — 1971 — V. 5, N 1. — P. 95—109; Bull. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 7, N 3. — P. 437—441).

Существует неабелево многообразие, все конечные группы которого абелевы (Ольшанский А. Ю.// Мат. сб. — 1985. — Т. 126, № 1. — С. 59—82).

Многообразие $\mathfrak{B}_2$ абелево, $\mathfrak{B}_3 \subseteq \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{B}_6 = \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_2 \wedge \wedge \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ разрешимо. Многообразия $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_9$, $\mathfrak{B}_p \wedge \mathfrak{E}_{p-2}$, $p \geqslant 5$ — простое (и вместе с ними все многообразия $\mathfrak{B}_{4m}$, $\mathfrak{B}_{9m}$, $\mathfrak{B}_{pm}$, $m \in \mathbf{N}$), неразрешимы (см. теорему Размыслова в п. 1.5). Для многообразия $\mathfrak{E}_2$ справедливы строгие включения $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{N}_3$. Любое многообразие $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{E}_3$ экспоненты, взаимно простой с 5, разрешимо (Gupta N.//Can. Math. Bull. — 1972. — V. 15, N 4. — P. 523—524).

Многообразие $\mathfrak{A}^2$ удовлетворяет условию минимальности для подмногообразий. Поэтому каждое метабелево многообразие является точной верхней гранью конечного множества многообразий, неразложимых относительно операции $\vee$ нетривиальным образом. Однозначность такого разложения нарушается при недистрибутивности решетки многообразий. К сожалению, даже в достаточно узких подрешетках нильпотентных и разрешимых многообразий имеет место недистрибутивность (см. далее).

Если метабелево многообразие $\mathfrak{C}$ не локально конечно, то оно представимо в виде $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \mathfrak{C}_3$, где $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{C}_2$ однозначно представимо как точная верхняя грань конечного множества многообразий вида $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}_m \wedge \mathfrak{A}^2$, k, $m \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{C}_3$ локально конечно.

Решеткой многообразия $\mathfrak{C}$ назовем решетку $\operatorname{Lat}\mathfrak{C}$ всех его подмногообразий. *Покрытием* многообразия $\mathfrak{C}$ в некоторой решетке L называется многообразие $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C}$ из L такое, что между $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ в L нет других многообразий. В решетке $\operatorname{Lat}\mathfrak{O}$ всех многообразий любое собственное подмногообразие $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{O}$ имеет бесконечно много покрытий (Ольшанский А. Ю.//Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1978. — Т. 3. — С. 139—146). Существуют многообразия $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}^7$ такие, что $\mathfrak{C}$ имеет независимый базис, но не обладает в $\mathfrak{D}$ покрытием, значит не определяется в $\mathfrak{D}$ независимым базисом в его естественном определении

(Клейман Ю. Г.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 37—74).

Дистрибутивны решетки следующих многообразий: 1) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$; 2) многообразия метабелевых p-групп (p — простое) ступени нильпотентности не больше $p+1$; 3) многообразия метабелевых групп конечной экспоненты, p-группы (p — простое) в котором имеют ступени нильпотентности не больше p; 4) многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$, m, $n \in \mathbf{N}$, если квадрат любого простого делителя числа m не делит n, в частности, многообразия $\mathfrak{A}_{p^k}\mathfrak{A}_p$, p — простое, $k \in \mathbf{N}$.

Недистрибутивны решетки следующих многообразий: 1) $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_9 \wedge \mathfrak{N}_{11}$, 2) $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 \wedge \mathfrak{N}_6$, 3) $\mathfrak{A}_{p^2}\mathfrak{A}_{p^2} \wedge \mathfrak{N}_{p+2}$, p — простое, 4) многообразия $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}_{p^2}\mathfrak{A}_{p^2n}$ (p — простое), $1 \neq n \in \mathbf{N}$, $(p, n) = 1$, состоящего из групп, силовские p-подгруппы которых имеют ступень нильпотентности не больше $p+1$.

Пусть M_{k1} — множество всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{A}^2 \wedge \mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbf{N}$, а M_{kl}, $l > 1$, — множество тех многообразий из M_{k1}, свободные группы которых не содержат элементов порядков $2, 3, \ldots, l$. Пусть $p(k)$ — наибольшее простое, не превышающее $k-2$, если $k \geqslant 3$, и $p(k) = 1$, если $k = 1, 2, 3$. Для любого k подрешетка $M_{kp(k)}$ дистрибутивна, для $k > 3$ подрешетка $M_{kp(k)-1}$ недистрибутивна (Белов Ю. А.// Вопр. теории групп и гомолог. алгебры. — Ярославль. — 1979, № 2. — С. 55—68).

Решетка многообразия $\mathfrak{B}_{p^k} \wedge \mathfrak{N}_l$, p — простое, k, $l \in \mathbf{N}$, дистрибутивна тогда и только тогда, когда $l \leqslant 3$ или $l = 4$ и $p > 2$, или $l = 5$ и $p > 5$. Решетка всех многообразий групп p-примарной экспоненты ступени нильпотентности $l < p$ есть подпрямое произведение l решеток, каждая из которых является прямым произведением решеток $A_p^{\varphi(\alpha)}$, где α пробегает подходящее множество индексов A. Множество A и функция φ не зависят от числа p. Символ A_p^m обозначает решетку, дуальную решетке всех подгрупп p-примарного индекса в свободной абелевой группе $F_m(\mathfrak{A}) = \mathbf{Z}^m$ (Клячко А. А.//Упорядоченные множества и решетки. Вып. 1. — Саратов, 1971. — С. 31—42).

Говорят, что многообразие $\mathfrak{C}$ имеет *конечный аксиоматический ранг* $r_a = r_a(\mathfrak{C})$, если $\mathfrak{C}$ можно задать

базисом тождеств от r_a переменных и число r_a — минимальное с этим свойством. В противном случае, если такого числа r_a не существует, говорят, что $\mathfrak{C}$ имеет *бесконечный аксиоматический ранг.*

Любое многообразие $\mathfrak{C}$ порождается свободной группой $F_{\omega_0}(\mathfrak{C})$ счетного ранга. Говорят, что многообразие $\mathfrak{C}$ имеет *конечный базисный ранг* $r_b = r_b(\mathfrak{C})$, если $\mathfrak{C}$ порождается свободной группой $F_{r_b}(\mathfrak{C})$ и число r_b — минимальное с этим свойством. Если такого числа r_b не существует, то говорят, что $\mathfrak{C}$ имеет *бесконечный базисный ранг.*

Примеры. 1) Поскольку существует вложение группы F_{ω_0} в группу F_2, имеем $r_b(0) = 2$. 2) При $k \geqslant 2$ имеем $r_b(\mathfrak{N}_{k-1}) = k-1$. Более того, если $\mathfrak{N}_k \wedge \mathfrak{A}\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{N}_k$, $k > 2$, то $r_b(\mathfrak{C}) \geqslant k-1$. Если при этом группа $F_k(\mathfrak{C})$ не имеет кручения, то $r_b(\mathfrak{C}) \leqslant k-1$. В частности, $r_b(\mathfrak{N}_k \wedge \mathfrak{A}^l) = k-1$ при $k, l > 2$. 3) Группа $F_{\omega_0}(\mathfrak{A}^2)$ аппроксимируется группой $F_2(\mathfrak{A}^2)$, т. е. для любого элемента $1 \neq g \in F_{\omega_0}(\mathfrak{A}^2)$ существует гомоморфизм φ_g группы $F_{\omega_0}(\mathfrak{A}^2)$ в группу $F_2(\mathfrak{A}^2)$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$. Отсюда следует, что $r_b(\mathfrak{A}^2) = 2$. 4) Группа $F_3(\mathfrak{M}_i)$ при $i = 1, 2$ аппроксимируется, соответственно, группой $F_2(\mathfrak{M}_i)$, значит, $\operatorname{Var} F_3(\mathfrak{M}_i) = \operatorname{Var} F_2(\mathfrak{M}_i)$, $i = 1, 2$. Однако базисный ранг $r_b(\mathfrak{M}_i)$, $i = 1, 2$, строго больше — он равен четырем. При $k \geqslant 3$ цепь многообразий $\operatorname{Var} F_n(\mathfrak{M}_k)$ строго возрастает при $n = 2, 3, \ldots, k-1$ и $\operatorname{Var} F_{k-1}(\mathfrak{M}_k) = \mathfrak{M}_k$, т. е. $r_b(\mathfrak{M}_k) = k-1$.

Многообразие $\mathfrak{C}$ называется многообразием *лиевского типа,* если $\mathfrak{C}$ порождается своими нильпотентными группами без кручения. При дополнительном предположении об отсутствии кручения в факторах нижних центральных рядов свободных групп $F_\varkappa(\mathfrak{C})$ многообразие называется *магнусовым.* Класс магнусовых многообразий строго меньше класса многообразий лиевского типа. Оба класса замкнуты относительно операции произведения многообразий. Примеры магнусовых многообразий: $\mathbf{0}$, $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{A}^l$, $k, l \in \mathbf{N}$, и многообразия, полученные из многообразий $\mathfrak{N}_k$ с помощью конечной последовательности пересечений и умножений.

Не существует такого счетного семейства групп $G_i \in \mathfrak{A}^7$, что каждое подмногообразие $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}^7$ порождалось бы некоторым его подсемейством. Более того, для любого класса групп $\mathscr{K}$ мощности меньшей, чем

континуум, найдется континуум многообразий $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}^7$ с одним и тем же запасом групп из $\mathscr{K}$ (Клейман Ю. Г.//Сиб. мат. ж. — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 117—132).

Множество M групп многообразия $\mathfrak{C}$ называется *дискриминирующим* для $\mathfrak{C}$, если для любого множества слов $v_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $v_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не являющихся тождествами в $\mathfrak{C}$, найдется группа $G \in M$, а в ней — элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ такие, что $v_i(g_1, g_2, \ldots, g_n) \neq 1$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. В этом случае $\mathfrak{C} = \operatorname{Var} M$. Если многообразие $\mathfrak{C}$ порождается множеством групп Γ, а многообразие $\mathfrak{D}$ дискриминируется множеством групп Δ, то многообразие $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ дискриминируется, и, следовательно, порождается множеством всех сплетений $G \,\bar{\imath}\, D$, где $G \in \Gamma$, $D \in \Delta$.

Говорят, что на группе G выполнено *квазитождество* $\underset{i=1,\ldots,k}{\&} v_i(\bar{y}) = 1 \Rightarrow v(\bar{y}) = 1$, если подстановка вместо $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в групповые слова $v_i(\bar{y})$, $v(\bar{y})$ любого набора $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ элементов группы G дает либо $v_i(\bar{g}) \neq 1$ для некоторого i, либо $v(\bar{g}) = 1$. Другими словами, квазитождество есть универсальная формула определенного вида с обычным для теории моделей понятием выполнимости.

Квазимногообразием $\mathfrak{Q}$ называется класс всех групп, на которых выполнено каждое из квазитождеств данного семейства Σ. Говорят, что Σ задает или определяет $\mathfrak{Q}$.

Тождество $v(\bar{y}) = 1$ *эквивалентно* квазитождеству $y_1 = y_1 \Rightarrow v(\bar{y}) = 1$, следовательно, любое многообразие является квазимногообразием.

Множество квазимногообразий замкнуто по пересечениям. Определены соответствующие включениям операции взятия точной нижней $\wedge$ и точной верхней $\vee$ граней. Получаем решетку квазимногообразий $\operatorname{Lat} \mathfrak{q}\mathbf{0}$, которая даже не модулярна.

Примеры. 1) Класс всех групп без кручения является квазимногообразием, задаваемым квазитождествами $y_1^n = 1 \Rightarrow y_1 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ 2). Если Γ — семейство групп G_α, то $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}(\Gamma)$ — наименьшее квазимногообразие, которое содержит все группы G_α. Говорят, что $\mathfrak{Q}$ *порождено семейством* Γ. В частности, $\mathfrak{q}(G)$ — квазимногообразие, порожденное группой G. 3) Класс всех локально индикабельных групп является квазимногообра-

зием, задаваемым множеством квазитождеств $\underset{i=1,\ldots,m}{\&} v_i(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Rightarrow y_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, таких, что группа $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \| v_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1, i = 1, 2, \ldots, m\rangle$ не обладает гомоморфизмом на группу $\mathbf{Z}$. 4) Все линейно упорядочиваемые группы образуют квазимногообразие, относительно задания которого см. п. 3.4.

Произведение квазимногообразий $\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ определяется как класс всех групп, являющихся расширениями групп из $\mathfrak{Q}$ посредством групп из $\mathfrak{S}$. Произведение $\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ само является квазимногообразием. Квазимногообразие $\mathfrak{q}(F(\mathfrak{C}))$, порожденное группой $F(\mathfrak{C})$, свободной в многообразии $\mathfrak{C}$ и не имеющей кручения, неразложимо в произведение $\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ собственных подквазимногообразий. Если группа $F(\mathfrak{C})$ имеет кручение, то это утверждение, вообще говоря, неверно. Например, квазимногообразие $\mathfrak{q}(F(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3)) = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ разложимо в произведение (Федоров А. Н.//Изв. вузов. Сер. мат. — 1986. — № 6. — С. 34—39).

Пусть $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп. Многообразие $\mathrm{Var}\,\mathscr{F}$ совпадает с многообразием всех групп $\mathbf{0}$. В то же время квазитождество $y_1^{-1}y_2^2y_1y_2^{-3} = 1 \Rightarrow [y_2, y_1]^2 = y_2$ выполнено в каждой конечной группе K, но не выполнено в группе G с кодом $\langle x_1, x_2 \| x_1^{-1}x_2^2x_1x_2^{-3} = 1\rangle$, т. е. $G \notin \mathfrak{q}(\mathscr{F})$ и $\mathfrak{q}(\mathscr{F}) \neq \mathbf{0}$.

Из общей теории (см. п. VI.2.1) следует, что любое квазимногообразие $\mathfrak{Q} \neq \mathbf{1}$ имеет свободные группы $F_\varkappa(\mathfrak{Q})$ произвольного ранга $\varkappa$ с обычными свойствами.

Квазимногообразия замкнуты относительно взятия подгрупп и декартовых произведений.

Если любая конечно порожденная подгруппа H группы G вложима в некоторую группу K квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, то $G \in \mathfrak{Q}$. Относительно гораздо более тонкого критерия принадлежности данному квазимногообразию — локальной замкнутости см. [34].

Пример. Класс $\mathscr{K}$ всех групп K с условием $\bigcap_{i=1}^{\infty} K^{p^i} = E$, p — фиксированное простое, не является квазимногообразием. Действительно, любая конечно порожденная подгруппа квазициклической группы $C(p^\infty)$ — циклическая p-группа $C(p^n)$, но в то же время имеем $C(p^\infty)^p = C(p^\infty)$, следовательно, $C(p^\infty) \notin \mathscr{K}$.

Класс групп $\mathscr{K}$ является квазимногообразием в том и только том случае, если $E \in \mathscr{K}$ и класс $\mathscr{K}$

замкнут относительно подгрупп и фильтрованных произведений (см. [34]).

Конечно определенная группа G принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{q}(\Gamma)$, если она аппроксимируется группами из совокупности Γ или, что равносильно, если группа G вложима в декартово произведение групп из Γ.

Совокупность квазитождеств Σ, задающих квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, называется *базисом квазитождеств* или просто *базисом* этого квазимногообразия. Квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ называется *конечно базируемым* (к. б.), если для него существует конечный базис. Базис Σ квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ называется *независимым*, если любое собственное подмножество $\Sigma' \subset \Sigma$ задает квазимногообразие, отличное от Σ. Говорят, что квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ имеет *конечный* [*бесконечный*] *аксиоматический ранг*, если $\mathfrak{Q}$ можно [нельзя] задать базисом Σ от конечного множества переменных.

Бесконечный аксиоматический ранг имеют квазимногообразия $\mathfrak{q}(F_n)$ $(n \geqslant 2)$, $\mathfrak{q}(F_n(\mathfrak{A}^l))$ $(n, l \geqslant 2)$ (Будкин А. И.//Мат. сб. — 1980. — Т. 112, № 4. — С. 647—655), $\mathfrak{q}(G)$, где G — конечная группа с хотя бы одной неабелевой силовской подгруппой (Ольшанский А. Ю.//Сиб. мат. ж. — 1974. — Т. 15, № 2. — С. 1409—1413). Среди простых конечных групп только группы $\mathrm{PSL}(2, p^n)$, $p^{2n} \not\equiv 1 \bmod 16$, и группа Янко J имеют абелевы силовские подгруппы по всем простым p. Конечные базисы квазитождеств каждой из этих групп указаны в работе Федоров А. Н.//Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1983. — № 5. — С. 16—18.

Если квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ не содержит бесконечного множества циклических групп простых порядков и в то же время содержит бесконечную циклическую группу, то $\mathfrak{Q}$ имеет независимый базис. В частности, квазимногообразие $\mathfrak{q}(G)$, порожденное группой без кручения G, имеет независимый базис (Будкин А. И.//Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 6. — С. 817—825).

Покрытием квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ в некоторой решетке квазимногообразий L называется такое квазимногообразие $\mathfrak{Q} \subsetneqq \mathfrak{S} \in L$, что между $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{S}$ нет других квазимногообразий из L. Не всякое квазимногообразие имеет покрытие в решетке всех

квазимногообразий. Если квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ имеет независимый базис, то $\mathfrak{Q}$ имеет бесконечно много покрытий в решетке всех квазимногообразий. Значит, существуют квазимногообразия, не обладающие независимым базисом. В каждой из решеток подквазимногообразий $\mathbf{0}$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{A}^2$ множество квазимногообразий, не имеющих покрытий в соответствующей решетке и содержащих свободные группы многообразия континуально (Будкин А. И.//Сиб. мат. ж. — 1986. — Т. 27, № 3. — С. 28—33).

Базисным рангом квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ называется такое наименьшее число n, если оно существует, что $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}(G)$, где G есть n-порожденная группа. Базисный ранг любого квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, замкнутого относительно прямых сплетений (т. е. из A, $B \in \mathfrak{Q}$ следует $A \operatorname{r} B \in \mathfrak{Q}$), равен двум. Заметим, что если класс $\mathscr{K}$ групп замкнут относительно прямых сплетений, то и квазимногообразие $\mathfrak{q}(\mathscr{K})$ также замкнуто относительно прямых сплетений (Будкин А. И.// Мат. сб. — 1983. — Т. 121, № 4. — С. 510—522).

1.5. Группы с условиями конечности. *Условием конечности* называется теоретико-групповое свойство, присущее всем конечным группам. Сюда относятся конечная порожденность и конечная определенность, периодичность и локальная конечность, условия максимальности и минимальности для подгрупп или нормальных подгрупп, свойство группы иметь конечные классы сопряженных элементов или вербальные подгруппы конечной ширины и т. п.

Рассмотрим конечно порожденные и конечно определенные группы. Любая подгруппа конечно порожденной группы счетна. Произвольная счетная группа G вложима в 2-порожденную группу H. При этом, если группа G задана n определяющими соотношениями, то и H можно задать n определяющими соотношениями. Существует бесконечное счетное множество неизоморфных 2-порожденных групп.

Всякая счетная π-группа вложима в 2-порожденную π-группу. Любая счетная группа из произвольного многообразия $\mathfrak{C}$ вложима в 2-порожденную группу из многообразия $\mathfrak{C}\mathfrak{A}^2$. В частности, любая счетная разрешимая группа ступени l вложима в 2-порожденную разрешимую группу ступени $l+2$. Оценка в общем случае не улучшается, так как далеко не

всякая счетная абелева группа A вложима в 2- (и даже конечно) порожденную метабелеву группу B. Одна из причин этого — финитная аппроксимируемость B, которая в случае вложимости A в B переносится на A. Нельзя, например, взять $A = \mathbf{Q}$ или $A = C(p^\infty)$, так как делимые группы не финитно аппроксимируемы. В конечно порожденных нильпотентных и, более общо, полициклических группах любая подгруппа также конечно порождена. Любая конечно порожденная нильпотентная [полициклическая] группа вложима в 2-порожденную нильпотентную [полициклическую] группу. Подробности см. в [47].

Произвольная счетная ФА-группа G вложима в 2-порожденную ФАС-группу H таким образом, что элементы группы G будут сопряжены в группе H тогда и только тогда, когда их образы сопряжены во всех конечных факторгруппах группы G (Романьков В. А.//ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1984. — Препринт № 515. — 23 с.).

Классы периодических и локально конечных групп замкнуты относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов, прямых произведений и расширений.

Любая p-подгруппа (p — простое) произвольной группы G содержится в некоторой максимальной p-подгруппе группы G, которую называют *силовской p-подгруппой* группы G. В отличие от конечного случая силовские p-подгруппы произвольной группы G могут оказаться не только не сопряженными между собой в G, но даже и не изоморфными.

Пример. В свободном произведении $G = P_1 * P_2$ p-групп любая силовская p-подгруппа сопряжена либо с P_1, либо с P_2.

Если известно, что в группе G силовская p-подгруппа P имеет только конечное множество сопряженных, то можно гарантировать, что любая силовская p-подгруппа группы G сопряжена с P, и их число сравнимо с 1 по модулю p.

В теории локально конечных групп имеют место специальные теоремы о силовских подгруппах. Так, если P — конечная силовская p-подгруппа локально конечной группы G, то все остальные силовские p-подгруппы также конечны и сопряжены с P. Если любая счетная подгруппа локально конечной группы G имеет только счетное множество силовских

p-подгрупп, то все силовские p-подгруппы группы G сопряжены. Силовские p-подгруппы счетной локально конечной группы G сопряжены в том и только том случае, если их счетное множество.

Для любого простого числа p существуют бесконечные конечно порожденные p-группы. Более того, для любого числа $n \in \mathbf{N}$ существует бесконечная $(n+1)$-порожденная p-группа, в которой все n-порожденные подгруппы конечны (*теорема Голода*).

Заметим, что эти группы не могут быть разрешимыми и тем более нильпотентными. Свободную группу бернсайдова многообразия $\mathfrak{B}_n$, имеющую ранг m, обозначим через $B_m(n)$ и будем называть *свободной бернсайдовой группой* (ранга m, периода n).

Известная в теории групп *проблема Бернсайда* — это вопрос о существовании бесконечной группы $B_m(n)$ при некоторых $m, n \in \mathbf{N}$. Она решается следующей теоремой: для любого нечетного числа $n \geqslant 665$ группа $B_m(n)$, $m \geqslant 2$, бесконечна (*теорема Новикова—Адяна*); см. [1]. При этом централизатор неединичного элемента $g \in B_m(n)$ цикличен и, следовательно, абелевы подгруппы такой группы $B_m(n)$ — конечные циклические. Эти группы $B_m(n)$ не являются конечно определенными.

Известно, что $|B_m(2)| = 2^m$, $|B_m(3)| = 3^{m+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}}$, $|B_m(4)| < \infty$ (точный порядок вычислен в частных случаях: $|B_2(4)| = 2^{12}$, $|B_3(4)| = 2^{69}$, $|B_4(4)| = 2^{422}$), $|B_m(6)| = 2^r 3^{s+\binom{s}{2}+\binom{s}{3}}$, где $r = (m-1)\,3^{m+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}}$, $s = (m-1)\,2^m + 1$. Вопрос о конечности групп $B_m(n)$, $m \geqslant 2$, при других n, в частности, при $n = 5$, $n = 2^l$ $(l \geqslant 3)$, остается открытым.

Обозначим через $f_m(n)$ верхнюю границу для порядков конечных m-порожденных групп периода n. При $|B_m(n)| = k < \infty$ имеем $f_m(n) = k$. В общем случае конечность $|B_m(n)|$ и $f_m(n)$ не равносильны. Известная в теории групп *ослабленная проблема Бернсайда* — это вопрос о конечнозначности функции $f_m(n)$ для произвольных чисел m, n.

Пусть $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_r^{l_r}$ — примарное разложение периода n. Предположим, что ослабленная проблема Бернсайда решается положительно для каждого из

примарных сомножителей $p_i^{l_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$. Тогда существует конечная верхняя граница $g_m(n)$ для порядков конечных разрешимых m-порожденных групп периода n (*теорема Холла — Хигмана*).

Для простого периода $n=p$ функция $f_m(p)$ конечнозначна (*теорема Кострикина*); см. [24].

Отсюда и из разрешимости любой конечной группы, порядок которой не делится на квадрат простого числа, получаем конечнозначность функции $f_m(p_1p_2\ldots$ $\ldots p_r)$ (p_i — различные простые).

Пусть $K_m(p)$, p — простое, $m \in \mathbf{N}$, — свободная группа ранга m в локально конечном кострикинском многообразии групп $\mathfrak{K}_p$ (см. п. 1.4). Тогда $f_m(p)=$ $=|K_m(p)|$.

Отметим также результаты, касающиеся бесконечно порожденных групп конечного периода.

1) Пусть $B_\infty(p, k)$ — свободная группа бесконечного ранга в многообразии $\mathfrak{B}_p \wedge \mathfrak{E}_k$, p — простое. При $k \geqslant p-2 \geqslant 3$ группа $B_\infty(p, k)$ неразрешима. 2) Группа $B_\infty(4)$ неразрешима (*теорема Размыслова*).

Для групп простого периода условия разрешимости и нильпотентности равносильны. Заметим, также, что любая группа из $\mathfrak{E}_3$, не имеющая элементов порядка 5, разрешима (Gupta N.//Can. Math. Bull. — 1972. — V. 15, N 4. — P. 523—524). Любая группа из $\mathfrak{E}_3$, не имеющая элементов порядков 2 и 5 нильпотентна. В то же время существует группа $G \in \mathfrak{E}_3$ периода 4, не являющаяся нильпотентной; см. [17].

Бесконечная локально конечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу (*теорема Каргаполова — Холла — Кулатилаки*).

Группа U называется *универсальной локально конечной группой*, если выполнены следующие условия: 1) U содержит копию любой конечной группы K; 2) если K_1, $K_2 \leqslant U$ — изоморфные конечные подгруппы, то они сопряжены в U. Существует единственная счетная универсальная локально конечная группа, и любая счетная локально конечная группа в нее вложима. Для больших мощностей аналог этого утверждения не имеет места (см. [47]).

Известны примеры бесконечных простых конечно порожденных групп конечных периодов. Например, при простом $p \geqslant 665$ пересечение $N_m(p)$ членов

нижнего центрального ряда группы $B_m(p)$, $m \geqslant 2$, — бесконечная конечно порожденная подгруппа конечного индекса. Факторгруппа $N_m(p)/M_m(p)$ по максимальной нормальной подгруппе $M_m(p)$ — искомая конечно порожденная бесконечная простая группа периода p.

Рассмотрим группы с условиями максимальности и минимальности. Класс нётеровых групп замкнут относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Разрешимая группа является нётеровой в том и только том случае, если она полициклична. Нётерова 2-группа конечна.

1) Существует бесконечная некоммутативная 2-порожденная простая группа A, любая собственная неединичная подгруппа которой — циклическая группа бесконечного порядка. 2) Существует бесконечная некоммутативная 2-порожденная группа B, любая собственная неединичная подгруппа которой — циклическая группа простого порядка (при простом $p > 10^{75}$ такая группа B есть в многообразии $\mathfrak{B}_p$) (*теорема Ольшанского*); см. [48].

Ясно, что A, $B \in \max$, $B \in \min$. Заметим, что эта теорема решает проблему Шмидта о существовании бесконечной неабелевой группы, все собственные подгруппы которой конечны (абелев пример — группа $C(p^\infty)$).

Класс артиновых групп замкнут по подгруппам, гомоморфным образам и расширениям. Каждая артинова группа периодична.

Бесконечная почти разрешимая группа G является артиновой в том и только том случае, когда G — конечное расширение прямого произведения конечного множества квазициклических групп (теорема Черникова).

Такие группы называют *черниковскими*. Любая [почти] локально разрешимая группа с условием минимальности [почти] разрешима, а значит, черниковская.

Произвольная локально конечная группа G с условием минимальности является черниковской. Более того, заключение этого утверждения верно и при более слабом предположении о наличии условия минимальности у всех абелевых подгрупп группы G (*теорема Шункова*).

Любая 2-группа с условием минимальности является черниковской (*теорема Шмидта*).

Рассматриваются различные обобщения условия минимальности. Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности, если любой убывающий ряд подгрупп $G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_i \geqslant G_{i+1} \geqslant \ldots$ «почти» стабилизируется на конечном шаге, т. е. существует число i, для которого все индексы $|G_{i+t} : G_{i+t+1}|$, $t = 0, 1, \ldots$, конечны. В класс групп со слабым условием минимальности, кроме артиновых групп, попадают, например, все полициклические группы.

Локально разрешимая группа G тогда и только тогда удовлетворяет слабому условию минимальности, когда в ней найдется нормальная подгруппа конечного индекса H такая, что: 1) периодическая часть $T(H)$ есть прямое произведение конечного множества квазициклических групп; 2) факторгруппа $\bar{H} = H/T(H)$ обладает конечным субнормальным рациональным рядом $\bar{H} = \bar{H}_0 \trianglerighteq \bar{H}_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \bar{H}_l = E$ конечного типа. Здесь «рациональный» означает, что все факторы $\bar{H}_i/\bar{H}_{i+1}$ вложимы в группу $\mathbf{Q}$, «конечного типа» — что любая факторгруппа любого фактора $\bar{H}_i/\bar{H}_{i+1}$ по неединичной циклической подгруппе есть прямая сумма конечного множества циклических и квазициклических групп. Для локально конечных групп слабое условие минимальности равносильно обычному условию минимальности (З а й ц е в Д. И.//Укр. мат. ж. — 1968. — № 20. — С. 472—482).

Условия максимальности и минимальности для нормальных подгрупп, обозначаемые, соответственно, как $\max_n$ и $\min_n$, формулируются так же, как и обычные условия max и min. Нужно только заменить в формулировках слова «подгруппа» на «нормальная подгруппа».

Конечно порожденная группа G, являющаяся расширением абелевой группы посредством полициклической группы ($\mathfrak{A}\mathfrak{P}$-группа) удовлетворяет условию $\max_n$ (*теорема Ф. Холла*).

В частности, конечно порожденные группы из многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{A}^2$ удовлетворяют $\max_n$.

Всякая локально нильпотентная группа с условием $\min_n$ является черниковской группой (см. [109]).

В группе $B_m(n)$ при нечетном $n \geqslant 665$ и $m \geqslant 66$ существует бесконечная система дополнительных определяющих соотношений, независимых по модулю тождества $x^n = 1$. Отсюда следует существование в группе $B_m(n)$ бесконечных возрастающих и убывающих рядов нормальных подгрупп, т. е. на $B_m(n)$ не выполнены условия $\max_n$ и $\min_n$. Аналог этого утверждения для любого $m \geqslant 2$ известен при составном нечетном $n = ks$, где $k \geqslant 665$ и $s > 2$ (Адян С. И.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 5. — С. 931—947).

Рассмотрим группы с конечными классами сопряженных элементов. Элемент g группы G называется FC-*элементом*, если g имеет в G конечное множество сопряженных элементов или, что то же самое, если индекс $|G : C_G(g)|$ конечен. Множество всех FC-элементов группы G образует автоморфно допустимую подгруппу FC(G), содержащую центр $C(G)$. Подгруппа FC(G) называется FC-*центром* группы G. Группа G называется FC-*группой*, если $G = \mathrm{FC}(G)$.

Абелевы группы, прямые произведения конечных групп, и их прямые произведения между собой являются FC-группами.

Прямые произведения конечных групп обладают более сильным, чем «быть FC-группой», свойством: они *локально нормальны*. Это значит, что любое нормальное, т. е. инвариантное относительно внутренних автоморфизмов, конечное подмножество элементов группы G содержится в конечной нормальной подгруппе $N \trianglelefteq G$. Следующая теорема позволяет сводить изучение FC-групп к исследованию локально нормальных подгрупп.

Произвольная группа G является FC-группой в том и только том случае, когда G вложима в прямое произведение абелевой группы без кручения и локально нормальной группы.

В частности, периодическая группа G будет FC-группой тогда и только тогда, когда G локально нормальна. Факторгруппа FC-группы G по ее центру финитно аппроксимируема.

Прямые произведения конечных групп, их подгруппы и гомоморфные образы локально нормальны. Однако не любая локально нормальная группа может быть получена таким способом. Приведем основ-

ные факты: 1) Счетная локально нормальная группа G вложима в прямое произведение конечных групп в том и только том случае, если G финитно аппроксимируема. 2) Произвольная финитно аппроксимируемая локально нормальная группа является гомоморфным образом подпрямого произведения конечных групп. 3) Счетная локально нормальная группа является гомоморфным образом подпрямого произведения конечных групп. Вместе с тем существует несчетная локально нормальная группа, не являющаяся гомоморфным образом подпрямого произведения конечных групп. 4) Факторгруппа по центру $G/C(G)$ финитно аппроксимируемой локально нормальной группы является подпрямым произведением конечных групп. 5) Коммутант финитно аппроксимируемой локальной нормальной группы есть подпрямое произведение конечных групп.

Группа G называется *ограниченно сопряженно конечной* или BFC-*группой*, если существует такое число n, что в каждом классе сопряженности не более n элементов из G.

Группа G является BFC-группой тогда и только тогда, когда коммутант G' конечен.

Для того чтобы p-подгруппа P локально нормальной группы G являлась ее силовской p-подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение P с любой конечной нормальной подгруппой K группы G было бы силовской p-подгруппой группы K. Другими словами силовская p-подгруппа P должна быть объединением силовских p-подгрупп конечных нормальных подгрупп группы G.

Автоморфизм φ группы G называется *локально внутренним*, если на любом конечном подмножестве $K \subseteq G$ отображение φ: $K \to \varphi(K)$ совпадает с некоторым отображением σ_f: $K \to K^f$, где σ_f — внутренний автоморфизм, отвечающий элементу f группы G. Силовские p-подгруппы локально нормальной группы G *локально сопряжены*, т. е. переводятся одна на другую локально внутренним автоморфизмом группы G. Конечность числа силовских p-подгрупп и их сопряженность между собой — эквивалентные условия в классе локально нормальных групп.

Пусть G — группа, в которой элементов каждого конкретного порядка, включая бесконечный, конечное

число. Такие группы называются FO-*группами* или *слойно конечными группами.* 1) Произвольная FO-группа локально нормальна. 2) Каждая черниковская почти центральная группа является FO-группой. 3) Локально нормальная группа G будет FO-группой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы являются черниковскими. Поэтому, эпиморфный образ FO-группы тоже есть FO-группа.

Относительно FC-, BFC-, FO-групп см. [12].

Пусть G — произвольная группа, $w(G)$ — ее вербальная подгруппа, определяемая словом w. Будем говорить, что $w(G)$ имеет *ширину* l, если любой элемент $g \in w(G)$ представляется как произведение l значений слов $w^{\pm 1}$ в группе G, причем l — минимальное число с этим свойством. Если такого l не существует, то говорят, что ширина подгруппы $w(G)$ бесконечна.

Так как при любом эпиморфизме $\varphi\colon G \to H$, $\varphi(w(G)) = w(H)$, ширина подгруппы $w(H)$ не превосходит ширину подгруппы $w(G)$. Однако при переходе к подгруппам и расширениям групп ширина может существенно измениться. Суммируем известные факты о ширине вербальных подгрупп. 1) Любая неединичная собственная вербальная подгруппа свободного произведения групп $G = G_1 * G_2$, отличного от бесконечной группы диэдра $\mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)$, имеет бесконечную ширину. В частности, любая вербальная подгруппа свободной группы F_n, $n \geqslant 2$, имеет бесконечную ширину. 2) Любая вербальная подгруппа полициклической (в частности, конечно порожденной нильпотентной) группы имеет конечную ширину. Любая вербальная подгруппа конечно порожденной почти нильпотентной группы имеет конечную ширину. 3) Любая вербальная подгруппа конечно порожденной группы $G \in \mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbf{N}$, имеет конечную ширину. 4) Если $G \in \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ — конечно порожденная разрешимая группа, где $\mathfrak{C}$ — класс, в котором каждая конечно порожденная группа удовлетворяет условию $\max_n$, то коммутант G' имеет конечную ширину относительно слова $w = [x_1, x_2]$. В частности, приведенное утверждение имеет место для конечно порожденных $\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$-групп. 5) Второй коммутант $F''_3(\mathfrak{N}_2\mathfrak{A})$ имеет бесконечную ширину относительно слова $w = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$. Относительно 2) и 5), а также обзора приве-

денных утверждений см. (Романьков В. А.//Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 1. — С. 60—72).

В некоторых случаях известно точное значение для ширины l коммутанта G'. Если $G=F_n(\mathfrak{N}_2)$, то $l=[n/2]$, если $G=F_2(\mathfrak{N}_3)$, то $l=1$, в остальных случаях $G=F_n(\mathfrak{N}_k)$, $n\geqslant 2$, $k\geqslant 3$, имеем $l=n$. То же самое верно, если вместо $G=F_n(\mathfrak{N}_k)$ брать $G=F_n(\mathfrak{N}_k\cap\mathfrak{A}^2)$ или $G=F_n(\mathfrak{A}^2)$ (Алламбергенов Х. С., Романьков В. А. //Докл. АН Уз. ССР. — 1984. — № 4. — С. 14 — 15).

Можно говорить о ширине элемента $g\in w(G)$ как о наименьшем числе множителей в записи $g=w_1w_2\ldots w_r$, где w_i — значение слова w или w^{-1} в группе G. Пусть $g=g_1g_2\ldots g_n\in G_1*G_2*\ldots*G_n$, $1\neq g_i\in G_i$, — элемент свободного произведения конечно определенных групп. Очевидно, что $g\in G'$ в том и только том случае, если $g_i\in G_i'$, $i=1, 2, \ldots, n$. Пусть ширина каждого множителя g_i как элемента G_i' равна l_i. Тогда ширина $g\in G'$ равна $l=\sum_{i=1}^n l_i$ (Goldstein R. Z., Turner E. C.// Contemp. Math. — 1985. — V.44. — P. 69 — 72).

Если индекс центра $|G:C(G)|$ конечен, то и коммутант G' конечен (*лемма Шура*). Если факторгруппа G/ζ_kG конечна, то и подгруппа $\gamma_{k+1}G$ конечна. Если подгруппа $\gamma_{k+1}G$ конечна, то и факторгруппа $G/\zeta_{2k}G$ конечна.

§ 2. Разрешимые группы

2.1. Нильпотентные и полициклические группы. Нормальный ряд

$$G\trianglerighteq G_1\trianglerighteq G_2\trianglerighteq\ldots\trianglerighteq G_{n+1}=E$$

с абелевыми факторами G_i/G_{i+1} будет центральным в группе G, если действие группы G на его факторах, определенное формулой $(yG_{i+1})\circ x \underset{\text{def}}{=} xyx^{-1}G_{i+1}$, $x\in G$, $y\in G_i$, оказывается тождественным. Последнее на языке взаимных коммутантов означает, что

$$[G, G_i]\leqslant G_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Для членов нижнего $\{\gamma_iG\}$ и верхнего $\{\zeta_iG\}$ центральных рядов произвольной группы G справедливы

включения: $[\gamma_m G, \gamma_n G] \subseteq \gamma_{m+n} G$ $(m, n \in \mathbf{N})$, $[\gamma_m G, \zeta_n G] \leqslant \zeta_{n-m} G$ $(n \geqslant m \geqslant 1)$. Группа G нильпотентна, если она обладает центральным рядом конечной длины.

Приведем некоторые свойства нильпотентных групп.

1) Если G — нильпотентная группа и H — такая подгруппа, что $G = HG'$, то $H = G$, в частности, коммутант G' содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. 2) Если G — нильпотентная группа и $E \neq H \trianglelefteq G$, то $H \cap \zeta_1 G \neq E$. 3) Если A — любая максимальная абелева нормальная подгруппа в нильпотентной группе G, то A совпадает со своим централизатором $C_G(A)$. 4) Любая подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы конечно порождена, т. е. конечно порожденные нильпотентные группы нётеровы. 5) Произведение NM нормальных нильпотентных подгрупп произвольной группы G — снова нормальная нильпотентная подгруппа в G *).

Совокупность $T(G)$ периодических элементов нильпотентной группы G является подгруппой, распадающейся в прямое произведение своих примарных (т. е. p-) подгрупп.

Базисные коммутаторы свободной группы F с базисом $x_1, \ldots, x_r$ определяются по индукции:

1) $c_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, — базисные коммутаторы веса один: $\omega(x_i) = 1$. 2) Пусть базисные коммутаторы весов, меньших n, уже определены и упорядочены так, что коммутаторы веса i следуют за коммутаторами меньших весов, и между собой упорядочены произвольным способом. Тогда базисными коммутаторами веса n являются коммутаторы $c_k = [c_i, c_j]$, где: а) c_i и c_j — базисные коммутаторы и $\omega(c_i) + \omega(c_j) = n$; б) $c_i > c_j$, и если $c_i = [c_s, c_t]$, то $c_j \geqslant c_t$.

Если F — свободная группа с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и $c_1 < c_2 < \ldots < c_t$ — упорядоченная последовательность всех базисных коммутаторов весов $1, 2, \ldots, n$, то произвольный элемент $f \in F$ однозначно представим в виде $f \equiv c_1^{l_1} \ldots c_t^{l_t} \bmod \gamma_{n+1} F$, $l_i \in \mathbf{Z}$. Образы при естественном гомоморфизме $\gamma_n F \to \gamma_n F / \gamma_{n+1} F$ ба-

*) Произведение всех нильпотентных нормальных подгрупп Fitt G группы G называется *подгруппой Фиттинга* группы G. Подгруппа Fitt G нормальна в G и локально нильпотентна.

зисных коммутаторов веса n образуют базис свободной абелевой группы $\gamma_n F/\gamma_{n+1} F$.

Примеры. 1) Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, тогда группа $UT(n, R)$ нильпотентна ступени $n-1$. 2) Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, S — его подкольцо со свойством $S^n = 0$. Тогда $G = \langle 1 + x \mid x \in S \rangle$ — подгруппа мультипликативной группы R^*. Обозначим через $G^{(i)} = \langle 1 + x \mid x \in S^i \rangle$. Тогда $[G^{(i)}, G^{(j)}] \leqslant G^{(i+j)}$, и группа G нильпотентна.

Пусть G — группа операторов, действующая на группе N. Семейство $\{N_i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\}$ G-операторных подгрупп из N назовем *флагом длины* k, если $N_0 = N$, $N_k = E$ и $N_{i+1} \trianglelefteq N_i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Действие G на флаге назовем *нильпотентным*, если индуцированное действие G на N_i/N_{i+1} является тождественным для всех i, $0 \leqslant i < k$.

Если G действует на флаге длины k точно и нильпотентно, то G является нильпотентной группой ступени $l \leqslant \binom{k}{2}$. Если флаг — центральный ряд для N, то ступень G не более чем $k-1$.

Если G-операторная группа N является векторным пространством над полем, а элементы из G действуют как линейные преобразования, то нильпотентность действия G означает, что в N существует такая база, относительно которой все элементы из G будут представлены унитреугольными матрицами.

Нильпотентные действия важны в исследованиях по алгебраической топологии. Если X — линейно связное топологическое пространство и G — его фундаментальная группа, то G действует на всех гомотопических группах $\pi_n(X)$. Говорят, что пространство является *нильпотентным*, если все эти действия являются нильпотентными; в частности, группа G в этом случае также является нильпотентной. Теорема Уайтхеда о гомотопической эквивалентности односвязных CW-комплексов обобщается на нильпотентные пространства.

Любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения (*$\mathcal{N}$-группа*) является подгруппой группы $UT(n, \mathbf{Z})$ для подходящего числа n. В свою очередь, подгруппы из $UT(n, \mathbf{Z})$ являются $\mathcal{N}$-группами.

Для группы $UT(n, \mathbf{Z})$ строится, начиная с клетки в правом углу, центральный ряд с циклическими факторами без кручения. Поэтому и для любой $\mathcal{N}$-группы

также существует центральный ряд, факторы которого изоморфны $\mathbf{Z}$.

Пусть R — *биномиальное кольцо*, т. е. область целостности, содержащая $\mathbf{Z}$ в качестве подкольца и вместе с каждым элементом λ все биномиальные коэффициенты:

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Нильпотентная группа G ступени m называется *R-степенной*, если для любых $x \in G$ и $\lambda \in R$ однозначно определен элемент $x^\lambda \in G$, причем выполняются следующие аксиомы ($x, y, x_1, \ldots, x_n$ — произвольные элементы из G; λ, μ — произвольные элементы из R):

1) $x^1 = x, \quad x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}, \quad (x^\lambda)^\mu = x^{\lambda\mu}$,

2) $y^{-1}x^\lambda y = (y^{-1}xy)^\lambda$,

3) $x_1^\lambda x_2^\lambda \ldots x_n^\lambda = (x_1 x_2 \ldots x_n)^\lambda \tau_2(x)^{\binom{\lambda}{2}} \ldots \tau_m(x)^{\binom{\lambda}{m}}$,

где $\tau_i(x)$ есть i-е слово от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемое рекуррентно из соотношения

$$x_1^i x_2^i \ldots x_n^i = \tau_1^i(x)\,\tau_2(x)^{\binom{i}{2}} \ldots \tau_{i-1}(x)^{\binom{i}{i-1}} \tau_i(x),$$

в свободной группе с базисом $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть G есть R-степенная группа. Подгруппу H группы G будем называть *R-степенной подгруппой*, если она замкнута относительно возведения в любую степень $\lambda \in R$. Замыкание H^R подгруппы H есть наименьшая R-степенная подгруппа, содержащая H. Если для множества $\{g_i \mid i \in I\}$ элементов группы G подгруппа $\langle g_i \mid i \in I\rangle^R$ равна G, то множество $\{g_i \mid i \in I\}$ называется *системой порождающих* R-степенной группы G. Группа G называется *группой без R-кручения*, если для всех $g \in G$, $\lambda \in R$ из равенства $g^\lambda = 1$ следует, что либо $\lambda = 0$, либо $g = 1$.

Упорядоченный набор элементов $u_1, \ldots, u_n$ назовем *мальцевской базой* R-степенной группы G, если:

1) каждый элемент x из G можно единственным способом представить в виде

$$x = u_1^{t_1(x)} u_2^{t_2(x)} \ldots u_n^{t_n(x)}, \quad t_i(x) \in R;$$

2) пусть $G_i = \langle u_i, \ldots, u_n \rangle^R$, тогда цепочка подгрупп $G = G_1 \geqslant \ldots$ образует центральный ряд группы G.

Элементы $t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x)$ — координаты элемента x в базе $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Координаты $t_i(xy)$ произведения элементов x и y в фиксированной мальцевской базе являются многочленами над кольцом $R_{\mathbf{Z}}$ ($R_{\mathbf{Z}}$ — кольцо частных для R, в котором обращаются элементы из $\mathbf{Z}$) от $2n$ переменных $t_i(x), t_j(y)$. Аналогично, если $\lambda \in R$, то координаты $t_i(x^\lambda)$ являются многочленами над кольцом $R_{\mathbf{Z}}$ от $n+1$ переменной $t_i(x), \lambda$. Тем самым на степенной R-группе G, имеющей мальцевскую базу, определена структура аффинной алгебраической группы (см. [40], [63]).

Если R — кольцо главных идеалов и G — конечно порожденная R-степенная группа без R-кручения, то мальцевская база в G всегда есть, а группа G изоморфна R-подгруппе $UT(n, R)$ для подходящего n.

Если S — подкольцо R, то группу G называют *S-определенной*, если существует мальцевская база группы G, в которой умножение и возведение в степень задаются многочленами с коэффициентами из S. Пусть G и H — произвольные R-степенные группы. Структура R-степенной группы позволяет среди гомоморфизмов φ: $G \to H$ естественно выделить следующие подклассы:

1) *R-гомоморфизмов*, для которых $(g^\lambda)^\varphi = (g^\varphi)^\lambda$ при любых $g \in G$, $\lambda \in R$;

2) *R-скрещенных гомоморфизмов*, для которых существуют такой эндоморфизм θ кольца R, что $(g^\lambda)^\varphi = (g^\varphi)^{\lambda\theta}$ при любых $g \in G$, $\lambda \in R$.

Теория категорий нильпотентных R-групп параллельна теории нильпотентных групп и развита в [66], [118].

Пусть G является R-степенной группой с мальцевской базой $u_1, \ldots, u_n$; $f_i, g_i, i = 1, \ldots, n,$ — многочлены умножения и возведения в степень в этой базе. Если $R \leqslant S$ и S — биномиальное кольцо, то можно построить новую группу G^S, называющуюся *S-пополнением* группы G. Элементами G^S служат всевозможные формальные произведения $u_1^{\xi_1} \ldots u_n^{\xi_n}$, $\xi_i \in S$, а умножение и возведение в степень задаются при помощи многочленов $f_i, g_i, i = 1, \ldots, n$. При таком

определении G^S становится S-степенной группой. Это координатное определение пополнения пригодно только для групп, обладающих мальцевской базой. Опишем категорный подход к определению пополнений при следующих ограничениях:

1) рассматриваемые кольца R, S — являются кольцами главных идеалов,

2) R-степенные группы являются группами без R-кручения.

Пусть $R \leqslant S$ — кольца, а N есть R-степенная группа. Тогда S-группа G будет называться *тензорным S-пополнением* группы N, если существует R-гомоморфизм α: $N \to G$ такой, что для любой S-группы H и β-гомоморфизма $N \to H$ существует однозначно определенный S-гомоморфизм γ: $G \to H$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ H & \end{tikzcd}$$

коммутативной. Группу G будем обозначать через N^S.

Тензорное S-пополнение R-группы N определено с точностью до S-изоморфизма. Если в группе N существует мальцевская база, то категорное и координатное определения приводят к одной и той же группе N^S.

Пусть $N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3$ — точная последовательность R-групп. Тогда однозначно определены S-гомоморфизмы α^S и β^S продолжающие α и β, и последовательность $N_1^S \xrightarrow{\alpha^S} N_2^S \xrightarrow{\beta^S} N_3^S$ также является точной.

Если G — нильпотентная группа без кручения, $R = \mathbf{Z}$, $S = \mathbf{Q}$, то группа $G^{\mathbf{Q}}$ называется *мальцевским пополнением* группы G. Если $R = \mathbf{Z}$, $S = \mathbf{Z}_p$, то группа $G^{\mathbf{Z}_p}$ называется *p-адическим пополнением* G. Подробнее о тензорных S-пополнениях см. Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.//Сиб. мат. ж. — 1982. — Т. 23, № 5. — С. 152—167.

Пусть π — множество простых чисел, а G — нильпотентная группа. Говорят, что группа G *π-локаль-*

на, если для каждого $p \notin \pi$ отображение $x \mapsto x^p$ является биекцией. В силу этого определения конечная p-группа является p-локальной группой. Если G есть π-локальная группа, то она не содержит элементов порядка p для $p \notin \pi$. Если π состоит из пустого множества, то G π-локальна тогда и только тогда, когда G — делимая группа без кручения.

Абелева группа является π-локальной тогда и только тогда, когда она допускает структуру $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p},\ p \notin \pi\right]$-модуля.

Если G есть π-локальная группа и H — ее подгруппа, то H является π-локальной тогда и только тогда, когда она π'-*изолирована* (т. е. если $g^p \in H$ для $p \notin \pi$, то $g \in H$).

Теорема о локализации: пусть G — любая нильпотентная группа, π — произвольное множество простых чисел, тогда существуют π-локальная группа G_π и гомоморфизм θ_π: $G \to G_\pi$ такие, что для любого гомоморфизма α: $G \to H$, где H есть π-локальная группа, найдется единственный гомоморфизм β, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta_\pi"] \arrow[dr] & G_\pi \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

является коммутативной.

Подробнее о локализациях нильпотентных групп см. [118]. Отметим, что π-локализация группы G — это тензорное $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p},\ p \notin \pi\right]$-пополнение группы. К сожалению, в полном объеме теория тензорных S-пополнений пока еще не разработана.

Рассмотрим размерные подгруппы и точные представления. Пусть G — группа, $\mathbf{Z}G$ — целочисленное групповое кольцо G, ε: $\mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ — кольцевой гомоморфизм тривиализации, продолжающий отображение $G \to 1$. Ядро ε — *разностный* (*фундаментальный*) *идеал* $\mathfrak{g} = \{\sum n_g g \mid \sum n_g = 0\}$. Для натурального числа i i-я размерная подгруппа для G есть $D_i G = G \cap$

$\bigcap(1+\mathfrak{g}^i)$ (см. п. 2.4). Непосредственно проверяется, что $\gamma_i G \leqslant D_i G$.

Если G — нильпотентная группа без кручения, то существует такое число m, что $D_m G = E$; если, кроме того, $G \in \mathcal{N}$ и G ступени c, то $m = c+1$.

Пусть G — некоторая $\mathcal{N}$-группа ступени c, и пусть n_G — ранг свободного $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Z}G/\mathfrak{g}^{c+1}$. Тогда действие G правыми умножениями на ряде

$$\mathbf{Z}G/\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 \geqslant \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{g}^c/\mathfrak{g}^{c+1} \geqslant 0$$

определяет точное вложение α_G: $G \to UT(n_G, \mathbf{Z})$. Назовем вложение α_G *каноническим представлением* $\mathcal{N}$-группы G, а число n_G — *степенью* канонического представления.

Отметим связь нильпотентных групп с кольцами Ли. Обозначим через $NT(n, K)$ — множество верхнетреугольных матриц над полем K нулевой характеристики с нулями на главной диагонали.

Для любого $x = e + u \in UT(n, K)$ (e — единичная матрица) положим

$$\log x = u - \frac{1}{2}u^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n-1} u^{n-1},$$

а для любого $v \in NT(n, K)$ —

$$\exp v = e + \frac{1}{2!}v^2 + \ldots + \frac{v^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$\log\colon\ UT(n, K) \to NT(n, K)$$

и

$$\exp\colon\ NT(n, K) \to UT(n, K)$$

— взаимно обратные отображения, и для коммутирующих матриц x, y имеем

$$\log xy = \log x + \log y,$$

а для коммутирующих матриц u, $v \in NT(n, K)$ —

$$\exp(u+v) = (\exp u)(\exp v).$$

Линейное пространство $NT(n, K)$ над полем K становится алгеброй Ли, если положить $(u, v) = uv -$

$-vu$. Для любого вектора $\bar{m}=(m_1, \ldots, m_r)$ с натуральными координатами определим

$$[x, y]_{\bar{m}}=[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{m_1 \text{ раз}}, \underbrace{x, \ldots, x}_{m_2 \text{ раз}}, \ldots],$$

$$(u, v)_{\bar{m}}=(u, \underbrace{v, \ldots, v}_{m_1 \text{ раз}}, \underbrace{u, \ldots, u}_{m_2 \text{ раз}}, \ldots).$$

Существуют рациональные числа $k_{\bar{m}}$ такие, что для любых двух матриц $u, v \in NT(n, K)$ матрица

$$u * v = u + v + \sum_{\bar{m}} k_{\bar{m}} (u, v)_{\bar{m}}$$

(*формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа*) удовлетворяет равенству

$$(\exp u)(\exp v) = \exp(u * v).$$

Для любых $x, y \in UT(n, K)$ $\log xy = (\log x) * (\log y)$. Для любой подгруппы G из $UT(n, K)$ положим $L(G) = K \log G$. Тогда:

1) $L(G)$ есть подалгебра Ли для $NT(n, K)$;

2) $\exp L(G)$ есть подгруппа $UT(n, K)$;

3) если G есть K-степенная подгруппа, то $\exp L(G) = G$;

4) если φ есть K-автоморфизм K-степенной группы G из $UT(n, K)$, то отображение $\hat{\varphi}$: $\log x \longmapsto \log(\varphi(x))$ $x \in UT(n, K)$ является автоморфизмом алгебры Ли $L(G)$; верно и обратное, автоморфизм алгебры Ли $L(G)$ определяет автоморфизм группы G.

Категория K-степенных нильпотентных групп и категория нильпотентных алгебр Ли над K, где K — поле нулевой характеристики, изоморфны.

Переходя от поля K к кольцу $\mathbf{Z}$, отметим, что $\log UT(n, \mathbf{Z})$ не является $\mathbf{Z}$-модулем, хотя и существует такое число m, что $m\mathbf{Z} \log G \leqslant \log G$ для любой подгруппы G из $UT(n, \mathbf{Z})$ (m зависит только n). Группа G называется *решеточной группой*, если $\log G$ является аддитивной группой матричного кольца. Группа матриц

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} & \frac{1}{2}\mathbf{Z} \\ & 1 & \mathbf{Z} \\ & & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

— пример решеточной группы. Пусть G есть $\mathcal{N}$-группа, α_G — ее каноническое представление. Тогда пересечение всех решеточных подгрупп $UT(n_G, \mathbf{Z})$, содержащих $\alpha_G(G)$, является решеточной группой и обозначается G^{lat}; $[G^{\mathrm{lat}} : G] < \infty$. Аналогично, подгруппу G из $UT(n, \mathbf{Z})$ назовем *лиевой группой*, если $\log G$ является кольцом Ли. Пересечение всех лиевых подгрупп, содержащих $\alpha_G(G)$, является лиевой подгруппой и обозначается G^{Lie}; $[G^{\mathrm{Lie}} : G] < \infty$.

С нильпотентной группой можно связать кольцо Ли другим способом через понятие ассоциированного кольца Ли (см. [24]). Последний метод оказался особенно плодотворным при решении проблем бернсайдова типа.

Группа G называется *полициклической*, если существует субнормальный ряд

$$E = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G \qquad (*)$$

с циклическими факторами. Рассмотрим основные свойства полициклических групп.

Число бесконечных факторов в ряде (*) является инвариантом полициклической группы; его называют *числом Хирша* и обозначают $h(G)$. Если $H \leqslant G$, то $h(H) \leqslant h(G)$; $h(H) = h(G)$ в том и только том случае, когда $|G : H| < \infty$. Если $N \trianglelefteq G$, то $h(G) = h(N) + h(G/N)$. Подгруппы и факторгруппы полициклических групп также являются полициклическими группами. Ряд коммутантов полициклической группы G не более чем через $n - 1$ шаг обрывается на единице, т. е. группа G является разрешимой. Кроме того, группа G конечно определена и финитно аппроксимируема. Абелевы и нильпотентные группы являются полициклическими в том и только том случае, когда они конечно порождены. Если каждая конечная факторгруппа группы G нильпотентна, то и сама группа G нильпотентна. Любая бесконечная полициклическая группа содержит бесконечную абелеву нормальную подгруппу без кручения. Для любого натурального числа m факторгруппа G/G^m конечна.

В каждой полициклической группе существует подгруппа конечного индекса, являющаяся расширением нильпотентной группы посредством абелевой группы.

Подгруппа Фиттинга $\operatorname{Fitt} G$ полициклической группы G является максимальной нормальной нильпотентной подгруппой. Факторгруппа $G/\operatorname{Fitt} G$ для полициклической группы G почти абелева.

Любая полициклическая группа G изоморфна подгруппе группы $GL(m, \mathbf{Z})$ при некотором m. Более того, группы $\operatorname{Aut} G$ и $\operatorname{Hol} G$ также могут быть вложены в группу $GL(n, \mathbf{Z})$ при некотором n.

Пусть N — некоторая $\mathscr{N}$-группа и $\Lambda = \mathbf{Q} \log (\alpha_N N)$ — алгебра Ли. Автоморфизм φ группы N называется *полупростым* [*унипотентным*], если соответствующий автоморфизм $\hat{\varphi}$ алгебры Ли Λ диагонализируемый [унипотентный]. Говорят, что полициклическая группа $\overline{G}$, содержащая G, есть *полупростое расщепление* для G, если: 1) $\overline{G} = M \rightthreetimes T$, где $M = \operatorname{Fitt}(\overline{G})$ есть $\mathscr{N}$-группа, T — свободная абелева группа; 2) T действует полупросто на M; 3) $G \trianglelefteq \overline{G}$, $C_T(M) = E$, $\overline{G} = MG = GT$, 4) $M = (M \cap G)\, C_M(T)$.

Полициклическая группа G называется *расщепляемой*, если она допускает полупростое расщепление. Два расщепления $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ группы G *эквивалентны*, если между ними существует изоморфизм, тождественный на G. В любой полициклической группе есть расщепляемая автоморфно допустимая подгруппа конечного индекса. Полупростые расщепления для расщепляемой группы с точностью до эквивалентности составляют конечное множество классов полупростых расщеплений.

Если $\overline{G} = M \rightthreetimes T$ — некоторое полупростое расщепление для G, то $\overline{G}$ точно действует на ряде $\mathbf{Z}G/\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 \geqslant \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{g}^c/\mathfrak{g}^{c+1} \geqslant 0$, и это действие индуцирует каноническое вложение $\alpha_{\overline{G}}\colon \overline{G} \to GL(n_{\overline{G}}, \mathbf{Z})$, где $n_{\overline{G}} = n_M$ — степень канонического представления группы M.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — полный набор попарно неэквивалентных канонических представлений полупростых расщеплений для расщепляемой группы G. Тогда каноническое вложение для расщепляемой группы G есть

$$\alpha_G\colon G \to GL(n_G, \mathbf{Z}), \qquad g \mapsto \operatorname{diag}(\alpha_1 g, \ldots, \alpha_k g),$$

и $n_G = n_1 + \ldots + n_k$, где n_i — степень канонического представления α_i, $i = 1, \ldots, k$.

Для произвольной группы G обозначим через s_G наименьшее натуральное число среди таких чисел s, что F^s (где $F = \mathrm{Fitt}(G)$) — группа без кручения, $t_G = \min\{t \in \mathbf{N} \mid F^s G^{t!}$ — расщепляемая подгруппа$\}$; $G_{\mathrm{split}} \underset{\mathrm{def}}{=} F^s G^{t_G!}$. Тогда отображение α_G: $G \to GL(n_G, \mathbf{Z})$, индуцированное $\alpha_{G_{\mathrm{split}}}$, называется *каноническим представлением* группы G; $n_G = |G : G_{\mathrm{split}}| n_{G_{\mathrm{split}}}$ — *степень* канонического представления.

Рассмотрим $\mathbf{Q}$-определенную алгебраическую подгруппу A группы $GL(n, \mathbf{C})$ (см. 63). Для подкольца R из $\mathbf{C}$ обозначим $A(R) = A \cap GL(n, R)$. Подгруппа Γ из $A(\mathbf{Q})$ называется *арифметической* в A, если $\Gamma \leqslant A(\mathbf{Q})$ и Γ *соизмерима* с $A(\mathbf{Z})$, т. е. $\Gamma \cap A(\mathbf{Z})$ имеет конечный индекс в Γ и в $A(\mathbf{Z})$. Любая разрешимая арифметическая группа почти расщепляема на нильпотентную и абелеву части. Более точно, в G есть такая подгруппа конечного индекса H, что $H = N \leftthreetimes T$, где N является $\mathcal{N}$-группой, T — свободной абелевой группой. Любая $\mathcal{N}$-группа, а потому и любая конечно порожденная нильпотентная группа является арифметической группой. Существуют полициклические группы, не являющиеся арифметическими. Например, пусть $A \simeq \mathbf{Z}^3$, $T \simeq \mathbf{Z}^2$ и T действует на $\mathbf{Q} \otimes A$ неприводимо, а F — свободная нильпотентная группа ступени 2 и двумя свободными порождающими; β: $F \to T$ — каноническое накрытие. Тогда группа $G = A \leftthreetimes F$, где $f \in F$ действует на A сопряжением как элемент $\beta(f)$ не является арифметической.

Арифметические подгруппы конечно определены и конечные подгруппы в них составляют конечное множество сопряженных подгрупп.

Описание групп автоморфизмов конечно порожденных нильпотентных групп основано на следующих двух результатах:

а) Если G_1 и G_2 соизмеримые (т. е. обладающие изоморфными подгруппами конечного индекса) конечно порожденные нильпотентные группы, то $\mathrm{Aut}\, G_1$ и $\mathrm{Aut}\, G_2$ также соизмеримы.

б) Если G есть $\mathcal{N}$-группа и $G = G^{\mathrm{Lie}}$, то $\mathrm{Aut}\, G$ совпадает с группой автоморфизмов соответствую-

щего кольца Ли, а потому является арифметической группой.

Группа автоморфизмов конечно порожденной нильпотентной группы является арифметической. Однако группа автоморфизмов полициклической группы не обязана быть арифметической группой.

Если G — полициклическая группа и $A = \mathrm{Aut}\, G$, то существует $B \trianglelefteq A$ такая, что A/B — конечно порожденная почти абелева группа, B — арифметическая группа.

Любая полициклическая группа является ФАС-группой (*теорема Ремесленникова—Форманека*).

Из этого результата следует: 1) положительное решение проблемы сопряженности в классе полициклических групп (см. п. 4.4); 2) решение конгруэнц-проблемы для разрешимых подгрупп из $GL(n, \mathbf{Z})$.

Пусть G — полициклическая группа, представленная как подгруппа группы $GL(n, \mathbf{Z})$, и $K_m = \{g \in GL(n, \mathbf{Z}) \mid g \equiv e \mod m\}$, $0 \neq m \in \mathbf{N}$. Тогда: а) $G = \bigcap\limits_m GK_m$; б) в G положительно решается *конгруэнц-проблема*, т. е. каждая подгруппа конечного индекса в G содержит $G \cap K_m$ для некоторого $m \neq 0$.

Определим на полициклической группе $G \leqslant GL(n, \mathbf{Z})$ две топологии: проконечную топологию (см. п. 33) и *конгруэнц-топологию* (базис окрестностей единицы состоит из подгрупп $K_m \cap G$, $m \in \mathbf{N}$). Предыдущий результат допускает следующую топологическую переформулировку: а) каждая полициклическая группа $G \leqslant GL(n, \mathbf{Z})$ замкнута в конгруэнц-топологии группы $GL(n, \mathbf{Z})$; б) если G — полициклическая группа, $G \leqslant GL(n, \mathbf{Z})$, то конгруэнц-топология на G совпадает с проконечной топологией.

Пусть G — полициклическая группа, $\mathcal{F}(G)$ — множество ее конечных гомоморфных образов.

Существуют почти циклические нильпотентные ступени 2 группы G и H такие, что $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$, но сами группы не изоморфны. Соответствующие коды групп: $G = \langle a, b \| a^{25} = 1,\ b^{-1}ab = a^6\rangle$, $H = \langle c, d \| a^{25} = 1,\ d^{-1}cd = c^{11}\rangle$.

Если G — полициклическая группа, то все полициклические группы H такие, что $\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(G)$, составляют конечное множество классов изоморфных групп (*теорема Груневальда — Пиккеля — Сегала*).

Мощность этого множества называют *родом* группы. Полициклические группы рода 1 пока не описаны.

Полициклические группы — наиболее широкий класс групп, в котором все классические алгоритмические проблемы нашли положительное решение.

Любая полициклическая группа является ФА-, ФАВ-, ФАС-группой, а потому в ней разрешимы проблемы равенства, вхождения и сопряженности.

Проблема изоморфизма разрешима для класса полициклических групп (*теорема Груневальда — Сегала*).

Разрешающий алгоритм базируется на следующих трех основных алгоритмах. Пусть G — полициклическая группа, заданная порождающими и определяющими соотношениями.

Алгоритм 1. По группе G алгоритм вычисляет верхнюю границу t для числа t_G, определенного на с. 166.

Алгоритм 2. По группе G и числу $t > t_G$ алгоритм вычисляет число $n_G(t)$ и находит целочисленное представление $\alpha_G(t)$: $G \to GL(n_G(t), \mathbf{Z})$, т. е. выписывает матрицы, соответствующие данным порождающим группы G.

Алгоритм 3. Для данного числа n и полициклических подгрупп A и B из $GL(n, \mathbf{Z})$, заданных порождающими матрицами, алгоритм дает ответ на вопрос о сопряженности A и B в $GL(n, \mathbf{Z})$.

2.2. Разрешимые группы. Для произвольной группы G равносильны следующие условия:

(1) G обладает конечным субнормальным рядом с абелевыми факторами,

(2) G обладает конечным нормальным рядом с абелевыми факторами,

(3) ряд коммутантов $G \geqslant G' \geqslant \ldots \geqslant G^{(n)} \geqslant \ldots$ через конечное число шагов обрывается на единице.

Группа G разрешима (см. с. 85), если выполнено одно из условий (1)—(3). Ряды подгрупп в (1)—(3) называются *разрешимыми рядами.* Наименьшее n со свойством $G^{(n)} = E$ — ступень разрешимости группы G. Разрешимые группы ступени разрешимости $\leqslant n$ составляют многообразие, обозначаемое через $\mathfrak{A}^n$. При $n = 1$ — это многообразие абелевых групп, при $n = 2$ — многообразие метабелевых групп. Нильпотентные и полициклические группы также являются разре-

шимыми. Класс разрешимых групп замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и расширений. Произведение двух нормальных разрешимых подгрупп в произвольной группе является разрешимой подгруппой.

В произвольной линейной группе G (в том числе и в конечной группе) существует единственная максимальная нормальная разрешимая подгруппа. Эта подгруппа называется *разрешимым радикалом* группы G, и в факторгруппе по ней нет неединичных разрешимых нормальных подгрупп.

Пусть F — свободная группа, $N \trianglelefteq F$, N' — коммутант N. Тогда группа $G = F/N'$ является расширением абелевой группы N/N' посредством группы $H = F/N$. Группа F/N' изоморфна подгруппе сплетения $A \operatorname{wr} H$, где A — свободная абелева группа, ранг которой совпадает с рангом F (*вложение Магнуса — Шмелькина*). Если H — разрешимая группа ступени n, то G — разрешимая ступени $n+1$, и если H — свободная разрешимая группа, то G — также свободная разрешимая группа ступени разрешимости на единицу больше. Эта конструкция позволяет индукцией по ступени разрешимости получать результаты о свободных разрешимых группах и группах, близких к ним.

Свободные разрешимые группы являются ФА-, ФАС-группами, а потому в них положительно решаются алгоритмические проблемы равенства и сопряженности. Факторы нижнего центрального ряда свободной разрешимой группы являются свободными абелевыми группами.

Если $G = \langle x_1, \ldots, x_k \| r_1 = 1, \ldots, r_l = 1 \rangle$ — код разрешимой группы G в многообразии $\mathfrak{A}^n$, $n \geqslant 1$, и $l < k$, то среди элементов $x_1, \ldots, x_k$ можно выбрать $k - l$ таких, образы которых порождают в G свободную разрешимую группу ступени n (Романовский Н. С.//Алгебра и логика, 1977. — Т. 16, № 1. — С. 88—97).

Рассмотрим группы конечного ранга. *Рангом* группы G называется наименьшее число r со свойством: все конечно порожденные подгруппы G порождаются не более чем r элементами. Если такого числа не существует, то говорят, что G — группа бесконечного ранга.

Примеры. 1) Пусть p — простое число. Ранг силовской p-подгруппы $GL(n, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ не превосходит числа $(5n-1)n/2$.

2) Все конечно порожденные подгруппы группы $T(n, \mathbf{Q})$ треугольных матриц порядка n над $\mathbf{Q}$ являются группами конечного ранга.

Класс групп конечного ранга замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и расширений. Следующий результат выясняет влияние структуры абелевых подгрупп разрешимой группы на структуру самой группы.

Всякая разрешимая группа, ранги абелевых подгрупп которой конечны, сама имеет конечный ранг (*теорема Каргаполова*).

Среди разрешимых групп конечного ранга наиболее изучены *минимаксные группы*, т. е. такие группы, в которых есть конечный ряд, факторы которого удовлетворяют либо условию максимальности, либо условию минимальности для подгрупп. Класс минимаксных групп замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и расширений; разрешимая минимаксная группа имеет конечный ранг.

Если A — абелева минимаксная группа, то $A = B \oplus C$, где C — конечно порожденная группа, а B — прямая сумма конечного числа квазициклических групп.

Если G — разрешимая минимаксная группа, то в ней существует нормальный ряд $E \trianglelefteq R \trianglelefteq F \trianglelefteq G$ такой, что R — прямое произведение конечного числа квазициклических групп, $F/R = \mathrm{Fitt}\, G/R$, F/R — нильпотентная группа, G/F — конечно порожденная почти абелева группа.

Конечно порожденная разрешимая группа конечного ранга является минимаксной группой (*теорема Зайцева—Робинсона*).

Если R — коммутативное кольцо с единицей, то группа $T(n, R)$ является разрешимой, причем ее коммутант содержится в группе $UT(n, R)$, а потому нильпотентен.

Пусть G — разрешимая группа матриц, $G \leqslant GL(n, K)$, и поле K алгебраически замкнуто. Тогда в группе G существует триангулируемая (т. е. сопряженная подгруппе из $T(n, K)$) нормальная подгруппа T конечного индекса в G, не превосходящего некоторого числа, зависящего только от n (*теорема Колчина—Мальцева*).

Эта теорема определяет структуру линейной раз-

решимой группы: конечное расширение группы с нильпотентным коммутантом. Все разрешимые группы, не удовлетворяющие этой структуре (например, свободные разрешимые группы ступени $l \geqslant 3$), не являются линейными.

Ступень разрешимости любой группы G, лежащей в $GL(n, K)$, где K — поле, не превосходит некоторого числа, зависящего только от n.

Пусть G — конечно порожденная метабелева группа. Если при этом G' — группа без кручения, то G точно представима матрицами над полем характеристики нуль (Ремесленников В. Н.//Алгебра и логика, 1969. — Т. 8, № 3. — С. 72—76), а если G' есть p-группа, то G представима точно матрицами над полем характеристики p (Wehrfritz B. A. F.//Can. J. Math. — 1975. — V. 27, N 6. — P. 1355—1360).

Разрешимая группа G конечного ранга точно представима матрицами над полем характеристики нуль тогда и только тогда, когда в G существует нормальная нильпотентная подгруппа N без кручения, такая, что G/N почти абелева (Мерзляков Ю. И.//Алгебра и логика, 1968. — Т. 7, № 3. — С. 63—104).

Приведем некоторые свойства конечно определенных разрешимых групп. Группа G, заданная кодом $G = \langle a, s, t \| a^t = aa^s, [s, t] = 1 = [a, a^s] \rangle$ является метабелевой, а ее коммутант — свободная абелева группа бесконечного ранга. Более того, каждая конечно порожденная метабелева группа может быть вложена в конечно определенную метабелеву группу (см. [116]).

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Для каждой конечно порожденной подгруппы G группы $T(n, R)$ существует коммутативное кольцо S, содержащее R, и конечно определенная подгруппа $\tilde{G}$ группы $T(n, S)$, которая содержит образ G в $T(n, S)$ (см. [116]).

Пример. Пусть $R = \mathbf{Z}[1/p]$ — кольцо рациональных чисел, знаменатель которых есть степень простого числа p, G — группа матриц формы

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

над кольцом R с диагональными элементами вида p^k, $k \in \mathbf{Z}$. Группа G конечно определена, а ее центр состоит из матриц с единственной звездочкой в правом верхнем углу, а потому изоморфен R^+; в частности, G — группа, центр которой не конечно порожден (см. [116]).

Конечно определенные метабелевы группы можно характеризовать при помощи геометрических инвариантов, теория которых была развита Бири и Штребелем (см. [116]). Пусть A — свободная абелева группа ранга n, тогда $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ — действительное линейное пространство размерности n с евклидовой метрикой. Назовем два гомоморфизма эквивалентными, если они отличаются друг от друга на положительное действительное число. Классы эквивалентных гомоморфизмов $[\alpha]$ без нуля образуют компактное топологическое пространство $S(A)$, изоморфное сфере S^{n-1} в $\mathbf{R}^n$. Для каждого $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ определим множество

$$A_\alpha = \{a \in A \mid \alpha(a) \geqslant 0\}.$$

Тогда A_α — полугруппа, и пусть $\mathbf{Z}A_\alpha$ — подкольцо в целочисленном групповом кольце $\mathbf{Z}A$ группы A (построение $\mathbf{Z}A_\alpha$ зависит только от $[\alpha]$). Наконец, для каждого конечно порожденного $\mathbf{Z}A$-модуля M определим *геометрический инвариант* $\Sigma_M = \{[\alpha] \in S(A) \mid M$ конечно порожден над $\mathbf{Z}A_\alpha\}$; $-\Sigma_M$ — противоположное (на сфере) множество для Σ_M.

Будем говорить, что конечно порожденный $\mathbf{Z}A$-модуль *ручной*, если $\Sigma_M \cup (-\Sigma_M) = S(A)$. Оказывается, что каждое расширение аддитивной группы ручного модуля M с помощью конечно порожденной абелевой группы A является конечно определенной группой.

Предположим, что G — конечно порожденная метабелева группа и $G^{\mathrm{ab}} = G/G'$. Пусть M — конечно порожденный $\mathbf{Z}G^{\mathrm{ab}}$-модуль, полученный из G' действием G^{ab} при помощи сопряжений. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) G — конечно определенная группа,

(2) $M \rightarrowtail G^{\mathrm{ab}}$ — конечно определенная группа,

(3) M — ручной $\mathbf{Z}G^{\mathrm{ab}}$-модуль.

Пусть G — конечно порожденная $\mathfrak{AP}$-*группа*, т. е. расширение абелевой группы A посредством полициклической G/A. Превратим A в $\mathbf{Z}(G/A)$-модуль, пола-

гая, что G/A действует на A сопряжениями. В силу конечной определенности полициклической группы G/A модуль A получается конечно порожденным, а групповое кольцо $\mathbf{Z}(G/A)$ удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов. Многие вопросы об $\mathfrak{AP}$-группах удается переформулировать и решить в терминах модулей над групповыми кольцами полициклических групп. Основополагающей в этом направлении является *теорема Роузблейда — Холла*: если K — алгебраическое расширение конечного поля и G — почти полициклическая группа, то всякий простой KG-модуль конечномерен. Из этой теоремы следует конечность монолитических конечно порожденных $\mathfrak{AP}$-групп (группа называется *монолитической*, если пересечение всех ее неединичных нормальных подгрупп также неединично). Так как любая группа аппроксимируется своими монолитическими факторгруппами, то всякая конечно порожденная $\mathfrak{AP}$-группа является финитно аппроксимируемой группой. Для широкого класса конечно порожденных $\mathfrak{AP}$-групп получен более тонкий вариант финитной аппроксимируемости. Именно, пусть G — конечно порожденная группа с абелевой нормальной подгруппой A, такой, что G/A полициклична. Если A является p-группой, то G почти вся аппроксимируется конечными p-группами. Если A — группа без кручения, то для почти всех простых чисел p группа G почти вся аппроксимируется конечными p-группами (Segal D.//J. London Math. Soc. — 1975. — V. 11, N 4. — P. 445—452).

Рассмотрим обобщения нильпотентности. Основными из них являются три: локальная нильпотентность, энгелевость и нильпотентная аппроксимируемость.

Говорят, что группа *локально нильпотентна*, если все ее конечно порожденные подгруппы нильпотентны. Локально нильпотентными группами являются:

1) группы $UT(\infty, K)$, K — поле, являющиеся индуктивными пределами семейств групп $\{UT(n, K), n \in \mathbf{N}\}$;

2) *гиперцентральные группы* — группы, обладающие возрастающим центральным рядом;

3) *группы с нормализаторным условием* — группы, в которых нормализатор любой собственной подгруппы строго больше этой подгруппы.

Подгруппы и факторгруппы локально нильпотентных групп сами локально нильпотентны. Результаты п. 2.1 о пополнениях и локализациях переносятся на локально нильпотентные группы, ибо возникающие при их доказательствах функторы перестановочны с индуктивными пределами.

Элементы конечного порядка локально нильпотентной группы образуют подгруппу $T(G)$, разлагающуюся в прямое произведение своих силовских подгрупп, а всякая максимальная подгруппа группы G является нормальной. Во всякой группе произведение двух нормальных локально нильпотентных подгрупп есть локально нильпотентная подгруппа (*теорема Плоткина — Хирша*). Подгруппу, порожденную в произвольной группе нормальными локально нильпотентными подгруппами, называют *радикалом Плоткина—Хирша*.

Класс $\mathfrak{E}$ энгелевых групп строго содержит класс локально нильпотентных групп. Многообразие ограниченных энгелевых групп $\mathfrak{E}_n$ строго содержит многообразие всех нильпотентных групп ступени $l \leqslant n$.

Энгелева группа с конечными абелевыми подгруппами является конечной нильпотентной группой, в частности, конечная энгелева группа нильпотентна. Всякая n-энгелева разрешимая группа без кручения, а также n-энгелева линейная группа нильпотентна.

Группа G *нильпотентно аппроксимируема*, если $\bigcap\limits_n \gamma_n G = E$. Более общо, пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Группа G называется *$\mathfrak{X}$-аппроксимируемой* ($G \in {}_R\mathfrak{X}$), если для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существует гомоморфизм φ: $G \to K$, где $K \in \mathfrak{X}$, такой, что $\varphi(g) \neq 1$. Введем обозначения для классов: $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{N}_0$ — класс нильпотентных групп без кручения, $\mathfrak{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, $\overline{\mathfrak{N}}_p$ — класс нильпотентных групп конечного p-примарного периода. О следующих ниже результатах см. в [88].

а) Классы групп ${}_R\mathfrak{N}_0$, ${}_R\mathfrak{N}$, ${}_R\mathfrak{F}_p$ замкнуты относительно подгрупп и декартовых произведений.

б) Свободные, свободные нильпотентные, свободные разрешимые группы принадлежат классам ${}_R\mathfrak{N}$, ${}_R\mathfrak{N}_0$ и ${}_R\mathfrak{F}_p$.

в) Пусть G — произвольная группа, $\mathfrak{g}$ — фундаментальный идеал ее целочисленного группового

кольца. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}^n = 0$ тогда и только тогда, когда либо $G \in {}_R\mathfrak{N}_0$, либо G дискриминирует $\bigcup\limits_p \overline{\mathfrak{N}}_p$ (группа *дискриминирует* класс групп $\mathfrak{X}$, если для любого набора $x_1, \ldots, x_m \in G \setminus \{1\}$ существует такой гомоморфизм φ: $G \to K$, $K \in \mathfrak{X}$, что $\varphi(x_1) \neq 1, \ldots, \varphi(x_m) \neq 1$).

г) Для свободной группы F ранга $\geqslant 2$ и $N \trianglelefteq F$ эквивалентны следующие условия:

(1) $F/N' \in {}_R\mathfrak{N}$;

(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}^n = 0$, где $G = F/N$.

д) Свободное произведение нильпотентно аппроксимируемых групп не обязано быть нильпотентно аппроксимируемой группой; примером служит группа $C(2) * C(3)$.

е) Классы групп ${}_R\mathfrak{N}_0$ и ${}_R\mathfrak{F}_p$ замкнуты относительно свободных произведений.

Группа $G \in {}_R\mathfrak{N}$ называется *нильсвободной* или *парасвободной* ранга r, если она содержит свободную группу F ранга r, такую, что естественный гомоморфизм $F/\gamma_n F \to G/\gamma_n G$ является изоморфизмом для всех $n \geqslant 1$. Группа $\langle a, b, c \| a^2b^2 = c^3 \rangle$ является нильсвободной ранга 2, но не свободной группой.

Говорят, что группа *локально разрешима*, если все ее конечно порожденные подгруппы разрешимы (ср. с. 93). Подгруппы и факторгруппы локально разрешимых групп сами локально разрешимы. Отметим ряд свойств локально разрешимых групп.

а) Локально разрешимая группа без кручения конечного ранга является разрешимой.

б) Локально разрешимые линейные группы над полем являются разрешимыми.

в) Всякая периодическая локально разрешимая группа, у которой ранги абелевых подгрупп конечны, сама имеет конечный ранг (Горчаков Ю. М.//ДАН СССР. — 1964. — Т. 156, № 1. — С. 17—20).

г) Существует локально разрешимая группа без кручения бесконечного ранга, все абелевы подгруппы которой имеют конечный ранг.

д) Произведение двух нормальных локально разрешимых подгрупп группы не всегда является локально разрешимой подгруппой.

Отказываясь от условия конечности ряда в определении разрешимой группы, получаем классы обобщенных разрешимых групп, называемые *классами Куроша—Черникова*. Первые из этих классов определяются следующим образом:

SN — группа обладает разрешимой субнормальной системой;

SN' $[SN^{\setminus}]$ — группа обладает разрешимой системой, вполне упорядоченной по возрастанию [по убыванию];

$\overline{SN}$ — всякую субнормальную системы группы можно уплотнить до разрешимой субнормальной системы. Если в этих определениях заменить слово «субнормальная» на слово «нормальная», то получаем соответственно классы: SI, SI' $[SI^{\setminus}]$, $\overline{SI}$, если же заменить слово «субнормальная» на слово «центральная», то получаем соответственно классы: Z, Z' $[Z']$, $\overline{Z}$.

Говорят, что для абстрактного теоретико-группового свойства справедлива *локальная теорема*, если всякая группа, локально обладающая этим свойством, сама обладает этим свойством. Для свойств SN, SI, Z, $\overline{SN}$, $\overline{SI}$, $\overline{Z}$ справедлива локальная теорема (*теорема Мальцева*).

§ 3. Группы с дополнительной структурой

Систематическое изложение общей теории топологических групп можно найти в монографиях [7], [8], [52], [58]. Теории упорядоченных групп посвящены монографии [20], [22], [39], [72], а теории проконечных групп — [25], [57], [104].

Все необходимые для понимания факты из общей топологии имеются в книге Келли [19].

3.1. Топологические группы. Множество G, являющееся одновременно группой и хаусдорфовым топологическим пространством, называется *топологической группой*, если групповые операции непрерывны. Формально это выражается в требовании непрерывности отображения $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ из прямого произведения пространств $G \times G$ в пространство G. В этом случае топология на множестве элементов группы G называется *групповой*.

Говорят, что топологическая группа G обладает каким-либо топологическим свойством (компактна, ди-

скретна, связна и т. п.), если этим свойством обладает топологическое пространство G. Алгебраические свойства G (абелевость, нильпотентность и т. д.) относятся к ее групповой структуре.

Гомоморфизмом топологической группы G в топологическую группу H называется непрерывное отображение $\varphi\colon G\to H$, являющееся гомоморфизмом групп (т. е. $\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$ для всех $g_1, g_2\in G$). Часто гомоморфизм топологических групп называют непрерывным гомоморфизмом. Гомоморфизм $\varphi\colon G\to H$ называется (топологическим) *изоморфизмом*, если существует гомоморфизм $\psi\colon H\to G$ топологических групп, являющийся обратным к φ отображением. В этом случае топологические группы G и H называются *изоморфными* (с обычным обозначением $G\simeq H$)*).

Для любого $g\in G$ отображения $l_g\colon x\mapsto gx$ (левый сдвиг) и $r_g\colon x\mapsto xg$ (правый сдвиг) являются гомеоморфизмами пространства G. Поэтому пространство G однородно; для любых $a, b\in G$ гомеоморфизм $l_{ba^{-1}}$ переводит точку a в точку b. В частности, абстрактный гомоморфизм $\varphi\colon G\to H$ непрерывен, если он непрерывен в единице $e\in G$.

Из однородности G вытекает, что топология G определяется ее топологией в точке. А именно, если $\{U_i \mid i\in I\}$ — базис окрестностей единицы группы G, то семейство $\{gU_i \mid g\in G,\ i\in I\}$ является базисом топологии пространства G.

Критерий базиса в единице: семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств абстрактной группы G, каждое из которых содержит единицу $e\in G$, является базисом окрестностей единицы некоторой групповой топологии на G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) для любых $U, V\in\mathfrak{U}$ и для любой точки $x\in U\cap V$ существует такое $W\in\mathfrak{U}$, что $xW\subseteq U\cap V$;

б) для любого $U\in\mathfrak{U}$ найдется такое $W\in\mathfrak{U}$, что $WW^{-1}\subseteq U$;

---

*) В некоторых старых работах гомоморфизмами топологических групп назывались только открытые непрерывные гомоморфизмы, а гомоморфизмы в нашем определении — представлениями. Основанием для такой терминологии служило то, что теорема об изоморфизме для топологических групп (см. далее) справедлива для открытых непрерывных гомоморфизмов.

в) для любого $U \in \mathfrak{U}$ и произвольного элемента $g \in G$ существует такое $W \in \mathfrak{U}$, что $gWg^{-1} \subseteq U$;

г) пересечение всех множеств из $\mathfrak{U}$ содержит только единицу e (условие хаусдорфовости).

Наименьшая мощность базы окрестностей единицы топологической группы G называется ее *локальным весом* и обозначается $w_0(G)$; весом G называется наименьшая мощность $w(G)$ базы топологии группы G. Топологическая группа G удовлетворяет *первой аксиоме счетности* [*второй аксиоме счетности*], если ее локальный вес [ее вес] счетен.

Пространство топологической группы вполне регулярно *).

Существуют топологические группы, пространства которых не являются нормальными. Пример такой группы будет приведен ниже.

Пространство локально компактной топологической группы нормально.

Примеры топологических групп. Одной из целей этого перечня является введение стандартных обозначений для ряда часто встречающихся топологических групп.

1) Аддитивная группа $\mathbf{R}^n$ n-мерного векторного пространства над полем вещественных чисел с обычной топологией. Группа $\mathbf{R}^n$ часто называется *n-мерной векторной группой.*

2) Группа $\mathbf{Z}$ целых чисел с дискретной топологией. Мультипликативная группа $\mathbf{T}$ комплексных чисел модуля 1 с топологией индуцированной топологией комплексной плоскости. Группа $\mathbf{T}$ называется *группой окружности* или *одномерным тором.*

3) Аддитивная группа $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел; базис окрестностей нуля образуют подгруппы $p^m\mathbf{Z}_p$, $m \geqslant 0$. Аддитивная группа $\mathbf{Q}_p$ всех p-адических чисел; группа $\mathbf{Z}_p$ является в $\mathbf{Q}_p$ открытым множеством.

4) Полные линейные группы $GL(n, \mathbf{R})$ над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ и $GL(n, \mathbf{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Топология на $GL(n, \mathbf{R})$ индуцируется топологией n^2-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^{n^2}$, в которое она естественным образом вкладывается; аналогично для $GL(n, \mathbf{C})$. Эквивалентная топология задается базисом системы окрестностей единицы $\{W_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$, где W_m состоит из таких матриц (a_{ij}), что $|a_{ii} - 1|$, $|a_{ij}| < 1/m$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

5) Группа унитарных матриц $U(n, \mathbf{C})$ — подгруппа $GL(n, \mathbf{C})$ с индуцированной топологией.

Все перечисленные выше группы локально компактны, группа $\mathbf{Z}$ дискретна, группы $\mathbf{T}$ и $U(n, \mathbf{C})$ компактны. Группы $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}$, $GL(n, \mathbf{C})$, $U(n, \mathbf{C})$ связны, группы $\mathbf{Z}_p$ и $\mathbf{Q}_p$ вполне несвязны.

---

*) Полная регулярность пространства топологической группы является, на самом деле, следствием более слабого, чем хаусдорфовость, условия: достаточно потребовать замкнутости одноточечных подмножеств (аксиома отделимости T_0).

Произвольная абстрактная группа, снабженная дискретной топологией, является топологической группой.

Любая хаусдорфова топология на конечной группе дискретна. Существуют также бесконечные группы, даже счетные, на которых нельзя определить недискретную (хаусдорфову) групповую топологию.

Пример. Счетной нетопологизируемой группой может служить группа $G = A(m, n)/C^m$, где $A(m, n)$ — построенная в [1] группа без кручения, центр C которой изоморфен $\mathbf{Z}$, а фактор-группа $A(m, n)/C$ — бесконечная группа нечетного периода $m \geqslant 665$. В группе G каждый неединичный элемент принадлежит одному из следующих m замкнутых в любой групповой топологии подмножеств: $K_0 = \{d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}\}$ — все неединичные элементы из C/C^m, $K_i = \{g \in G \mid g^m = d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Поэтому $\{e\}$ — всегда открытое в G подмножество (Ольшанский А. Ю.//Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1980. — № 3. — С. 103).

Всякая бесконечная абелева группа допускает недискретную групповую топологию; подробнее см. п. 3.2.

Приведем один из наиболее распространенных приемов топологизации групп. Пусть в группе G задано некоторое семейство подгрупп $\mathfrak{U}$, обладающее следующими свойствами:

а) для любых H_1, H_2 из $\mathfrak{U}$ найдется такая подгруппа $H_3 \in \mathfrak{U}$, что $H_3 \leqslant H_1 \cap H_2$;

б) если $H \in \mathfrak{U}$, $g \in G$, то $gHg^{-1} \in \mathfrak{U}$;

в) пересечение всех подгрупп из $\mathfrak{U}$ состоит только из единицы $e \in G$.

Множество $\mathfrak{U}$ удовлетворяет условиям критерия базиса в единице и может быть взято в качестве базиса окрестностей единицы некоторой групповой топологии на G. Получившаяся топологическая группа G является вполне несвязной.

Типичным примером топологии такого вида является топология подгрупп конечного индекса на финитно аппроксимируемой группе. Можно брать не все подгруппы конечного индекса; например, p-адическая топология на группе $\mathbf{Z}$ задается базисом окрестностей нуля из подгрупп $p^m\mathbf{Z}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Еще один пример — финитарная топология на группе $\mathrm{Symm}(X)$ подстановок некоторого множества X. Базисом окрестностей единицы объявляется система подгрупп $H_F = \{\sigma \in \mathrm{Symm}(X) \mid \sigma(x) = x$ для

любого $x \in F\}$, где F пробегает все конечные подмножества множества X.

В качестве частного случая получаем *топологию Крулля* на группе Галуа $G(L/K)$ бесконечного расширения Галуа L/K полей. Группа $G(L/K)$ считается вложенной в $\mathrm{Symm}(L)$ и снабжается индуцированной топологией. Группа Галуа $G(L/K)$ является компактной и вполне несвязной группой.

Подгруппой H топологической группы G называется ее подгруппа (в алгебраическом смысле), снабженная топологией, индуцированной топологией пространства G. Подгруппа топологической группы является топологической группой. Замыкание $\bar{H}$ подгруппы H в G также является подгруппой. Если H — нормальная подгруппа топологической группы G, то замыкание $\bar{H}$ — также нормальная подгруппа. Ядро $\mathrm{Ker}\,\varphi$ непрерывного гомоморфизма φ группы G в группу H является замкнутой нормальной подгруппой.

Подгруппа H называется *локально замкнутой*, если для любой точки $h \in H$ найдется такая ее окрестность U в G, что $U \cap H$ замкнуто в U. Локально замкнутая подгруппа является замкнутой. В частности, замкнуты открытые и локально компактные подгруппы.

Для любого подмножества X топологической группы G существует наименьшая замкнутая подгруппа $\langle\bar{X}\rangle$, *порожденная* (иногда говорят *топологически порожденная*) *подмножеством* X. Подгруппа $\langle\bar{X}\rangle$ совпадает с замыканием подгруппы $\langle X\rangle$.

Элемент g топологической группы называется *компактным*, если порожденная им подгруппа $\langle\bar{g}\rangle$ компактна, и *чистым*, если $\langle\bar{g}\rangle = \langle g\rangle \simeq \mathbf{Z}$. В локально компактной группе всякий элемент либо компактен, либо чист. Это вытекает из следующего более общего утверждения: если $H \simeq \mathbf{Z}$ или $H \simeq \mathbf{R}$ и φ — непрерывный гомоморфизм H в локально компактную группу G, то либо φ — изоморфизм H на подгруппу $\varphi(H)$ группы G, либо $\overline{\varphi(H)}$ — компактная подгруппа G.

Для замкнутой подгруппы H топологической группы G пространство смежных классов G/H (для определенности, левых) снабжается топологией, в которой открытыми подмножествами считаются образы

открытых подмножеств G при каноническом отображении φ: $G \to G/H$, $g \longmapsto gH$. Отображение φ автоматически оказывается открытым. Определенная выше топология на G/H совпадает с фактортопологией; если для некоторого топологического пространства X и отображения χ: $G/H \to X$ композиция $\chi\varphi$: $G \to X$ непрерывна, то χ — непрерывное отображение.

Топологическое пространство G/H однородно. Из замкнутости H в G вытекает полная регулярность G/H.

Если N — замкнутая нормальная подгруппа, то пространство G/N с обычным умножением $(xN)(yN) \underset{\text{def}}{=\!=} \underset{\text{def}}{=\!=} xyN$ является топологической группой, *факторгруппой G по N*. Каноническое отображение φ: $G \to G/N$ — непрерывный и открытый сюръективный гомоморфизм (*естественный гомоморфизм*).

Теорема об изоморфизме: если φ: $G \to H$ — непрерывный и открытый сюръективный гомоморфизм, то $H \simeq G/\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Пример. Гомоморфизм $x \longmapsto e^{2\pi i x}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{T}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{T}$.

Если φ только непрерывен, то он индуцирует лишь непрерывный абстрактный изоморфизм группы $G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ на H. Не всякий непрерывный гомоморфизм открыт: тривиальный пример — тождественное отображение id: $G_d \to G$, где G — недискретная топологическая группа, G_d — та же группа с дискретной топологией.

Если G, H — локально компактные группы, а группа G σ-компактна, то непрерывный гомоморфизм G на H всегда открыт.

Напомним, что *σ-компактным* называется топологическое пространство, представимое в виде объединения счетного семейства компактных подмножеств. Локально компактные группы со второй аксиомой счетности, а также связные локально компактные группы, σ-компактны.

Пусть H — замкнутая подгруппа, N — замкнутая нормальная подгруппа топологической группы G. Естественный гомоморфизм G на G/N индуцирует изоморфизм $H/H \cap N \simeq HN/N$, если либо N компактна, либо подгруппы H и HN локально компактны, а H

σ-компактна. В общем случае это утверждение места не имеет.

Пусть $N \leqslant M$ — две замкнутые нормальные подгруппы топологической группы G. Тогда $G/M \simeq \simeq (G/N)/(M/N)$.

Если в определении топологической группы отказаться от требования хаусдорфовости, то замыкание $\{\bar{e}\}$ в G единицы является нормальной подгруппой и $G/\{\bar{e}\}$ — хаусдорфова группа. При этом произвольный непрерывный гомоморфизм ψ группы G в хаусдорфову группу H пропускается через факторгруппу $G/\{\bar{e}\}$, т. е. $\psi = \psi'\varphi$ для некоторого непрерывного гомоморфизма $\psi'\colon G/\{\bar{e}\} \to H$ и естественного $\varphi\colon G \to G/\{\bar{e}\}$. Факторгруппа G/N может быть определена и для незамкнутой нормальной подгруппы N; при этом $\{\bar{e}_0\} = \bar{N}/N$, где e_0 — единица G/N.

Если N — замкнутая нормальная подгруппа G, то будем говорить, что топологическая группа G является *расширением* группы N посредством G/N.

Теорема о расширении: если N — нормальная подгруппа топологической группы G и обе группы N и G/N компактны [локально компактны], то группа G также компактна [локально компактна].

В топологической группе G связная компонента единицы G_0 является замкнутой нормальной подгруппой. Связной компонентой элемента $g \in G$ будет, в силу однородности G, смежный класс gG_0. Таким образом, факторгруппа G/G_0 состоит из компонент связности пространства G.

Группа G/G_0 вполне несвязна (т. е. ее связная компонента состоит только из единицы). Для локально компактных группы из полной несвязности вытекает нульмерность пространства.

Если G — локально компактная вполне несвязная группа, то каждая окрестность единицы G содержит открытую и, следовательно, замкнутую подгруппу.

В любой окрестности единицы компактной вполне несвязной группы содержится открытая нормальная подгруппа.

Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа локально компактной группы G. Тогда связная компонента единицы группы G/N равна замыканию образа G_0 при естественном гомоморфизме.

Если G — связная топологическая группа, то связен ее образ при произвольном непрерывном гомоморфизме. Подгруппы и факторгруппы вполне несвязной группы также вполне несвязны. Если N — нормальная подгруппа топологической группы G и обе группы N и G/N связны [вполне несвязны], то и группа G связна [вполне несвязна].

Введем прямые произведения. Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство топологических групп. Его *прямое произведение* $\prod_{i \in I} G_i$ определяется как декартово (или полное прямое) произведение групп G_i, $i \in I$, снабженное *тихоновской топологией*: базисом топологии объявляется система подмножеств вида $\prod_{i \in I} U_i$, где U_i — открытые подмножества в G_i, причем $U_i = G_i$ для почти всех (всех за исключением конечного числа) индексов $i \in I$.

Прямое произведение конечного числа групп G_1, $G_2, \ldots, G_n$ обычно обозначается $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$.

Для каждого подмножества $J \subseteq I$ определена проекция $\mathrm{pr}_J\colon \prod_{i \in I} G_i \to \prod_{j \in J} G_j$, переводящая набор $(x_i)_{i \in I}$ в «усеченный» набор $(x_j)_{j \in J}$; pr_J — непрерывный и открытый гомоморфизм.

Прямое произведение $\prod_{i \in I} G_i$ семейства топологических групп вместе с набором проекций pr_i, $i \in I$, однозначно определяется следующим универсальным свойством: для произвольного множества непрерывных гомоморфизмов ρ_i некоторой топологической группы H в группы G_i, $i \in I$, существует единственный непрерывный гомоморфизм $\varphi\colon H \to \prod_{i \in I} G_i$ удовлетворяющий для каждого $i \in I$ соотношению $\rho_i = (\mathrm{pr}_i) \circ \varphi$.

Связная компонента единицы прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$ равна $\prod_{i \in I} G_{i0}$, где G_{i0} — связная компонента единицы группы G_i, $i \in I$.

Если все группы G_i, $i \in I$, компактны, то $\prod_{i \in I} G_i$ также компактно.

Прямое произведение семейства локально компактных групп $G_i, i \in I$, локально компактно тогда

и только тогда, когда группы G_i компактны для почти всех $i \in I$.

Если прямое произведение $\prod_{i \in I} G_i$ нормально, то для всех $i \in I$, кроме, возможно, счетного числа, группы G_i счетно компактны (т. е. из всякого покрытия группы G_i счетным семейством открытых множеств можно выбрать конечное подпокрытие). Последнее утверждение позволяет дать следующий явный пример топологической группы, пространство которой не нормально: прямое произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{Z}$ счетного числа дискретных групп $\mathbf{Z}$.

Для любого подмножества $J \subseteq I$ совокупность таких элементов $(x_i) \in \prod_{i \in I} G_i$, что $x_i = e$ для всех $i \notin J$, является замкнутой подгруппой группы $\prod_{i \in I} G_i$, изоморфной $\prod_{j \in J} G_j$. В случае $J = \{i\}$ эту подгруппу обозначим через G'_i; для каждого $i \in I$ G'_i — нормальная подгруппа $\prod_{i \in I} G_i$, называемая иногда прямым сомножителем. Говорят, что группа G есть *прямое произведение* некоторой *системы* своих *замкнутых нормальных подгрупп* N_i, $i \in I$, если существует изоморфизм $G \simeq \prod_{i \in I} G_i$, переводящий N_i в прямые сомножители G'_i, $i \in I$.

Сформулируем критерии разложимости в прямое произведение. а) Если группа G локально компактна, $N_1, N_2, \ldots, N_m$ — замкнутые σ-компактные нормальные подгруппы G, то G является их прямым произведением тогда и только тогда, когда $G = N_1 N_2 \ldots N_m$ и $N_1 N_2 \ldots N_k \cap N_{k+1} = E$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m-1$. б) Компактная группа G является прямым произведением семейства $\{N_i \mid i \in I\}$ своих замкнутых нормальных подгрупп тогда и только тогда, когда G топологически порождается множеством $\bigcup_{i \in I} N_i$ и $\bigcap_{j \in J} M_j = E$, где M_j — подгруппа группы G, топологически порожденная всеми N_i для $i \in I \setminus \{j\}$.

Определим полупрямые произведения и группы автоморфизмов. Обозначим через $\operatorname{Aut} N$ группу (то-

пологических) автоморфизмов топологической группы N. Будем говорить, что задано *действие* группы H на N, если зафиксирован гомоморфизм $\lambda: H \to \operatorname{Aut} N$; условимся обозначать $h \cdot n = \lambda(h)(n)$ для $h \in H$, $n \in N$. Если H — также топологическая группа, то действие H на N называется *непрерывным*, если непрерывно отображение $H \times N \to N$, $(h, n) \mapsto h \cdot n$.

Пусть H, N — топологические группы и H непрерывно действует на N. *Полупрямым произведением* $G = N \rightthreetimes H$ называется топологическая группа, пространством которой является произведение пространств $N \times H$, а групповые операции определены по формулам $(n_1, h_1)(n_2, h_2) \underset{\text{def}}{=} (n_1(h_1 \cdot n_2), h_1 h_2)$, $(n, h)^{-1} \underset{\text{def}}{=} (h^{-1} \cdot n^{-1}, h^{-1})$. Отметим, что непрерывность так определенных групповых операций эквивалентна непрерывности действия H на N.

В группе $G = N \rightthreetimes H$ содержится изоморфная N замкнутая нормальная подгруппа $N' = \{(n, e) \mid n \in N\}$ и изоморфная H подгруппа $H' = \{(e, h) \mid h \in H\}$; при этом ограничение на H' естественного гомоморфизма $G \to G/N'$ является топологическим изоморфизмом H' на G/N'.

Предположим, что в топологической группе G имеется замкнутая нормальная подгруппа N и замкнутая подгруппа H такие, что ограничение естественного гомоморфизма $G \to G/N$ является изоморфизмом H на G/N. Тогда говорят, что G является полупрямым произведением N и H, или что группа G *расщепляется* над N. При этом отображение $N \rightthreetimes H \to G$, $(n, h) \mapsto nh$, является топологическим изоморфизмом, где полупрямое произведение $N \rightthreetimes H$ соответствует действию $h \cdot n \underset{\text{def}}{=} hnh^{-1}$ группы H на N.

Пусть теперь N — замкнутая нормальная подгруппа топологической группы G. Тогда эквивалентны следующие свойства: (1) G расщепляется над N; (2) группа G локально компактна, и существует такая замкнутая σ-компактная подгруппа H, что $G = NH$, $N \cap H = E$; (3) существует такая замкнутая подгруппа H группы G и такой непрерывный эндоморфизм $\psi: G \to G$, что $\operatorname{Ker} \psi = N$, $\psi(G) = H$ и $\psi(h) = h$ для любого $h \in H$.

Если группа N локально компактна, то ее группа автоморфизмов может быть превращена в топологическую группу. Групповая топология на $\mathrm{Aut}\,N$ задается базисом системы окрестностей единицы (тождественного автоморфизма), состоящей из подмножеств вида

$$W(K, U) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}\,N \mid \alpha^{\pm 1}(k)\,k^{-1} \in U \text{ для любого } k \in K\},$$

где K пробегает множество компактных подмножеств N, U — некоторый базис системы окрестностей единицы N.

Действие группы H на локально компактной группе N непрерывно тогда и только тогда, когда соответствующий гомоморфизм $\lambda\colon H \to \mathrm{Aut}\,N$ непрерывен.

Группа $\mathrm{Aut}\,\mathbf{R}^n$ топологически изоморфна $GL(n, \mathbf{R})$. Группы $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}^n$ и $\mathrm{Aut}\,\mathbf{T}^n$ дискретны и изоморфны $GL(n, \mathbf{Z})$. Группы $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}_p$ и $\mathrm{Aut}\,C(p^\infty)$ топологически изоморфны мультипликативной группе $\mathbf{Z}_p^*$ кольца $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел (с естественной топологией), группа $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Q}_p$ – мультипликативной группе $\mathbf{Q}_p^*$ поля p-адических чисел.

Если G — локально компактная вполне несвязная группа или компактная абелева группа, то группа $\mathrm{Aut}\,G$ нульмерна.

Если G — топологическая группа, то для каждого $g \in G$ внутренний автоморфизм $\sigma_g\colon x \longmapsto gxg^{-1}$ является топологическим, а гомоморфизм $G \to \mathrm{Aut}\,G$, переводящий $g \in G$ в σ_g, непрерывен. Для локально компактной нормальной подгруппы N группы G ограничение на N внутренних автоморфизмов определяет непрерывный гомоморфизм $G \to \mathrm{Aut}\,N$.

Если G — связная группа, N — локально компактная нормальная подгруппа G, являющаяся либо вполне несвязной, либо компактной абелевой группой, то N содержится в центре G.

Рассмотрим проективные и индуктивные пределы. Частично упорядоченное множество Λ называется *направленным*, если для любых λ, $\mu \in \Lambda$ найдется такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \leqslant \nu$, $\mu \leqslant \nu$.

Пример направленного множества дает множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел с естественным порядком.

Проективная (или, иначе, *обратная*) *система* топологических групп над Λ состоит из набора топологических групп $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$, и множества непрерывных гомоморфизмов (связывающих гомоморфизмов проективной системы) $\varphi^\lambda_\mu\colon G_\lambda \to G_\mu$ для каждой пары $\lambda \geqslant \mu$ элементов из Λ, удовлетворяющих следующим условиям: а) $\varphi^\lambda_\lambda = \mathrm{id}_{G_\lambda}$ для всех $\lambda \in \Lambda$; б) $\varphi^\mu_\lambda \varphi^\nu_\mu = \varphi^\nu_\lambda$ для всех троек $\nu \geqslant \mu \geqslant \lambda$ из Λ.

Пределом проективной системы $\{G_\lambda, \varphi^\lambda_\mu \mid \lambda, \mu \in \Lambda\}$, или *проективным пределом*, называется топологическая группа $G = \varprojlim G_\lambda$ вместе с множеством непрерывных гомоморфизмов (*проекций*) $\varphi_\lambda\colon G \to G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющих условиям: 1) $\varphi_\lambda \varphi^\lambda_\mu = \varphi_\mu$ для всех $\lambda \geqslant \mu$; 2) если H — некоторая топологическая группа, $\psi_\lambda\colon H \to G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, — такое множество непрерывных гомоморфизмов, что $\psi_\lambda \varphi^\lambda_\mu = \psi_\mu$ для всех $\lambda \geqslant \mu$ из Λ, то существует единственный непрерывный гомоморфизм $\psi\colon H \to G$ такой, что $\psi\varphi_\lambda = \psi_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Из универсального свойства прямого произведения вытекает, что в качестве $\varprojlim G_\lambda$ можно взять (замкнутую) подгруппу в $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, состоящую из таких элементов (g_λ), что $g_\mu = \varphi^\lambda_\mu(g_\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant \mu$ из Λ; проекцией φ_λ будет тогда ограничение проекции pr_λ $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \to G_\lambda$. Отсюда вытекает, что совокупность подмножеств $\varphi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, где $\lambda \in \Lambda$, U_λ — окрестности единицы в группе G_λ, образует базис окрестностей единицы в группе $G = \varprojlim G_\lambda$.

В частности, каждая окрестность единицы в G содержит для некоторого λ ядро $\operatorname{Ker} \varphi_\lambda$.

Если в проективной системе все группы G_λ компактны [вполне несвязны], то ее предел $\varprojlim G_\lambda$ — также компактная [вполне несвязная] группа.

Подмножество Σ направленного множества Λ называется *кофинальным*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ в подмножестве Σ найдется элемент $\mu \geqslant \lambda$. Типичный пример кофинального подмножества в Λ — подмножество $\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geqslant \mu\}$ для произвольного $\mu \in \Lambda$. Для

кофинального $\Sigma \subseteq \Lambda$ система $\{G_\lambda, \varphi^\lambda_\mu \mid \lambda, \mu \in \Sigma\}$ является проективной системой над Σ, подсистемой исходной проективной системы над Λ. Ее предел $\varprojlim_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda$ изоморфен пределу $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$; изоморфизм дает ограничение проекции pr_Σ: $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \to \prod\limits_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda$. Поэтому, если группы G_λ проективной системы обладают тем или иным свойством при всех $\lambda \geqslant \mu$ для некоторого $\mu \in \Lambda$, то можно, уменьшив проективную систему, считать, что G_λ обладают этим свойством для всех λ.

Далее, если положить $G'_\lambda = \varphi_\lambda(G)$, где $G = \varprojlim G_\lambda$, то $\{G'_\lambda, \varphi'^\lambda_\mu\}$ — проективная система над Λ с сюръективными связывающими гомоморфизмами φ'^λ_μ (равными ограничениям φ^λ_μ на G'_λ) и тем же проективным пределом: $\varprojlim G'_\lambda = G$.

Если связывающие гомоморфизмы φ^λ_μ проективной системы сюръективны и ядра $\operatorname{Ker} \varphi^\lambda_\mu$ компактны для всех $\lambda \geqslant \mu$ из Λ, то проекции φ_λ: $\varprojlim G_\lambda \to G_\lambda$ сюрьективны и открыты. Ядра $\operatorname{Ker} \varphi_\lambda$ компактны.

Таким образом, группа $G = \varprojlim G_\lambda$ является проективным пределом своих факторгрупп. Верно и обратное: если G — топологическая группа, K_λ — компактная нормальная подгруппа G для каждого λ из направленного множества Λ и $K_\lambda \leqslant K_\mu$ для всех $\lambda \geqslant \mu$, то $G = \varprojlim G/K_\lambda$ (в качестве связывающих гомоморфизмов в проективной системе рассматриваются естественные гомоморфизмы $G/K_\lambda \to G/K_\mu = (G/K_\lambda)/(K_\lambda/K_\mu)$.

Примеры. 1) $\mathbf{Z}_p = \varprojlim \mathbf{Z}(p^n)$ со связывающими гомоморфизмами φ^m_n: $x \longmapsto x^{p^{m-n}}$. 2) $\prod\limits_{i \in I} G_i = \varprojlim \prod\limits_{i \in F} G_i$, где F пробегает совокупность всех конечных подмножеств в I, для $F \subseteq L$ связывающее отображение $\prod\limits_{i \in L} G_i \to \prod\limits_{i \in F} G_i$ — проекция. 3) Топологическая группа G является компактной и вполне несвязной тогда и только тогда, когда $G = \varprojlim K_\lambda$, где K_λ — конечные группы. 4) Частным случаем предыдущего является представление

группы Галуа $G(L/K)$ бесконечного расширения L/K в виде $G(L/K) = \varprojlim G(L_i/K)$, где $\{L_i \mid i \in I\}$ — все конечные расширения Галуа поля K, содержащиеся в L. Для $L_i \supseteq L_j$ связывающий гомоморфизм $G(L_i/K)$ на $G(L_j/K)$ определяется ограничением на L_j автоморфизмов из $G(L_i/K)$.

Теорема о непустоте: предел проективной системы непустых компактных пространств всегда непуст.

Индуктивная (или *прямая*) *система* топологических групп G^λ со связывающими гомоморфизмами ι_μ^λ: $G^\mu \to G^\lambda$ при $\lambda \geqslant \mu$ из направленного множества Λ, *индуктивный предел* $G = \varinjlim G^\lambda$ с гомоморфизмами ι_λ: $G^\lambda \to G$ определяются двойственно проективным системам и пределам, т. е. направления гомоморфизмов заменяются на противоположные. Точно так же, как и для проективных пределов, индуктивный предел не изменяется, если ограничиваться лишь индексами из некоторого кофинального подмножества Λ. Заменяя группы G^λ на их факторгруппы, можно получить индуктивную систему с тем же пределом G и инъективными гомоморфизмами ι_λ: $G^\lambda \to G$. Таким образом, $G = \varinjlim G^\lambda$ представляется в виде индуктивного предела системы своих подгрупп $\iota_\lambda(G^\lambda)$; при этом G совпадает с объединением подгрупп $\iota_\lambda(G^\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Если Λ — направленное множество, G^λ, $\lambda \in \Lambda$, — такое множество открытых подгрупп топологической группы G, что $G^\mu \leqslant G^\lambda$ при $\lambda \geqslant \mu$ и $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G^\lambda$, то $G = \varinjlim G^\lambda$ (в качестве связывающих гомоморфизмов берутся вложения G^μ в G^λ).

Метрика и равномерные структуры на топологических группах определяются следующим образом. Топологическая группа G называется *метризуемой*, если на пространстве G существует метрика, топология которой совпадает с исходной топологией на G. Метрика ρ называется *левоинвариантной*, если $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ для любых $g, x, y \in G$.

Топологическая группа метризуема тогда и только тогда, когда она удовлетворяет первой аксиоме счетности. При этом метрика может быть выбрана левоинвариантной.

Локально компактная σ-компактная группа представима в виде проективного предела своих метризуемых факторгрупп.

В случае, когда топологическая группа не удовлетворяет первой аксиоме счетности, на ней рассматриваются равномерные структуры, обобщающие понятие метрики.

На пространстве каждой топологической группы G можно ввести следующие равномерные структуры.

а) *Левая равномерная структура* $\mathscr{L}_G$: в качестве базиса системы окружений диагонали в $G \times G$ берется система подмножеств $L(U) = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in U\}$, где U пробегает некоторый базис $\mathfrak{U}$ окрестностей единицы в G.

б) *Правая равномерная структура* $\mathscr{R}_G$: берется система подмножеств $R(U) = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in U\ U \in \mathfrak{U}\}$.

в) *Двусторонняя равномерная структура* $\mathscr{B}_G$: берется система подмножеств $B(U) = L(U) \cap R(U), U \in \mathfrak{U}$.

Топологии, определяемые каждой из этих равномерных структур на G, совпадают с исходной топологией группы G. Левая и правая равномерные структуры изоморфны между собой; изоморфизм определяется отображением $x \longmapsto x^{-1}$, $x \in G$.

Пример. Пусть G — метризуемая топологическая группа, ρ — левоинвариантная метрика на G, $\mathfrak{U} = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ — базис системы окрестностей единицы, где $U_\varepsilon = \{g \in G \mid \rho(g, e) < \varepsilon\}$. В этом случае $(x, y) \in L(U_\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Отсутствие в топологической группе G счетного базиса системы окрестностей единицы приводит к необходимости рассматривать *направленности элементов* G, т. е. наборы $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ элементов $x_\lambda \in G$ с направленным частично упорядоченным множеством индексов Λ.

Говорят, что *направленность* $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ в G *сходится* к элементу $g \in G$, если для любой окрестности U точки g в G найдется такой индекс $\mu = \mu(U) \in \Lambda$, что $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \geqslant \mu$. Направленность $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ элементов топологической группы G называется *направленностью Коши* (или, иначе, *фундаментальной направленностью*) в левой [в двусторонней] рав-

номерной структуре на G, если для любой окрестности единицы U из базиса $\mathfrak{A}$ найдется такой индекс $\mu=\mu(U)\in\Lambda$, что $x_\lambda^{-1}x_\nu\in U$ $[x_\lambda^{-1}x_\nu\in U$ и $x_\lambda x_\nu^{-1}\in U]$ для всех λ, $\nu\geqslant\mu$. Всякая сходящаяся направленность в G является направленностью Коши в двусторонней равномерной структуре и, следовательно, в левой равномерной структуре.

Топологическая группа G называется *полной* в левой (или в двусторонней) равномерной структуре, если каждая направленность Коши в этой структуре является сходящейся (к некоторому элементу из G). *Пополнением* топологической группы G в равномерной структуре $\mathscr{L}_G$ или $\mathscr{B}_G$ называется полная в $\mathscr{L}_{\hat{G}}$ или, соответственно, в $\mathscr{B}_{\hat{G}}$ группа $\hat{G}$, содержащая G в качестве плотной подгруппы.

Если топологическая группа G полна, то $\hat{G}=G$. Топологическая группа G, полная в $\mathscr{L}_G$, полна и в структуре $\mathscr{B}_G$. Обратное неверно. Пополнение топологической группы в левой равномерной структуре существует не всегда. Для его существования необходимо и достаточно выполнения следующего условия: если $\{x_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ — направленность Коши в левой равномерной структуре, то и $\{x_\lambda^{-1}\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ — также направленность Коши в этой структуре.

Если топологическая группа G обладает базисом окрестностей единицы, состоящим из таких U, что $gUg^{-1}=U$ для всех $g\in G$, то пополнение G в $\mathscr{L}_G$ существует. В частности, абелевы группы пополняемы в левой равномерной структуре.

Пример не пополняемой в левой равномерной структуре группы дает группа $\mathrm{Symm}(X)$ для бесконечного множества X (последовательность $\{\sigma_n=(1,\ 2;\ \ldots,\ n)\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ является последовательностью Коши в левой равномерной структуре, но не в правой). Не будучи полной в левой равномерной структуре, группа $\mathrm{Symm}(X)$ полна в двусторонней равномерной структуре.

Любая топологическая группа G пополняема в двусторонней равномерной структуре. Если G пополняема и в $\mathscr{L}_G$, то ее пополнения в $\mathscr{L}_G$ и в $\mathscr{B}_G$ совпадают. Для любой плотной подгруппы G топологической группы H существует изоморфное вложение H в пополнение $\hat{G}$ группы G, которое переводит в себя все элементы из G. Отсюда вытекает единственность пополнения топологической группы.

Топологическая группа G полна в $\mathscr{B}_G$ тогда и только тогда, когда G замкнута в любой содержащей ее топологической группе.

Замкнутая подгруппа полной топологической группы полна.

Если полная топологическая группа G удовлетворяет первой аксиоме счетности, N — замкнутая нормальная подгруппа G, то факторгруппа G/N полна. Расширение полной группы с помощью полной группы является полной группой. Прямое произведение семейства полных топологических групп является полной группой. Каждая локально компактная группа полна в левой равномерной структуре.

В приведенных утверждениях полнота может пониматься как в левой, так и в двусторонней равномерной структуре. Существуют топологические группы, полные в левой структуре, обладающие неполными факторгруппами по замкнутым нормальным подгруппам.

Пусть N_λ, $\lambda \in \Lambda$, — такая система нормальных подгрупп топологической группы G, что каждая окрестность единицы в G содержит N_λ для некоторого $\lambda \in \Lambda$ и для любых λ, $\mu \in \Lambda$ найдется такой $\nu \in \Lambda$, что $N_\nu \leqslant N_\lambda \cap N_\mu$. Тогда если все группы G/N_λ полны, то $\hat{G} = \varprojlim G/N_\lambda$.

3.2. Строение локально компактных групп. Топологическая группа G называется *локально евклидовой*, если существует окрестность единицы U в G, гомеоморфная окрестности W начала координат евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Гомеоморфизм α: $U \to W$, переводящий единицу $e \in G$ в начало координат $\mathbf{R}^n$, определяет локальную систему координат в G: $\alpha(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i \in \mathbf{R}$, для $u \in U$. В этих координатах групповые операции G задаются набором непрерывных вещественнозначных функций. Точнее, существует такая окрестность $V \subseteq W$ начала координат и непрерывные функции μ_i: $V \times V \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что для u, $v \in \alpha^{-1}(V)$ элемент $w = uv^{-1}$ принадлежит U и $w_i = \mu_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если в топологической группе G на некоторой окрестности единицы можно выбрать локальную систему координат, в которой групповая операция за-

дается аналитическими функциями μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то G называется *группой Ли*. Замкнутая подгруппа и факторгруппа группы Ли (по замкнутой нормальной подгруппе) являются группами Ли. Пятая проблема Гильберта, а точнее, вопрос, в который она трансформировалась в процессе развития теории топологических групп, заключается в следующем: является ли всякая локально евклидова топологическая группа группой Ли?

Локально евклидова группа всегда локально компактна, а ее пространство локально связно. Из определения группы Ли вытекает, что она локально евклидова. Положительное решение пятой проблемы Гильберта (см. [10]) основано на следующей серии утверждений.

Локально компактная группа G является группой Ли тогда и только тогда, когда существует окрестность единицы, не содержащая нетривиальных подгрупп.

Если G — локально компактная группа с компактной факторгруппой G/G_0, то G является проективным пределом групп Ли.

Это утверждение эквивалентно существованию в каждой окрестности единицы U группы G компактной нормальной подгруппы K, факторгруппа G/K, по которой является группой Ли. Кроме того, произвольная локально компактная группа содержит открытую подгруппу с компактной факторгруппой по связной компоненте.

Локальной группой Ли L называется образ некоторой окрестности единицы W в группе Ли H при таком гомеоморфизме $\varphi\colon W \to L \subset G$, что $\varphi(w_1 w_2^{-1}) = \varphi(w_1)\varphi(w_2)^{-1}$ для всех w_1, $w_2 \in W \subset H$ таких, что $w_1 w_2^{-1} \in W$.

В каждой окрестности единицы U локально компактной группы G содержится окрестность единицы V, представимая в виде прямого произведения $V = L \times K$, где L — локальная группа Ли, K — компактная подгруппа группы G.

Если группа G не является вполне несвязной, то существует такая окрестность единицы U в G, что для любого разложения $V = L \times K$ содержащейся в U окрестности размерность $\dim L > 0$.

Если $\dim G < \infty$, то в разложении $V = L \times K$ окрестности единицы можно считать группу K вполне несвязной.

Так как локально евклидова группа G конечномерна, то отсюда и из локальной связности группы G вытекает, что K — единичная группа, т. е. в G содержится открытая локальная подгруппа Ли. Это означает, что G — группа Ли.

Если G — топологическая группа, $N \trianglelefteq G$ и группы N и G/N являются группами Ли, то G — также группа Ли.

Проективно лиевыми называют локально компактные группы, представимые в виде проективных пределов групп Ли. Приведем некоторые их свойства.

Если G — локально компактная группа с компактной факторгруппой G/G_0, то любая компактная подгруппа G содержится в максимальной компактной подгруппе и каждые две максимальные компактные подгруппы сопряжены в G между собой.

Пусть G — локально компактная группа с компактной факторгруппой G/G_0, K — некоторая максимальная компактная подгруппа G. Тогда в G найдутся изоморфные $\mathbf{R}$ подгруппы $L_1, L_2, \ldots, L_n$ такие, что отображение $(k, l_1, l_2, \ldots, l_n) \mapsto k l_1 l_2 \ldots l_n$ является гомеоморфизмом произведения $K \times L_1 \times \ldots \times L_n$ на G.

Отсюда, в частности, вытекает связность максимальных компактных подгрупп связных локально компактных групп. Поэтому из следующего утверждения можно получить полную информацию о максимальных связных абелевых подгруппах в связных локально компактных группах.

Если G — компактная связная группа, то каждый элемент из G содержится в максимальной связной абелевой подгруппе; все максимальные связные абелевы подгруппы G попарно сопряжены и совпадают со своими централизаторами.

Компактная группа G делима тогда и только тогда, когда она связна.

Локально компактная связная группа изоморфна факторгруппе $(K \times M)/D$, где K — компактная связная группа, не имеющая связных абелевых нормальных подгрупп, M — локально компактная связная группа, все компактные нормальные подгруппы ко-

торой лежат в центре, D — вполне несвязная подгруппа центра группы $K \times M$. Компактная связная конечномерная группа изоморфна факторгруппе $(\mathbf{R}^n \times L \times K)/D$, где L — полупростая компактная группа Ли, K — абелева компактная вполне несвязная группа, D — конечно порожденная дискретная подгруппа центра группы $\mathbf{R}^n \times L \times K$.

Если G — локально компактная группа, то на семействе $\mathscr{B}$ всех борелевских подмножеств существует мера m, обладающая следующими свойствами:

а) $m(K) < \infty$ для любого компактного подмножества K;

б) $m(U) > 0$ для любого открытого подмножества U;

в) мера m регулярна;

г) мера m левоинвариантна, т. е. $m(gM) = m(M)$ для всех $M \in \mathscr{B}$, $g \in G$. Эта мера называется *левой мерой Хаара* на G. Свойствами а) — г) она однозначно определяется с точностью до постоянного множителя. Другими словами, если m_1, m_2 — две левые меры Хаара на G, то $m_2(M) = cm_1(M)$ для некоторого $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

Интеграл Хаара (интеграл по левой мере Хаара) на G левоинвариантен в следующем смысле:

$$\int f(gx)\,dx = \int f(x)\,dx$$

для любого $g \in G$. Если α — топологический автоморфизм группы G, то $\int f(\alpha^{-1}(x))\,dx$ также является левым интегралом Хаара на G. Поэтому существует такое число $\Delta(\alpha) > 0$, называемое *модулем автоморфизма* α, что

$$\int f(\alpha^{-1}(x))\,dx = \Delta(\alpha) \int f(x)\,dx.$$

Если α — внутренний автоморфизм G, соответствующий элементу g, то $\Delta(\alpha)$ называется модулем $\Delta(g)$ элемента $g \in G$. Имеет место соотношение

$$\int f(xg^{-1})\,dx = \Delta(g) \int f(x)\,dx.$$

Отображение $\alpha \mapsto \Delta(\alpha)$ является непрерывным гомоморфизмом топологической группы $\operatorname{Aut} G$ в мультипликативную группу положительных вещественных чисел $\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$.

Отображение $g \mapsto \Delta(g)$ является непрерывным гомоморфизмом G в $\mathbf{R}_{+}^{*}$.

Группа G называется *унимодулярной*, если $\Delta(g) = 1$ для всех $g \in G$ или, эквивалентно, левый интеграл Хаара является одновременно правоинвариантным. Компактные группы унимодулярны. Это может быть обобщено до следующего утверждения:

Если в локально компактной группе G левая и правая равномерные структуры совпадают, то G унимодулярна.

Локально компактные группы конечной меры Хаара исчерпываются компактными группами. На компактной группе G мера Хаара выбирается с дополнительным условием $m(G) = 1$ и определяется им однозначно.

Для любого неединичного элемента g компактной группы G существует такое непрерывное неприводимое унитарное конечномерное представление $\rho\colon G \to U(n, \mathbf{C})$, что $g \notin \operatorname{Ker} \rho$ (теорема Петера—Вейля). Отсюда немедленно вытекает проективная лиевость компактных групп.

Существуют локально компактные и даже дискретные группы, не имеющие нетривиальных конечномерных представлений. С другой стороны, если группа G локально компактна, $g \in G$ и $g \neq e$, то существует бесконечномерное непрерывное неприводимое унитарное представление, ядро которого не содержит g. Это утверждение влечет теорему Петера—Вейля, так как каждое непрерывное неприводимое унитарное представление компактной группы конечномерно.

Для локально компактной группы G с компактной факторгруппой G/G_0 пересечение ядер всех конечномерных непрерывных неприводимых унитарных представлений является единичной подгруппой тогда и только тогда, когда $G_0 \simeq \mathbf{R}^n \times K$, где $n \geqslant 0$, K — компактная группа.

Определим двойственность Понтрягина. Используя аддитивную запись групповой операции, группу окружности $\mathbf{T}$ можно считать состоящей из вещественных чисел по модулю 1 (т. е. отождествлять $\mathbf{T}$ с $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$).

Характером локально компактной абелевой (л. к. а.) группы G называется непрерывный гомо-

морфизм $\chi\colon G \to \mathbf{T}$. Совокупность G^* всех характеров группы G превращается в топологическую группу, если групповые операции на ней задать равенствами $(\chi_1+\chi_2)(g) \underset{\text{def}}{=} \chi_1(g)+\chi_2(g)$, $(-\chi)(g) \underset{\text{def}}{=} -\chi(g)$ для $\chi, \chi_1, \chi_2 \in G^*$, $g \in G$, а топологию определить базисом системы окрестностей нуля, образованным подмножествами G^* вида $W(K, U)=\{\chi \in G^* \mid \chi(K) \subseteq U\}$, где K пробегает компактные подмножества G, U — некоторый базис системы окрестностей нуля в $\mathbf{T}$. Эта группа G^* называется *группой характеров* группы G.

Отметим, что всякое неприводимое унитарное представление абелевой группы одномерно. Так как одномерные унитарные матрицы — просто комплексные числа модуля 1, то получаем, что характеры л. к. а. группы разделяют ее точки.

Отображение $g \longmapsto (\chi(g))$ л. к. а. группы G в компактную группу $\prod\limits_{\chi \in G^*} \mathbf{T}$ является инъективным непрерывным гомоморфизмом.

Это утверждение позволяет на бесконечной абелевой группе G построить недискретную групповую топологию. Для этого G вкладывается в компактную группу $\prod\limits_{\chi \in G^*} \mathbf{T}$ и снабжается индуцированной топологией.

Пусть G, H — л. к. а. группы, $\varphi\colon G \to H$ — непрерывный гомоморфизм. Обозначим через φ^* отображение из H^* в G^*, заданное равенством $\varphi^*(\chi(g)) = \chi(\varphi(g))$ для $\chi \in H^*$, $g \in G$. Для любой л. к. а. группы G группа характеров G^* также является л. к. а. группой.

Если $\varphi\colon G \to H$ — непрерывный гомоморфизм л. к. а. групп, то $\varphi^*\colon H^* \to G^*$ — также непрерывный гомоморфизм. При этом из открытости φ вытекает открытость φ^*.

Справедливо равенство $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ для любых непрерывных гомоморфизмов $\psi\colon G \to H$, $\varphi\colon H \to K$ л. к. а. групп.

Гомоморфизм φ^* называется *двойственным* к φ; группу характеров G^* часто называют *двойственной* к G.

Так как G^* — л. к. а. группа, то можно определить ее группу характеров G^{**}. Обозначим через p_G

отображение из G в G^{**}. задаваемое равенством $p_G(g)(\chi)=\chi(g)$ для $\chi\in G^*$, $g\in G$.

Для любой л. к. а. группы G отображение p_G является топологическим изоморфизмом G на G^{**}. Если φ: $G\to H$ — непрерывный гомоморфизм л. к. а. групп, то $p_H\varphi=\varphi^{**}p_G$ (*теорема двойственности Понтрягина*).

Эта теорема позволяет отождествлять группы G и G^{**}, а также гомоморфизмы φ и φ^{**}.

Если обозначить через LCA категорию локально компактных абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов, то переход к двойственным группам и гомоморфизмам оказывается контравариантным функтором из LCA в LCA. Теорема двойственности утверждает, что этот функтор является двойственностью LCA в себя в том смысле, что его квадрат — автоэквивалентность категории LCA.

Примеры. 1) $\mathbf{Z}^*\simeq\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*\simeq\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}^*\simeq\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_p^*\simeq C(p^\infty)$, $C(p^\infty)^*\simeq\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p^*\simeq\mathbf{Q}_p$. 2) Если φ: $G\to G$ переводит $g\in G$ в ng для $n\in\mathbf{N}$, то $\varphi^*(\chi)=n\chi$ для всех $\chi\in G^*$.

Пусть H — подгруппа л. к. а. группы G. *Аннулятором* H называется подгруппа $H^\perp$ группы G^*, состоящая из таких характеров χ, что $\chi(h)=0$ для любого $h\in H$. Аннулятор $H^\perp$ всегда замкнут; $H^\perp=(\bar H)^\perp$; $H^{\perp\perp}=H$, если H замкнута; $G^\perp=\{0\}$ и $\{0\}^\perp=G^*$. Если φ: $G\to H$ — непрерывный гомоморфизм л. к. а. групп, то $\operatorname{Ker}(\varphi^*)=(\operatorname{Im}\varphi)^\perp$, $\overline{\operatorname{Im}(\varphi^*)}=(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$.

Если H_i, $i\in I$, — семейство замкнутых подгрупп л. к. а. группы G, то $\left(\bigcap_{i\in I}H_i\right)^\perp=\overline{\langle H_i^\perp\mid i\in I\rangle}$, $(\overline{\langle H_i\mid i\in I\rangle})^\perp=\bigcap_{i\in I}H_i^\perp$.

Из теоремы двойственности вытекает, что свойства л. к. а. группы G полностью определяются свойствами ее группы характеров G^*. Переход от свойств G к свойствам G^{**} и обратно позволяет полнее изучить структуру л. к. а. групп.

Если H — замкнутая подгруппа л. к. а. группы G, то

$$(G/H)^*\simeq H^\perp,\quad H^*\simeq G^*/H^\perp.$$

В обоих случаях изоморфизм индуцируется двойственным отображением φ^*, где φ — естественный гомоморфизм G на G/H в первом случае и вложение H в G во втором.

Л. к. а. группа G компактна тогда и только тогда, когда G^* дискретна. Л. к. а. группа G связна тогда и только тогда, когда все элементы в G^* чистые. Л. к. а. группа G вполне несвязна тогда и только тогда, когда все элементы в G^* компактные. Л. к. а. группа G не имеет элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда в G^* плотна подгруппа $p(G^*)$ для любого простого p. Для компактной абелевой группы K ее размерность $\dim K$ конечна тогда и только тогда, когда конечен $\mathbf{Q}$-ранг $\operatorname{rank}_0 K^*$ дискретной группы K^*. При этом $\dim K = \operatorname{rank}_0 K^*$. Л. к. а. группа G метризуема (т. е. локальный вес G счетен) тогда и только тогда, когда группа G^* σ-компактна. Вес $w(G)$ л. к. а. группы G равен весу $w(G^*)$ ее группы характеров.

Отметим, что в силу теоремы двойственности, каждое из утверждений выше содержит, в действительности, два утверждения. Так, например, вместе с первым из них справедливо утверждение:

Л. к. а. группа G дискретна тогда и только тогда, когда G^* компактна.

Введем несколько обозначений для л. к. а. группы G:

tG — множество компактных элементов группы G; из коммутативности G вытекает, что tG — замкнутая подгруппа;

$$G[n] \underset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid ng = 0\}, \quad n \geqslant 0;$$

$$nG \underset{\text{def}}{=} \{ng \mid g \in G\}, \quad n \geqslant 0.$$

Для л. к. а. группы G имеют место следующие равенства:

а) $(tG)^{\perp} = (G^*)_0$, $(G_0)^{\perp} = t(G^*)$;

б) $(nG)^{\perp} = G^*[n]$, $G[n]^{\perp} = \overline{n(G^*)}$.

Пусть H — подгруппа л. к. а. группы G. Тогда: если H открыта, то $H^{\perp}$ компактна; если H омпактна, то $H^{\perp}$ открыта.

Пусть G_i, $i \in I$, — множество л. к. а. групп и в каждой группе G_i выделена компактная открытая подгруппа H_i. Обозначим через $\prod\limits_{i \in I} (G_i : H_i)$ подгруппу прямого произведения $\prod\limits_{i \in I} G_i$, состоящую из таких элементов (g_i), что $g_i \in H_i$ для почти всех индексов $i \in I$. Определим на группе $\prod\limits_{i \in I} (G_i : H_i)$ топологию, объявив открытым содержащееся в ней компактное (в тихоновской топологии) прямое произведение $\prod\limits_{i \in I} H_i$.

Построенная группа $\prod\limits_{i \in I} (G_i : H_i)$ называется *локальным прямым произведением групп G_i с отмеченными подгруппами H_i*; она всегда локально компактна. Если группы G_i компактны, то $\prod\limits_{i \in I} (G_i : G_i) = \prod\limits_{i \in I} G_i$. Если группы G_i дискретны, то $\prod\limits_{i \in I} (G_i : \{e_i\}) = \sum\limits_{i \in I} G_i$ — прямая сумма абелевых групп (с дискретной топологией).

Для любого семейства л. к. а. групп G_i с отмеченными компактными открытыми подгруппами H_i

$$\Big(\prod_{i \in I} (G_i : H_i)\Big)^* \simeq \prod_{i \in I} \big(G_i^* : H_i^{\perp}\big).$$

Пусть теперь $\{G_\lambda, \varphi_\mu^\lambda\}$ — проективная система л. к. а. групп над некоторым направленным множеством Λ. Тогда $\{G_\lambda^*, (\varphi_\mu^\lambda)^*\}$ является индуктивной системой над Λ. Обратно, если $\{G^\lambda, \varphi_\mu^\lambda\}$ — индуктивная система, то $\{(G^\lambda)^*, (\varphi_\mu^\lambda)^*\}$ — проективная система над Λ.

Если $G = \varprojlim G_\lambda$ — л. к. а. группа, то $G^* = \varinjlim G_\lambda^*$. Если $G = \varinjlim G^\lambda$ — л. к. а. группа, то $G^* = \varprojlim (G^\lambda)^*$.

Пусть G, H — л. к. а. группы, $\operatorname{Hom}(G, H)$ — множество непрерывных гомоморфизмов из G в H. Определив сложение на $\operatorname{Hom}(G, H)$ по формуле $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ для $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(G, H)$, $g \in G$, и топологию, взяв в качестве базиса системы окрестностей нулевого гомоморфизма семейство подмножеств

$W(K, U)=\{\varphi \mid \varphi(K)\subseteq U\}$, где K пробегает компактные подмножества G, U — некоторый базис системы окрестностей нуля в H, получим топологическую группу $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Если G, H — л. к. а. группы, то отображение $\varphi \mapsto \varphi^*$ задает топологический изоморфизм $\mathrm{Hom}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}(H^*, G^*)$.

Для любой л. к. а. группы G отображение $\alpha \mapsto (\alpha^*)^{-1}$ задает топологический изоморфизм $\mathrm{Aut}\, G \simeq \mathrm{Aut}\, G^*$.

Произвольная л. к. а. группа G представляется в виде $G \simeq \mathbf{R}^n \times H$, где $n < \infty$, л. к. а. группа H обладает открытой компактной подгруппой.

Элементарной л. к. а. группой называется группа вида $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times \mathbf{Z}^l \times F$, где $0 \leqslant l, m, n < \infty$, F — конечная группа. Класс элементарных л. к. а. групп совпадает с классом компактно порожденных (т. е. топологически порожденных своим компактным подмножеством) абелевых групп Ли.

Каждая л. к. а. группа является объединением (индуктивным пределом) своих открытых компактно порожденных подгрупп.

Л. к. а. группа H компактно порождена тогда и только тогда, когда $H \simeq \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^l \times K$, где $0 \leqslant l, n < \infty$, K — компактная группа.

Компактно порожденная л. к. а. группа H представляется в виде проективного предела своих элементарных факторгрупп.

Каждая л. к. а. группа представима в виде проективного предела своих факторгрупп, изоморфных прямым произведениям вида $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times D$, где $0 \leqslant m, n < \infty$, D — дискретная группа.

Л. к. а. группа вида $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times D$, где $0 \leqslant m, n < \infty$, D — дискретная группа, является объединением (индуктивным пределом) своих открытых элементарных подгрупп.

Пусть H — л. к. а. группа с компактной открытой подгруппой K; рассмотрим ряд подгрупп в H:

$$\{0\} \leqslant H_0 \leqslant K \leqslant tH \leqslant H.$$

В этом ряду H_0 — связная компактная группа, H/tH — дискретная группа без кручения, tH/H_0 — л. к. а. вполне несвязная группа, все элементы которой компактны.

Класс связных компактных абелевых групп и класс дискретных абелевых групп без кручения двойственны друг другу. Локально компактная вполне несвязная абелева группа, все элементы которой компактны, является расширением компактной вполне несвязной группы посредством дискретной периодической группы. Классы компактных вполне несвязных абелевых групп и дискретных периодических абелевых групп также двойственны друг другу.

Любая компактная абелева группа без кручения K имеет вид $K = K_0 \times \tilde{K}$, где $K_0 \simeq \prod^{\mu} S$, S — группа характеров дискретной группы $\mathbf{Q}$, а $\tilde{K} \simeq K/K_0 \simeq \simeq \prod\limits_p \prod^{\varkappa_p} \mathbf{Z}_p$.

Компактная периодическая абелева группа изоморфна прямому произведению конечных циклических групп, порядки которых ограничены в совокупности.

Топологическая группа называется *монотетической*, если она топологически порождена одним своим элементом.

Локально компактная монотетическая группа либо изоморфна $\mathbf{Z}$, либо компактна. Топологическая абелева группа K является компактной монотетической группой тогда и только тогда, когда локальный вес связной компоненты K не превосходит мощности континуума, а факторгруппа $K/K_0 = \prod\limits_p L_p$, где для каждого простого числа p группа L_p изоморфна либо $\mathbf{Z}_p$, либо $\mathbf{Z}(p^n)$ с $n \geqslant 0$, или, что эквивалентно, группа характеров K^* дискретна и вложима в прямую сумму $\sum\limits_p C(p^\infty) \oplus \sum^{\aleph_1} \mathbf{Q}$, где $\aleph_1$ — мощность континуума.

Пусть G — локально компактная вполне несвязная абелева группа, все элементы которой компактны. Тогда для любого $g \in G$ подгруппа $\overline{\langle g \rangle}$ изоморфна факторгруппе группы $\prod\limits_p \mathbf{Z}_p$. Элемент $g \in G$ называется p-элементом, если $\overline{\langle g \rangle}$ изоморфна либо $\mathbf{Z}_p$, либо $\mathbf{Z}(p^n)$, $n \geqslant 0$. В л. к. а. вполне несвязной группе множество ее p-элементов образует подгруппу G_p, иногда называемую *p-силовской подгруппой*.

Пусть G — л. к. а. вполне несвязная группа, все элементы которой компактны. Тогда $G = G_p$ для некоторого простого числа p в том и только том случае, когда для $H = G^*$ также $H = H_p$. Группа G разлагается в локальное прямое произведение $G = \prod_p (G_p : K_p)$ своих p-силовских подгрупп, где $K_p = G_p \cap K$ для произвольно выбранной в G компактной открытой подгруппы K.

Рассмотрим обобщенно нильпотентные и разрешимые группы. Топологическая группа G называется *разрешимой*, если существует такой конечный ряд

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = E \tag{*}$$

замкнутых подгрупп G, что $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и все факторы ряда G_i/G_{i+1} абелевы. Группа G *нильпотентна*, если в ней существует такой ряд (*) замкнутых подгрупп, что $G_i \trianglelefteq G$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и G_i/G_{i+1} содержится в центре факторгруппы G/G_{i+1}.

Для того чтобы топологическая группа была разрешимой или нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы она обладала этим свойством как абстрактная группа.

Примеры. 1) Группа $UT(n, K)$ унитреугольных матриц, т. е. таких матриц (a_{ij}), что $a_{ij} = 0$ при $i > j$ и $a_{ii} = 1$, является нильпотентной. 2) Группа $T(n, K)$ верхних треугольных матриц является разрешимой.

Если в этих примерах K — некоторое локально компактное поле ($\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$), то получаем примеры нильпотентных и разрешимых локально компактных групп.

Если G — локально компактная связная разрешимая группа, то ее коммутант G' — нильпотентная группа.

Связная компактная разрешимая группа абелева.

Локально компактная группа G называется *проективно нильпотентной* [*проективно разрешимой*], если в любой окрестности единицы U группы G содержится такая нормальная подгруппа N, что G/N — нильпотентная [разрешимая] группа. Другими словами, проективно нильпотентные [проективно разрешимые] группы — это в точности проективные пределы нильпотентных [разрешимых] групп.

Локально компактная группа G называется *локально проективно нильпотентной* [*локально проективно разрешимой*], если любое конечное подмножество G топологически порождает проективно нильпотентную [проективно разрешимую] подгруппу. Связная локально проективно нильпотентная [локально проективно разрешимая] группа является нильпотентной [разрешимой].

Если G — компактно порожденная локально проективно нильпотентная группа, то G — проективный предел нильпотентных групп Ли.

Если G — локально проективно нильпотентная группа, то:

а) множество tG компактных элементов из G является замкнутой подгруппой;

б) G_0 и tG поэлементно перестановочны;

в) связная компонента $(tG)_0$ группы tG является центральной подгруппой в G_0 и совпадает с $tG \cap G_0$;

г) факторгруппа G/tG — локально нильпотентная группа Ли без компактных элементов;

д) подгруппа $N = G_0 \cdot tG$ открыта в G и изоморфна факторгруппе $(L \times tG)/C$, где L — связная односвязная нильпотентная группа Ли, C — такая замкнутая подгруппа прямого произведения $L \times tG$, что $C \cap tG = E$, $C \cap L$ — дискретная группа.

Если G — вполне несвязная локально проективно нильпотентная группа, все элементы которой компактны, то для любого простого числа p множество p-элементов из G образует замкнутую нормальную подгруппу G_p и группа G разлагается в локальное прямое произведение $G = \prod_p (G_p : K_p)$, где $K_p = G_p \cap K$ для произвольно выбранной в G открытой компактной подгруппы K.

Множество $\mathfrak{U}$ замкнутых подгрупп топологической группы G называют *субнормальным рядом* в G, если:

а) $\mathfrak{U}$ содержит единичную подгруппу E и саму группу G и линейно упорядочено по включению;

б) для любого подмножества $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{U}$ подгруппы $\overline{\bigcup_{H \in \mathfrak{X}} H}$ и $\bigcap_{H \in \mathfrak{X}} H$ принадлежат $\mathfrak{U}$;

в) если подгруппы K и H из $\mathfrak{U}$ образуют скачок ряда (т. е. $K < H$ и между K и H нет подгрупп из $\mathfrak{U}$), то K — нормальная подгруппа H.

Субнормальный ряд $\mathfrak{U}$ в G называется *разрешимым*, если для любого скачка $K \lhd H$ ряда $\mathfrak{U}$ факторгруппа H/K абелева. Ряд $\mathfrak{U}$ называется *нормальным*, если все подгруппы из $\mathfrak{U}$ — нормальные подгруппы в G. *Центральным* называется такой нормальный ряд в G, что для любого скачка $K \lhd H$ факторгруппа H/K содержится в центре G/K.

Определим классы Z, $\overline{Z}$ и $\tilde{N}$ обобщенно нильпотентных топологических групп следующим образом:

$G \in Z$, если G обладает центральным рядом;

$G \in \overline{Z}$, если каждый нормальный ряд в G можно уплотнить до центрального;

$G \in \tilde{N}$, если каждая подгруппа из G принадлежит некоторому субнормальному ряду в G.

Классы RN, $\overline{RN}$, RI и $\overline{RI}$ обобщенно разрешимых групп определяются следующим образом:

$G \in RN$, если в G существует разрешимый субнормальный ряд;

$G \in RI$, если в G существует разрешимый нормальный ряд;

$G \in \overline{RN}$, если любой субнормальный ряд в G можно уплотнить до разрешимого субнормального ряда;

$G \in \overline{RI}$, если любой нормальный ряд в G можно уплотнить до разрешимого нормального ряда.

Множество $\mathcal{L}$ замкнутых подгрупп топологической группы G называется *локальной системой*, если G является объединением всех подгрупп из $\mathcal{L}$ и для любых K, $H \in \mathcal{L}$ найдется такая подгруппа $M \in \mathcal{L}$, что $K \leqslant M$, $H \leqslant M$.

Локальная теорема: если X — один из введенных выше классов Z, $\overline{Z}$, $\tilde{N}$, RN, $\overline{RN}$, RI, $\overline{RI}$ и локально компактная группа G обладает локальной системой из подгрупп, принадлежащих классу X, то G также принадлежит X.

Типичным примером локальной системы является множество всех конечно порожденных подгрупп топологической группы.

Локально компактная локально проективная разрешимая группа принадлежит каждому из классов $\overline{RN}$, $\overline{RI}$.

Локально компактная локально проективно нильпотентная группа принадлежит каждому из классов $\widetilde{Z}$, $\widetilde{N}$.

Каждая локально компактная группа G обладает замкнутым локально проективно нильпотентным радикалом $P(G)$ (т. е. наибольшим среди локально проективно нильпотентных нормальных подгрупп группы G).

Если G/G_0 — компактная группа, то $P(G)$ — проективно нильпотентная группа.

Локально компактная группа G с компактной факторгруппой G/G_0 обладает замкнутым проективно разрешимым радикалом.

В каждой локально компактной группе G существует замкнутая нормальная подгруппа $R_0(G)$ — наибольшая среди связных разрешимых нормальных подгрупп G. При этом $R_0(G/R_0(G))=E$.

В связной локально компактной группе G существует замкнутый разрешимый радикал $R(G)$. При этом $R(G/R(G))=E$.

Пусть G — связная локально компактная группа и $R(G)=E$. Тогда G единственным образом представима в виде $G=\prod\limits_{i\in I} S_i$, где S_i — связные простые группы Ли, компактные для почти всех индексов i из I.

3.3. Проконечные группы. Топологическая группа, представимая в виде проективного предела конечных групп, называется *проконечной*. Класс проконечных групп совпадает с классом компактных вполне несвязных групп.

Примеры. 1) Если G — такая ФА-группа, топология на которой задана системой окрестностей единицы $\mathfrak{U}$, состоящей из нормальных подгрупп конечного индекса, то пополнение $\widehat{G} \underset{\text{def}}{=} \varprojlim_{N\in\mathfrak{U}} G/N$ — проконечная группа. Если $\mathfrak{U}$ — множество всех нормальных подгрупп конечных индексов [индексов, делящихся только на простые числа из множества π, или индексов, равных степеням некоторого простого числа p], то $\widehat{G}$ называется *проконечным пополнением* [*про-π-пополнением* или *про-p-пополнением*].

В частном случае $G=\mathbf{Z}$ получаем: группа целых p-адических чисел $\mathbf{Z}_p=\varprojlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ — про-p-пополнение $\mathbf{Z}$, $\hat{\mathbf{Z}}_\pi \simeq \prod\limits_{p\in\pi} \mathbf{Z}_p$ — при-π-пополнение $\mathbf{Z}$. Проконечное пополнение $\mathbf{Z}$ будем обозначать через $\widehat{\mathbf{Z}}$.

2) Группа Галуа $G(L/K)$ расширения Галуа L/K полей проконечная группа. Она представляется в виде проективного предела своих конечных факторгрупп $G(L/K) = \varprojlim G(L_i/K)$, где L_i пробегает все содержащиеся в L расширения Галуа поля K конечной степени. Произвольная проконечная группа изоморфна группе $G(L/K)$ для подходящего расширения Галуа L/K.

Через $\mathfrak{G}(K)$ условимся обозначать абсолютную группу Галуа поля K, т. е. группу $G(K^{\mathrm{sep}}/K)$, где K^{sep} — сепарабельное замыкание K. Имеют место изоморфизмы: $\mathfrak{G}(\boldsymbol{F}_q) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$, где $\mathbf{F}_q$ - конечное поле; $\mathfrak{G}(C((t))) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$, где $C((t))$ — поле формальных степенных рядов над алгебраически замкнутым полем C нулевой характеристики.

Если $G = \varprojlim G/U$ — проконечная группа, H — ее замкнутая подгруппа, то $H = \varprojlim HU/U$.

Если N — нормальная замкнутая подгруппа проконечной группы $G = \varprojlim G/U$, то $G/N = \varprojlim G/NU$.

Для любой замкнутой подгруппы H проконечной группы G существует непрерывное сечение σ: $G/H \to G$ к естественному отображению φ: $G \to G/H$, $g \mapsto gH$, т. е. $\varphi\sigma = \mathrm{id}_{G/H}$.

Системой порождающих проконечной группы G называется подмножество X в G, топологически порождающее группу G и обладающее следующим свойством: любая окрестность единицы группы G содержит почти все элементы из X. Через $d(G)$ обозначим наименьшую из мощностей систем порождающих G.

Пример. Если $G = \prod_{i \in I} L_i$ — прямое произведение своих конечных циклических подгрупп $L_i = \langle g_i \rangle$, то множество $\{g_i \mid i \in I\}$ является системой порождающих X; $d(G) \leqslant |I|$.

Каждая проконечная группа обладает системой порождающих.

Если $d(G)$ бесконечно, то $d(G) = w_0(G)$; если $d(G) < \infty$, то локальный вес $w_0(G)$ счетен.

Сверхнатуральным числом называется формальное произведение $\prod p^{n_p}$, где p пробегает множество всех простых чисел, $0 \leqslant n_p \leqslant \infty$. Произведение двух сверхнатуральных чисел $\prod p^{n_p}$ и $\prod p^{m_p}$ определяется как $\prod p^{n_p + m_p}$. Для множества $\left\{\prod p^{n_p^i} \,\middle|\, i \in I\right\}$ сверхнатуральных чисел их наименьшее общее кратное равно, по

определению, $\prod p^{m_p}$, где $m_p = \sup\{n_p^i \mid i \in I\}$, а их наибольший общий делитель равен $\prod p^{k_p}$, где $k_p = \min\{n_p^i \mid i \in I\}$. Говорят, что простое число q делит сверхнатуральное число $\prod p^{n_p}$, если $n_q > 0$.

Индексом подгруппы H проконечной группы G называется наименьшее общее кратное $|G:H|$ множеств индексов $|G:HU|$, где U пробегает совокупность открытых нормальных подгрупп G. Порядок $|G|$ проконечной группы G определяется как индекс в G единичной подгруппы. Порядок подгруппы, порожденной элементом $g \in G$, называется порядком элемента g и обозначается $|g|$. Через $\pi(G)$ условимся обозначать множество простых чисел, делящих порядок группы G.

Очевидно, что если $K \leqslant H$ — замкнутые подгруппы проконечной группы G, то $|G:K| = |G:H||H:K|$. Если множество замкнутых подгрупп $\{H_i \mid i \in I\}$ проконечной группы таково, что для любых $i, j \in I$ найдется такое $k \in I$, что $H_k \leqslant H_i \cap H_j$, то индекс $\left|G: \bigcap_{i \in I} H_i\right|$ равен наименьшему общему кратному множества индексов $|G:H_i|$, $i \in I$.

Отметим простейшие свойства проконечных групп. Пусть $\mathscr{C}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно подгрупп, факторгрупп и конечных прямых произведений. Проконечная группа G называется *про-$\mathscr{C}$-группой*, если $G = \varprojlim G_\lambda$, где все $G_\lambda \in \mathscr{C}$; это эквивалентно тому, что все конечные факторгруппы G принадлежат классу $\mathscr{C}$. Так образованные классы про-$\mathscr{C}$-групп могут быть охарактеризованы как замкнутые относительно замкнутых подгрупп, факторгрупп и прямых произведений классы $\mathfrak{K}$ проконечных групп; при этом $\mathscr{C}$ совпадает с классом конечных групп из $\mathfrak{K}$.

Классы проконечных групп с перечисленными выше свойствами называются *многообразиями проконечных групп.* Если все группы G_λ, $\lambda \in \Lambda$, некоторой проективной системы проконечных групп принадлежат многообразию про-$\mathscr{C}$-групп, то предел $\varprojlim G_\lambda$ — также про-$\mathscr{C}$-группа.

П р и м е р ы м н о г о о б р а з и й п р о к о н е ч н ы х г р у п п. 1) Про-p-группы; соответствующий класс $\mathscr{C}$ состоит из конеч-

ных p-групп. Проконечная неединичная группа G является про-p-группой тогда и только тогда, когда $\pi(G) = \{p\}$. 2) Про-π-группы, где π — некоторое множество простых чисел; класс $\mathscr{C}$ — все конечные π-группы. Группа G является про-π-группой тогда и только тогда, когда $\pi(G) \subseteq \pi$. 3) Проразрешимые группы; $\mathscr{C}$ — класс всех конечных разрешимых групп. 4) Пронильпотентные группы; $\mathscr{C}$ — класс всех конечных нильпотентных групп.

Для многообразия про-$\mathscr{C}$-групп и проконечной группы G обозначим через $\mathscr{C}^{\#}(G)$ пересечение всех открытых нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathscr{C}$. Факторгруппа $G^{\mathscr{C}} = G/\mathscr{C}^{\#}(G)$ является наибольшей про-$\mathscr{C}$-факторгруппой группы G. Точнее, если ψ — непрерывный гомоморфизм G в про-$\mathscr{C}$-группу H, то $\psi = \psi_0\varphi$ для гомоморфизма ψ_0: $G^{\mathscr{C}} \to H$ и естественного гомоморфизма φ группы G на факторгруппу $G^{\mathscr{C}}$.

Примеры. 1) Если $\mathscr{C}$ — класс конечных p-групп, K — некоторое поле, то группа $\mathfrak{G}^p(K) = \mathfrak{G}(K)/\mathscr{C}^{\#}(\mathfrak{G}(K))$ есть группа Галуа $G(K^p/K)$, где K^p — максимальное p-расширение поля K, т. е. объединение всех конечных расширений Галуа L/K с p-группами Галуа $G(L/K)$ в фиксированном сепарабельном замыкании поля K. 2) Если $\mathscr{C}$ — класс конечных разрешимых групп, K — поле, то $\mathfrak{G}^s(K) = \mathfrak{G}(K)/\mathscr{C}^{\#}(\mathfrak{G}(K))$ — группа Галуа максимального разрешимого расширения K^{solv}/K. 3) Для ФА-группы G и многообразия про-$\mathscr{C}$-групп группа $\widehat{G}^{\mathscr{C}}$ является про-$\mathscr{C}$-пополнением группы G, т. е. пополнением G в топологии нормальных подгрупп конечного индекса с факторгруппами из $\mathscr{C}$ (заметим, что эта топология не всегда хаусдорфова).

Замкнутая подгруппа H проконечной группы G называется *холловской*, если порядок $|H|$ и индекс $|G:H|$ взаимно просты. Для некоторого множества π простых чисел *π-холловской* подгруппой G называется такая холловская подгруппа H, что $\pi(H) \subseteq \pi$ и $|G:H|$ не делится ни на одно простое число из π. При $\pi = \{p\}$ π-холловские подгруппы называются p-силовскими.

Ясно, что π-холловские [p-силовские] подгруппы G являются максимальными про-π-подгруппами [про-p-подгруппами] в G.

Произвольная проконечная группа обладает p-силовскими подгруппами для каждого простого числа p. Любые две p-силовские подгруппы проконечной

группы G сопряжены в G. Любая про-p-подгруппа проконечной группы G содержится в некоторой p-силовской подгруппе.

Если p — простое число, π'_p — множество всех отличных от p простых чисел, то π'_p-холловская подгруппа называется иногда p-дополнением.

Проконечная группа G проразрешима, тогда и только тогда, когда G обладает p-дополнением для каждого простого числа p.

Произвольная проразрешимая группа обладает π-холловскими подгруппами для каждого множества π простых чисел. Любые две π-холловские подгруппы проразрешимой группы G сопряжены в G. Любая про-π-подгруппа проразрешимой группы G содержится в некоторой π-холловской подгруппе G.

Проконечная группа G пронильпотентна тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p ее p-силовская подгруппа является нормальной подгруппой.

Если G — пронильпотентная группа, то $G = \prod_p G_p$, где G_p есть p-силовская подгруппа G.

Если N — нормальная подгруппа проконечной группы G, являющаяся ее холловской подгруппой, то $G = N \rtimes H$ для $H \simeq G/N$, и все такие подгруппы H попарно сопряжены в G.

Подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ *проконечной группы* G называется пересечение всех максимальных замкнутых подгрупп G. Отметим, что произвольная замкнутая подгруппа группы G содержится в открытой максимальной подгруппе G. Для про-p-группы G имеем $\Phi(G) = G^p[G, G]$.

Подгруппа Фраттини проконечной группы пронильпотентна.

Если $H\Phi(G) = G$ для некоторой замкнутой подгруппы H группы G, то $H = G$.

Обозначим через $M(G)$ пересечение всех максимальных замкнутых нормальных подгрупп проконечной группы G.

Для произвольной проконечной группы G фактор-группа $G/M(G)$ изоморфна прямому произведению некоторого множества конечных простых групп.

Замкнутая подгруппа H проконечной группы G называется *достижимой*, если существует такой транс-

финитный ряд замкнутых подгрупп

$$G = K_1 \geqslant K_2 \geqslant \ldots \geqslant K_\sigma = H,$$

что $K_{\lambda+1} \leqslant K_\lambda$ для всех $\lambda < \sigma$ и $K_\mu = \bigcap_{\lambda<\mu} K_\lambda$ для любого предельного числа $\mu \leqslant \sigma$. Нетрудно видеть, что подгруппа H достижима в проконечной группе G тогда и только тогда, когда подгруппы HU субнормальны в G для всех открытых нормальных подгрупп U из G. Если H — достижимая замкнутая подгруппа проконечной группы G, то из $HM(G) = G$ вытекает $H = G$.

Определим когомологии проконечных групп. Пусть G — проконечная группа. Абелева группа A с дискретной топологией, на которой определено непрерывное действие группы G, называется *дискретным G-модулем*.

Эквивалентны следующие утверждения: (1) A — дискретный G-модуль, (2) $A = \bigcup_U A^U$, где $A^U = \{a \in A \mid ga = a$ для любого $g \in U\}$, а U пробегает множество открытых нормальных подгрупп группы G.

Примерами дискретных $G(L/K)$-модулей могут служить аддитивная L^+ и мультипликативная L^* группы поля L.

Рассматривая подмодули A^U дискретного G-модуля A как модули над конечными группами G/U, образуем для каждого $n \geqslant 0$ систему дискретных абелевых групп $H^n(G/U, A^U)$ — групп когомологий конечных групп G/U, где U пробегает множество $\mathfrak{U}$ открытых нормальных подгрупп G. Если $U \subseteq V$ — элементы из $\mathfrak{U}$, то естественный гомоморфизм G/U на G/V и вложение A^V в A^U определяют гомоморфизмы $H^n(G/V, A^V)$ в $H^n(G/U, A^U)$. В результате получается индуктивная система абелевых групп. Предел

$$H^n(G, A) = \varinjlim H^n(G/U, A^U)$$

этой системы называется *n-мерной группой когомологий проконечной группы G* с коэффициентами в дискретном G-модуле A.

Отображение, ставящее в соответствие каждому дискретному G-модулю A абелеву группу $H^n(G, A)$,

является функтором из категории дискретных G-модулей в категорию дискретных абелевых групп.

Пусть H — замкнутая подгруппа проконечной группы G, A — дискретный H-модуль. Дискретный G-модуль $M_G^H(A)$ определяется как множество таких непрерывных отображений $f\colon G \to A$, что $h \cdot f(g) = f(hg)$ для всех $h \in H$, $g \in G$, на котором операция сложения определена по формуле $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ для $g \in G$, а действие группы G — равенством $(g \cdot f)(x) = f(xg)$, $x \in G$.

В случае, когда H — единичная подгруппа, построенный модуль обозначается через $M_G(A)$ и называется *коиндуцированными*. В этом случае A — произвольная абелева группа.

Совокупность функторов $H^n(G, A)$, $n \geqslant 0$, из категории дискретных G-модулей в категорию абелевых групп обладает следующими свойствами и однозначно, с точностью до эквивалентности, определяется ими:

а) $H^0(G, A) = A^G$;

б) $H^n(G, A) = 0$ для всех $n \geqslant 1$ и произвольного коиндуцированного модуля A;

в) любой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ дискретных G-модулей соответствует точная когомологическая последовательность

$$\ldots \to H^n(G, A) \to H^n(G, B) \to H^n(G, C) \to H^{n+1}(G, A) \to \ldots$$

Если H — подгруппа проконечной группы G, A — дискретный H-модуль, то гомоморфизм $M_G^H(A) \to A$, $f \mapsto f(e)$, определяет изоморфизм групп когомологий $H^n(G, M_G^H(A)) \simeq H^n(H, A)$ для всех $n \geqslant 0$ (*лемма Шапиро*).

Скрещенным гомоморфизмом называется такое отображение $f\colon G \to A$, что $f(gh) = f(g) + g \cdot f(h)$. Отображения $g \mapsto g \cdot a - a$, где $a \in A$, называются *главными скрещенными гомоморфизмами*. Группа $H^1(G, H)$ изоморфна факторгруппе группы всех непрерывных скрещенных гомоморфизмов из G в A по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов.

Пусть A — периодический дискретный G-модуль, A_p — его p-примарная часть. Тогда $H^n(G, A) = \sum_p H^n(G, A_p)$ для всех $n \geqslant 0$.

Если G — про-π-группа, $p \notin \pi$ и дискретный G-модуль A является p-группой, то $H^n(G, A) = 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Пусть G — проконечная группа, p — простое число. Когомологической p-размерностью $\operatorname{cd}_p G$ группы G называется наименьшее число n такое, что $H^q(G, A) = 0$ для всех $q > n$ и произвольного дискретного G-модуля A, являющегося p-группой. Если такого числа n не существует, то $\operatorname{cd}_p G = \infty$. *Когомологической размерностью* $\operatorname{cd} G$ группы G называется $\sup(\operatorname{cd}_p G)$ по всем простым числам p.

Для проконечной группы G когомологическая p-размерность $\operatorname{cd}_p G \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $H^{n+1}(G, A) = 0$ для любого простого дискретного G-модуля A периода p.

Если G — про-p-группа, то единственным простым G-модулем периода p является тривиальный модуль $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Если H — замкнутая подгруппа проконечной группы G, то $\operatorname{cd}_p H \leqslant \operatorname{cd}_p G$ для любого простого p. Равенство имеет место, если индекс $|G : H|$ не делится на p или если группа G не имеет элементов порядка p, а подгруппа H открыта.

Отметим, что если в G есть элементы порядка p, то $\operatorname{cd}_p G = \infty$. Кроме того, $\operatorname{cd}_p G = \operatorname{cd} G_p$, где G_p есть p-силовская подгруппа группы G.

Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа проконечной группы G, $m = \operatorname{cd}_p N$ и $n = \operatorname{cd}_p(G/N)$ конечны. Тогда $\operatorname{cd}_p G \leqslant m + n$. Равенство имеет место, если N содержится в центре G или N — про-p-группа, а группа когомологий $H^m(N, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ конечна.

Пусть G — такая про-p-группа, что группы $H^q(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ конечны для всех $q = 0, 1, \ldots, n$. Положим

$$\chi_n(G) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} H^q(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

Неравенство $\operatorname{cd}_p G \leqslant n$ равносильно равенствам $\chi_n(U) = |G : U| \chi_n(G)$ для всех открытых подгрупп U группы G.

Если $n = \operatorname{cd}_p G$, то $\chi_n(G)$ называется *характеристикой Эйлера — Пуанкаре* про-p-группы G и обозначается $\chi(G)$.

Определим свободные проконечные группы. Отображение f множества X в проконечную группу G называется *сходящимся*, если для любой окрестности единицы U группы G множество $X\setminus f^{-1}(U)$ конечно.

Пусть класс про-$\mathscr{C}$-групп является многообразием. Про-$\mathscr{C}$-группа $F_{\mathscr{C}}$ называется *свободной про-$\mathscr{C}$-группой*, если она содержит такую систему порождающих X, что любое сходящееся отображение X в какую-либо про-$\mathscr{C}$-группу H продолжается до непрерывного гомоморфизма $F_{\mathscr{C}}$ в H. Система порождающих X часто называется *свободной базой* группы $F_{\mathscr{C}}$, а мощность X — ее рангом $\operatorname{rank} F_{\mathscr{C}}$.

Свободная про-$\mathscr{C}$-группа ранга 1 изоморфна группе $\prod\limits_p L_p = \hat{\mathbf{Z}}(\mathscr{C})$, где $L_p \simeq \mathbf{Z}_p$, если любая степень p делит порядок какой-либо группы из $\mathscr{C}$, или $L_p \simeq \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, где p^k — наибольшая из степеней p, делящих порядки групп из $\mathscr{C}$.

На абстрактной свободной группе $F(X)$ над X введем топологию с базисом системы окрестностей $\mathfrak{U}$, состоящим из таких нормальных подгрупп N, что $|F(X):N| < \infty$, $F(X)/N \in \mathscr{C}$ и N содержит почти все элементы из X. Тогда пополнение $F_{\mathscr{C}} = \varprojlim_{N \in \mathfrak{U}} F(X)/N$ является свободной про-$\mathscr{C}$-группой со свободной базой X.

Любая про-$\mathscr{C}$-группа G изоморфна факторгруппе свободной про-$\mathscr{C}$-группы F_C ранга $\operatorname{rank} F_C = d(G)$.

Про-$\mathscr{C}$-группа G изоморфна свободной про-$\mathscr{C}$-группе бесконечного ранга $\varkappa$ тогда и только тогда, когда для любой про-$\mathscr{C}$-группы A локального веса $w_0(A) < \varkappa$ и конечной нормальной подгруппы $K \leqslant A$ произвольный непрерывный гомоморфизм β группы G на A/K поднимается до гомоморфизма α группы G на A (т. е. $\varphi\alpha = \beta$ для естественного гомоморфизма A на A/K).

Конечно порожденная про-$\mathscr{C}$-группа G изоморфна свободной про-$\mathscr{C}$-группе конечного ранга n тогда и только тогда, когда $d(G) = n$ и любая конечная группа из $\mathscr{C}$ с n порождающими изоморфна некоторой факторгруппе G.

Примеры. 1) *Задача погружения* над полем K состоит из расширения Галуа L/K конечной степени и сюръективного гомоморфизма φ: $A \to G(L/K)$, где A — некоторая конечная группа. Ядро $\operatorname{Ker} \varphi$ часто называют *ядром задачи погружения.*

Решением задачи погружения является такое расширение Галуа M/K, что $M \supseteq L$, $G(M/K) \simeq A$ и при этом изоморфизме φ совпадает с гомоморфизмом ограничения $G(M/K) \to G(L/K)$.

Если группа Галуа $\mathfrak{G}^{\mathscr{C}}(K) = \mathfrak{G}(K)/\mathscr{C}^{\#}(\mathfrak{G}(K))$ максимального $\mathscr{C}$-расширения поля K удовлетворяет первой аксиоме счетности, то она является свободной про-$\mathscr{C}$-группой счетного ранга тогда и только тогда, когда над K разрешима любая задача погружения с группой A, принадлежащей классу $\mathscr{C}$.

2) Пусть $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ и $\mathbf{Q}^{\mathrm{solv}}$ — максимальные абелево и, соответственно, разрешимое расширения поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Тогда $G(\mathbf{Q}^{\mathrm{solv}}/\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}})$ — свободная проразрешимая группа счетного ранга.

3) Группа Галуа $\mathfrak{G}^{p}(K)$ максимального p-расширения произвольного поля K характеристики $p > 0$ является свободной про-p-группой.

4) Если K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $K(t)$ — поле рациональных функций над K, то абсолютная группа Галуа $\mathfrak{G}(K(t))$ — свободная проконечная группа ранга, равного мощности поля K.

Предположим, что класс $\mathscr{C}$ конечных групп замкнут относительно образования расширений, H — подгруппа свободной про-$\mathscr{C}$-группы $F_{\mathscr{C}}$ ранга $\varkappa$.

Если H открыта в $F_{\mathscr{C}}$, то H — свободная про-$\mathscr{C}$-группа, ранг которой равен $\varkappa$, если $\varkappa$ бесконечно, либо равен $|F_{\mathscr{C}} : H|(\varkappa - 1) + 1$, если $\varkappa$ конечно.

Если ранг $\varkappa$ бесконечен, но вес $w(F_{\mathscr{C}}/H)$ пространства смежных классов меньше $\varkappa$, то H — свободная про-$\mathscr{C}$-группа ранга $\varkappa$.

Если в предыдущей теореме класс $\mathscr{C}$ отличен от класса p-групп, то в свободных про-$\mathscr{C}$-группах существуют не свободные подгруппы (например, p-силовские подгруппы $F_{\mathscr{C}}$).

Про-p-группа G является свободной про-p-группой тогда и только тогда, когда $\mathrm{cd}_p\, G \leqslant 1$.

Любая замкнутая подгруппа H свободной про-p-группы F_p является свободной про-p-группой. Если индекс H в F_p бесконечен, то $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} F_p$, если $\operatorname{rank} F_p$ бесконечен, и $\operatorname{rank} H$ счетен, если $\operatorname{rank} F_p < \infty$.

Если про-p-группа G без кручения содержит открытую подгруппу, являющуюся свободной про-p-группой, то G — также свободная про-p-группа.

Пусть Ω — некоторое компактное кольцо с единицей. Чаще всего используются кольца $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел и их прямые произведения $\hat{\mathbf{Z}}_\pi = \prod\limits_{p \in \pi} \mathbf{Z}_p$ для некоторого множества π простых чисел, являющиеся соответственно про-p-пополнениями и про-π-

пополнениями кольца $\mathbf{Z}$ целых чисел. Проконечное пополнение $\mathbf{Z}$ обозначается через $\hat{\mathbf{Z}}$.

Для проконечной группы G *пополненное групповое кольцо* $\Omega[[G]]$ над Ω определяется как проективный предел системы обычных групповых колец $\Omega[G/U]$ конечных факторгрупп G/U группы G со связывающими гомоморфизмами $\Omega[G/U]$ на $\Omega[G/V]$ для $U \leqslant V$, индуцированными естественными гомоморфизмами G/U на G/V. При этом $\Omega[G/U]$ рассматриваются как компактные кольца, гомеоморфные прямому произведению $|G/U|$ экземпляров кольца Ω.

Пусть M — проконечная абелева группа, на которой задано непрерывное действие проконечной группы G. Если $\pi(M) \subseteq \pi$, то это действие продолжается до непрерывного действия кольца $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$, т. е. M является проконечным $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модулем.

Примером проконечного $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модуля может служить аддитивная группа кольца $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$. Этот модуль является свободным $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модулем ранга 1; его свободной порождающей служит единица e_G кольца $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$. Свободным $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модулем ранга $\varkappa$ называется прямое произведение $\prod\limits_{i \in I} \hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$ $\varkappa$ экземпляров свободного модуля ранга 1 (где $\varkappa = |I|$). Свободной базой так определенного свободного $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модуля является множество $\{e_i \mid i \in I\}$, где e_i — единица прямого сомножителя $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$ с индексом $i \in I$.

Предположим, что класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно образования расширений, $F_{\mathscr{C}}$ — свободная про-$\mathscr{C}$-группа со свободной базой X, $G = F_{\mathscr{C}}/R$ — ее факторгруппа.

Существует точная последовательность проконечных $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$-модулей

$$0 \to R/[R, R] \to \prod_{x \in X} \hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]] \to \hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]] \to \hat{\mathbf{Z}}_\pi \to 0,$$

где π — множество всех простых чисел, делящих порядки групп из $\mathscr{C}$, а действие группы G на $R/[R, R]$ индуцировано сопряжением в группе $F_{\mathscr{C}}$.

Факторгруппа $F_{\mathscr{C}}/[R, R]$ вкладывается в полупрямое произведение $M = \left(\prod\limits_{x \in X} \hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]\right) \rightthreetimes G$. Это вложение индуцировано гомоморфизмом $F_{\mathscr{C}}$ в M, переводящим $x \in X$ в элемент $(e_x, \bar{x})$, где e_x — единица

прямого сомножителя $\hat{\mathbf{Z}}_\pi[[G]]$ с индексом x, $\bar{x}$ — образ x в группе G.

В случае многообразия про-p-групп, к изучению копредставлений, т. е. заданий про-p-групп в виде факторгрупп свободных про-p-групп, может быть привлечена теория когомологий.

Пусть $G = F_p/R$, где F_p — свободная про-p-группа, $R \trianglelefteq F_p$. Системой соотношений G в этом копредставлении называется подмножество $S \subseteq R$, топологически порождающее R как нормальную подгруппу в F_p и такое, что произвольная окрестность единицы F_p содержит почти все элементы из S. Наименьшую из мощностей систем S соотношений обозначим через $d_{F_p}(R)$.

Копредставление $G = F_p/R$ называется *минимальным*, если $R \leqslant (F_p)^p[F_p, F_p]$. Если копредставление минимально, то rank $F_p = d(G)$; при $d(G) < \infty$ верно и обратное. Положим $r(G) = d_{F_p}(R)$ для минимального копредставления; $r(G)$ обычно называется числом соотношений про-p-группы G. Оно не зависит, как показывает следующее утверждение, от выбора минимального копредставления.

Для про-p-группы G справедливы следующие равенства:

$$d(G) = \dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} H^1(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$
$$r(G) = \dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} H^2(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

Если $G = F_p/R$, где F_p — свободная про-p-группа, то $\mathrm{cd}_p\, G \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда $R/[R, R]$ — свободный $\mathbf{Z}_p[[G]]$-модуль.

Про-$\mathscr{C}$-группа G называется *проективной* в многообразии про-$\mathscr{C}$-групп, если для каждой про-$\mathscr{C}$-группы A и нормальной подгруппы $N \leqslant A$ произвольный непрерывный гомоморфизм G в A/N поднимается до гомоморфизма G в A.

Для того чтобы G была проективной в многообразии про-$\mathscr{C}$-групп, достаточно выполнения сформулированного выше условия поднятия гомоморфизмов лишь для конечных A и абелевых нормальных подгрупп N, лежащих в подгруппе Фраттини $\Phi(A)$.

Про-$\mathscr{C}$-группа G проективна в многообразии про-$\mathscr{C}$-групп тогда и только тогда, когда она является

ретрактом некоторой свободной про-$\mathscr{C}$-группы $F_{\mathscr{C}}$, т. е. $F_{\mathscr{C}} \succ G$.

Примеры. 1) Абсолютная группа Галуа $\mathfrak{G}(K)$ поля K является проективной, если над K любая задача погружения с абелевым ядром имеет несобственное решение (решение в алгебрах Галуа). Из проективности $\mathfrak{G}(K)$ вытекает существование несобственного решения для любой задачи погружения над K. 2) Если алгебраическое расширение K поля $\mathbf{Q}$ содержит все корни из единицы, то группа $\mathfrak{G}(K)$ проективна.

Класс $\mathscr{C}$ конечных групп называется *насыщенным*, если для любой конечной группы K из $K/\Phi(K) \in \mathscr{C}$ вытекает $K \in \mathscr{C}$. Если класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно образования расширений, то он насыщен.

Проективность в многообразии про-$\mathscr{C}$-групп эквивалентна проективности в многообразии всех проконечных групп тогда и только тогда, когда класс $\mathscr{C}$ является насыщенным.

Проконечные группы, проективные в многообразии всех проконечных групп, называются просто *проективными*.

Пусть G — про-$\mathscr{C}$-группа, где $\mathscr{C}$ — некоторый насыщенный класс конечных групп. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) G — проективная группа;

(2) G изоморфна подгруппе свободной про-$\mathscr{C}$-группы;

(3) $\operatorname{cd} G \leqslant 1$;

(4) p — силовская подгруппа группы G является свободной про-p-группой для любого простого числа p.

Если G, H — две проективные группы и $G/\Phi(G) \simeq H/\Phi(H)$, то $G \simeq H$.

Для любой проконечной группы M с $\Phi(M) = E$ существует такая проективная группа G, что $G/\Phi(G) \simeq M$.

Для насыщенного многообразия про-$\mathscr{C}$-групп подгруппы свободных про-$\mathscr{C}$-групп классифицируются своими факторгруппами по подгруппе Фраттини. Однако эта классификация малоэффективна, так как необозрима совокупность проконечных групп с тривиальной подгруппой Фраттини.

Предположим, что класс $\mathscr{C}$ конечных групп замкнут относительно образования расширений. Пусть для проконечной группы G и конечной простой группы S $r_S(G)$ означает наибольшее из таких кардиналь-

ных чисел $\varkappa$, что G обладает факторгруппой, изоморфной $\prod^{\varkappa} S$. Если G, H — две достижимые подгруппы бесконечных индексов в свободной про-$\mathscr{C}$-группе $F_{\mathscr{C}}$ и $r_S(G) = r_S(H)$ для всех конечных простых групп S, то $G \simeq H$. Подгруппы конечных индексов в $F_{\mathscr{C}}$ являются свободными про-$\mathscr{C}$-группами.

Про-$\mathscr{C}$-группу G назовем *однородной*, если она бесконечна и для любой про-$\mathscr{C}$-группы A с $w_0(A) < w_0(G)$ и конечной нормальной подгруппы $K \leqslant A$, содержащейся в $M(A)$, произвольный непрерывный гомоморфизм G на A/K поднимается до непрерывного гомоморфизма G на A.

Если G, H — две однородные про-$\mathscr{C}$-группы, $w_0(G) = w_0(H)$, $G/M(G) \simeq H/M(H)$, то $G \simeq H$.

Для любого прямого произведения $V = \prod\limits_{i \in I} S_i$ где S_i — конечные простые группы, существует однородная про-$\mathscr{C}$-группа G произвольного локального веса $w_0(G) \geqslant |\Gamma|$ с факторгруппой $G/M(G) \simeq V$.

Нетривиальная про-$\mathscr{C}$-группа G изоморфна достижимой подгруппе бесконечного индекса в свободной про-$\mathscr{C}$-группе ранга $\varkappa$ тогда и только тогда, когда G однородна и $w_0(G) = \varkappa^+$. Здесь $\varkappa^+ = \varkappa$, если кардинальное число $\varkappa$ бесконечно и $\varkappa^+$ — мощность счетного множества, если $\varkappa$ конечно.

Однородная про-$\mathscr{C}$-группа G изоморфна замкнутой нормальной подгруппе бесконечного индекса свободной про-$\mathscr{C}$-группы тогда и только тогда, когда $c_{(p)}(G) = 0$ или $r_{C_{(p)}}(G) = w_0(G)$ для каждого простого числа p.

Если H — достижимая замкнутая подгруппа свободной про-$\mathscr{C}$-группы, то H содержит открытую нормальную подгруппу, изоморфную свободной про-$\mathscr{C}$-группе.

Если H — замкнутая нормальная подгруппа свободной про-$\mathscr{C}$-группы, то каждая собственная открытая нормальная подгруппа H изоморфна свободной про-$\mathscr{C}$-группе.

Подробнее об этих фактах см. Мельников О. В.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 1. — С. 3—25; Докл. АН БССР. — 1978. — Т. 22, № 8. — С. 677—680.

Введем свободные проконечные произведения. Пусть $\{G_i | i \in I\}$ — семейство групп из некоторого

многообразия про-$\mathscr{C}$-групп. Множество гомоморфизмов φ_i: $G_i \to H$, $i \in I$, где H — некоторая проконечная группа, называется сходящимся, если каждая открытая подгруппа H содержит образы $\varphi_i(G_i)$ для почти всех индексов $i \in I$.

Свободным про-$\mathscr{C}$-произведением множества групп $\{G_i \mid i \in I\}$ называется про-$\mathscr{C}$-группа $G = \mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{i \in I} G_i$ вместе со сходящимся множеством гомоморфизмов φ_i: $G_i \to G$, $i \in I$, удовлетворяющая следующему универсальному свойству: если ψ_i: $G_i \to H$, $i \in I$, — сходящееся множество гомоморфизмов в про-$\mathscr{C}$-группу H, то существует единственный гомоморфизм ω: $G \to H$, для которого $\psi_i = \omega\varphi_i$ при всех $i \in I$.

Свободное про-$\mathscr{C}$-произведение $\mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{i \in I} G_i$ можно получить как пополнение абстрактного произведения L множества групп G_i $i \in I$, в топологии, заданной системой таких нормальных подгрупп N группы L, что $|L : N| < \infty$, $L/N \in \mathscr{C}$, N содержит подгруппы G_i для почти всех $i \in I$ и $N \cap G_i$ открыто в исходной топологии на G_i для всех $i \in I$.

Гомоморфизмы φ_i групп G_i в свободное про-$\mathscr{C}$-произведение $\mathop{*}\limits_{i \in I} G_i$ инъективны; свободные сомножители G_i отождествляются обычно с подгруппами в $\mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{i \in I} G_i$, своими образами при φ_i.

Каждая свободная про-$\mathscr{C}$-группа $F_{\mathscr{C}}$ ранга $\varkappa$ является свободным произведением $\varkappa$ экземпляров свободных циклических про-$\mathscr{C}$-групп $\hat{\mathbf{Z}}(\mathscr{C})$. При этом свободные сомножители $F_{\mathscr{C}}$ совпадают с подгруппами $\langle \bar{x} \rangle$, где x пробегает некоторую свободную базу X группы $F_{\mathscr{C}}$.

Если H — открытая подгруппа свободного про-$\mathscr{C}$-произведения $G = \mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{i \in I} G_i$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно расширений, то H следующим образом представляется в виде свободного про-$\mathscr{C}$-произведения:

$$H = \Big(\mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{i \in I} \mathop{*^{\mathscr{C}}}\limits_{g \in S_i} H \cap gG_ig^{-1} \Big) *^{\mathscr{C}} F_{\mathscr{C}},$$

где для $i \in I$ подмножество $S_i \subseteq G$ является полной системой представителей двойных смежных классов G

по (H, G_i), $F_{\mathscr{C}}$ — свободная про-$\mathscr{C}$-группа конечного ранга, равного

$$\sum_{i \in I} (|G:H| - |G:(H, G_i)| - |G:H| + 1$$

(Gildenhuys D., Ribes L.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 186. — P. 309—329).

Пусть $G = \underset{i \in I}{*^{\mathscr{C}}} G_i$, класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно расширений, H_i — подгруппа G_i для каждого $i \in I$, H — подгруппа G, порожденная всеми H_i, $i \in I$. Тогда $H = \underset{i \in I}{*^{\mathscr{C}}} H_i$.

Если K — конечная подгруппа свободного про-$\mathscr{C}$-произведения $G = \underset{i \in I}{*^{\mathscr{C}}} G_i$, класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно расширений, то $K \leqslant gG_ig^{-1}$ для некоторых $i \in I$, $g \in G$. При этом если $K \cap hG_jh^{-1} \neq E$, то $j = i$, $h \in gG_i$.

Примеры. Пусть v — некоторое нормирование поля K. *Подгруппой разложения* $\mathfrak{G}_v$ над v называется подгруппа $\mathfrak{G}(K)$, состоящая из таких автоморфизмов сепарабельного замыкания K^{sep}, которые оставляют неизменными какое-либо фиксированное продолжение нормирования v на K^{sep}. Множество подгрупп разложений над заданным v представляет собой класс сопряженных подгрупп в $\mathfrak{G}(K)$.

1) Пусть K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $K(t)$ — поле рациональных функций над ним, Σ — множество всех дискретных K-нормирований поля $K(t)$, за исключением одного (выбранного произвольным образом). Тогда над каждым $v \in \Sigma$ можно выбрать подгруппу разложения $\mathfrak{G}_v$ в $\mathfrak{G}(K)$ так, что $\mathfrak{G}(K) = \underset{v \in \Sigma}{*} \mathfrak{G}_v$ — свободное проконечное произведение.

2) Пусть K — некоторое *гильбертово поле*, т. е. поле, для которого справедлива теорема Гильберта о неприводимости. Среди гильбертовых полей находятся поле $\mathbf{Q}$, поле $K'(t)$ рациональных функций над произвольным полем K', а также их конечные расширения. Предположим, что в $\mathfrak{G}(K)$ выбрано конечное множество подгрупп разложений $\mathfrak{G}_{v_1}, \mathfrak{G}_{v_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{v_n}$, где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — нормирования K, не обязательно различные. Тогда в произвольно заданной окрестности единицы U группы $\mathfrak{G}(K)$ существуют такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что подгруппа $\mathfrak{G}(K)$, порожденная подгруппами $x_1\mathfrak{G}_{v_1}x_1^{-1}, x_2\mathfrak{G}_{v_2}x_2^{-1}, \ldots$ $\ldots, x_n\mathfrak{G}_{v_n}x_n^{-1}$, является их свободным проконечным произведением.

Рассмотрим специальные классы про-p-групп. *Аналитической p-адической группой* называется

множество G, являющееся одновременно группой и аналитическим пространством над полем $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел, если групповая операция $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ определяет аналитическое отображение $G \times G \to G$. Размерность аналитического пространства G над $\mathbf{Q}_p$ будем называть *p-адической размерностью* G. Каждая аналитическая p-адическая группа является локально компактной вполне несвязной топологической группой.

Примеры. 1) Полная линейная группа $GL(n, \mathbf{Q}_p)$ и ее замкнутые подгруппы — аналитические p-адические группы.

2) Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два набора из n переменных. Набор $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ формальных степенных рядов $F_i \in \mathbf{Z}_p[[X, Y]]$ от $2n$ переменных называется формальной группой над $\mathbf{Z}_p$ размерности n, если $F(X, 0) = X$, $F(0, Y) = Y$, $F(U, F(V, W)) = F(F(U, V), W)$.

Стандартная аналитическая p-адическая группа размерности n определяется как пространство

$$G = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_p \mid a_i \in p\mathbf{Z}_p\right\}$$

с операцией умножения, заданной по формуле $gh = F(g, h)$, $g, h \in G$. Единицей этой группы является элемент $(0, 0, \ldots, 0)$, и существует такой набор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ формальных степенных рядов $\varphi_i \in \mathbf{Z}_p[[X]]$, что $g \longmapsto \varphi(g)$ — операция обращения в группе G.

Стандартная аналитическая p-адическая группа является про-p-группой без кручения. Каждая аналитическая p-адическая группа содержит открытую подгруппу, являющуюся стандартной. Тем самым изучение аналитических p-адических групп сводится к изучению аналитических про-p-групп.

Следующие утверждения о про-p-группе G эквивалентны:

(1) G — аналитическая p-адическая группа.

(2) Группа G конечно порождена и существует такая открытая подгруппа U, что коммутант $[U, U]$ содержится в множестве $U^{p^2} = \{h^{p^2} \mid h \in U\}$.

(3) Существует такое $n < \infty$, что $d(U) \leqslant n$ для любой открытой подгруппы U из G. В этом случае $d(H) \leqslant n$ для всех подгрупп H из G.

Если G — аналитическая p-адическая группа, то ее подгруппы и факторгруппы также являются аналитическими p-адическими группами.

Пусть G — топологическая группа $N \leqslant G$. Если N и G/N — аналитические p-адические группы p-адических размерностей m и n соответственно, то G — ана-

литическая p-адическая группа p-адической размерности $m+n$.

Если G — компактная p-адическая аналитическая группа, то ее группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ — также аналитическая p-адическая группа.

Если G — аналитическая про-p-группа, то $r(G) > \dfrac{d(G)^2}{4}$ (*теорема Голода — Шафаревича*).

Эта теорема (в ее первоначальном варианте с конечной p-группой) была доказана для получения отрицательного решения проблемы башни полей классов, которая эквивалентна следующему вопросу: можно ли для всякого расширения поля $\mathbf{Q}$ конечной степени найти содержащее его расширение K поля $\mathbf{Q}$ конечной степени с числом классов $h_K = 1$?

Про-p-группа G называется *группой Пуанкаре размерности* n, если:

а) $\operatorname{cd}_p G = n$;

б) группы $H^q(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ конечны для всех q и $H^n(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$;

в) *кап-произведение*

$$\cup\colon H^q(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times H^{n-q}(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$$

является для любого $q \leqslant n$ невырожденной билинейной формой над полем из p элементов. Аналитическая про-p-группа G без кручения является группой Пуанкаре размерности, равной p-адической размерности G.

Группы Пуанкаре размерности 2 известны как *группы Демушкина*. Так как для групп Демушкина $H^2(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, то они являются про-$p$-группами с одним определяющим соотношением. Определяющие соотношения групп Демушкина полностью вычислены.

Пусть группа Демушкина G представлена в виде $G = F_p/R$, где F_p — свободная про-p-группа ранга $n = d(G)$, R — нормальная подгруппа F_p, порожденная элементом r. Факторгруппа $G/[G, G]$ изоморфна $(\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p) \times \prod_{i=2}^{n} \mathbf{Z}_p$, где $q = p^m$, $0 < m \leqslant \infty$. Тогда в F_p существует такая свободная база $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что:

1) при $q \neq 2$ число n четно и

$$r = x_1^q [x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{n-1}, x_n];$$

2) при $q=2$ и нечетном n

$$r = x_1^2 x_2^{2^f} [x_2, x_3] [x_4, x_5] \ldots [x_{n-1}, x_n], \text{ где } 2 \leqslant f \leqslant \infty;$$

3) при $q=2$ и четном n

$$r = x_1^{2+2^f} [x_1, x_2] [x_3, x_4] \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

или

$$r = x_1^2 [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \ldots [x_{n-1}, x_n],$$

где $2 \leqslant f \leqslant \infty$.

Примерами групп Демушкина являются группы Галуа $\mathfrak{G}^p(K)$ максимальных p-расширений конечных расширений K поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, содержащих первообразный корень p-й степени из единицы. При этом числа n, q и f, фигурирующие в предыдущем утверждении, имеют интерпретацию в терминах поля K; в частности, $n = |K:\mathbf{Q}_p| + 2$.

Для конечно порожденной про-p-группы G с числом образующих $d(G) \geqslant 2$ и одним определяющим соотношением эквивалентны следующие утверждения:

(а) G — группа Демушкина;

(б) $r(U) = 1$ для любой открытой подгруппы U группы G;

(в) $d(U) = |G:U|\,(d(G) - 2) + 2$ для любой открытой подгруппы подгруппы U группы G.

3.4. Упорядоченные группы. Множество G, являющееся одновременно группой и частично упорядоченным множеством, называется *упорядоченной группой* (у. группой), если для любых элементов x, y, z, t из G выполнена аксиома однородности: неравенство $x \leqslant y$ влечет неравенство $txz \leqslant tyz$. Дополнительные ограничения на частичный порядок $\leqslant$ выделяют следующие основные классы у. групп:

а) *линейно упорядоченные группы* (л. у. группы) — класс у. групп, для которых отношение $\leqslant$ является отношением линейного порядка;

б) *решеточно упорядоченные группы* — класс у. групп, для которых частично упорядоченное множество является решеткой;

в) *направленные группы* — класс у. групп, в которых для любых элементов x, y из группы найдется элемент z такой, что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$.

Примеры. 1) Аддитивная группа $\mathbf{R}$ поля действительных чисел с традиционным отношением порядка является л. у. группой. 2) Обозначим через F_X совокупность всех действительно-

значных функций на множестве X. Естественным способом определим на F_X операцию сложения функций, а отношение частичного порядка определим правилом: $f \leqslant g$, $f, g \in F_X$, тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всякого x из X. Полученная структура на F_X является решеточно упорядоченной группой. 3) Пусть X — произвольное линейно упорядоченное множество. Обозначим через $A(X)$ множество всех автоморфизмов X, т. е. взаимооднозначных отображений X на себя, сохраняющих порядок. Зададим на $A(X)$ структуру решеточно упорядоченной группы. Для любых φ, ψ из $A(X)$ групповую операцию определяем как суперпозицию φ и ψ, т. е. $(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$, $x \in X$, а отношение частичного порядка определяем так: $\varphi \leqslant \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$. Эта у. группа называется решеточно упорядоченной группой автоморфизмов линейно упорядоченного множества X. 4) Свободная группа F ранга $\geqslant 2$ допускает структуру л. у. группы многими способами. Приведем один из них. Пусть $F = \gamma_1 F \geqslant \gamma_2 F \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n F \geqslant \geqslant \gamma_{n+1} F \geqslant \ldots$ — нижний центральный ряд группы F. Тогда факторы $\gamma_n F/\gamma_{n+1} F$ являются свободными абелевыми группами и при естественном ограничении на ранг F могут быть вложены в $\mathbf{R}$ с естественным порядком. Зафиксируем линейный порядок $P(\gamma_n F/\gamma_{n+1} F)$, $n = 0, 1, \ldots$ Группа F становится л. у. группой, если положить $x \in P(F) \Leftrightarrow x\gamma_{n+1} F \in P(\gamma_n F/\gamma_{n+1} F)$ при условии, что $x \in \gamma_n F \setminus \gamma_{n+1} F$ (определение $P(G)$ см. ниже).

Элемент g у. группы G называется *положительным* (*неотрицательным*), если $g > 1$ (соответственно $g \geqslant 1$). Множество $P(G)$ положительных элементов у. группы G называется *положительным конусом* и обладает следующими свойствами:

1) $P(G) \cdot P(G) \leqslant P(G)$,

2) $P(G) \cap P(G)^{-1} = \varnothing$,

3) $xP(G)x^{-1} \leqslant P(G)$ для всех x из G.

Если G — л. у. группа, то, кроме того, выполнено условие

4) $G = P(G) \cup P(G)^{-1} \cup \{1\}$.

Если G — направленная группа, то выполнены условия 1)—3), а также

5) $G = P(G) \cdot P(G)^{-1}$.

Обратно, если в группе G имеется подмножество P, удовлетворяющее условиям 1)—3), то G можно превратить в у. группу, полагая $x < y$ тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in P$. При так определенном порядке оказывается, что $P(G) = P$. Если, кроме того, множество P удовлетворяет условию 4), то G — л. у. группа,

а если — условию 5), то G — направленная группа. Следовательно, можно отождествлять порядок у. группы с ее положительным конусом.

Если G — у. группа, H — ее подгруппа, то H сама является у. группой относительно индуцированного с G порядка, причем $P(H) = H \cap P(G)$. Подгруппа H у. группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов x, y, z из G таких, что $x \leqslant y \leqslant z$ и $x, z \in H$, выполнено $y \in H$. У. подгруппы у. группы $\mathbb{R}$ будем называть *действительными группами*.

Групповые гомоморфизмы в категории у. групп, сохраняющие порядок, называются *порядковыми гомоморфизмами*. Если G, H — у. группы и φ: $G \to H$ — групповой гомоморфизм, то φ оказывается порядковым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда $\varphi(P(G)) \leqslant P(H)$. Изоморфизм (автоморфизм) являющийся порядковым гомоморфизмом, называется порядковым изоморфизмом (автоморфизмом). Ядро порядкового гомоморфизма у. группы является выпуклой нормальной подгруппой.

Если в у. группе G имеется выпуклая нормальная подгруппа N, то факторгруппу G/N можно превратить в у. группу, положив $xN \leqslant yN$ тогда и только тогда, когда в N найдется такой элемент z, что $x \leqslant yz$. Для у. групп справедлива теорема о гомоморфизмах: если φ — порядковый гомоморфизм G на H с ядром N, то существует порядковый изоморфизм ψ у. группы G/N на H такой, что $\varphi = \psi\varepsilon$, где ε — естественный гомоморфизм $G \to G/N$.

Декартовым произведением у. групп $\{G_i, i \in I\}$ называется у. группа $\bar{G} = \overline{\prod\limits_{i \in I}} G_i$, являющаяся декартовым произведением групп G_i, с функциональным порядком: $f \leqslant g$ для $f, g \in \bar{G}$ тогда и только тогда, когда $f(i) \leqslant g(i)$ для всех $i \in I$. *Прямым произведением у. групп* $\{G_i, i \in I\}$ называется у. подгруппа $G = \prod\limits_{i \in I} G_i \leqslant \overline{\prod\limits_{i \in I}} G_i$.

Если множество индексов I вполне упорядочено и $\{G_i, i \in I\}$ — семейство у. групп, то на декартовом произведении $\overline{\prod\limits_{i \in I}} G_i$ можно ввести *лексикографический порядок*, полагая $f < g$ тогда и только тогда, когда $f \neq g$ и существует такой элемент $i \in I$, что

$f(i) < g(i)$ и $f(j) = g(j)$ для всех $j < i$. Этот порядок превращает группу $\prod_{i \in I} G_i$ в у. группу, называемую *лексикографическим произведением* семейства у. групп $\{G_i, i \in I\}$. Эта группа обозначается через $\overrightarrow{\prod_{i \in I}} G_i$.

Пусть абстрактная группа G содержит нормальную у. подгруппу N и факторгруппа G/N является также у. группой, причем $y^{-1}xy \in P(N)$ для любого x из $P(N)$ и любого y из G. Тогда G можно превратить в у. группу, полагая $x > 1$, если $xN \in P(G/N)$ или $x \in N$ и $x \in P(N)$. При таком определении порядка на G группа N оказывается выпуклой подгруппой у. группы G, $P(G) \cap N = P(N)$ и положительный конус у. факторгруппы G/N совпадает с $P(G/N)$. Если N есть решеточно упорядоченная группа и G/N — л.у. группа, то G оказывается решеточно упорядоченной группой. Если N и G/N — л.у. группы, то такой же оказывается и G.

Всякая л.у. группа G является группой без кручения. Более того, если $S(x)$ — наименьшая нормальная полугруппа, содержащая $x \in G$, $x \neq 1$, то $1 \notin S(x)$. Последнее свойство является необходимым, но не достаточным для возможности введения на группе порядка, превращающего ее в л.у. группу. Введение такого порядка допускают любые абелевы группы без кручения, любые нильпотентные группы без кручения, или, более общо, группы, аппроксимируемые нильпотентными группами без кручения, а также свободные, свободные разрешимые, свободные полинильпотентные группы.

Класс групп, допускающих превращение в л. у. группу, замкнут относительно подгрупп, а также прямых, декартовых и свободных произведений.

Если G — л. у. группа, то множество $\Sigma(G)$ ее выпуклых подгрупп обладает следующими свойствами:

1) $\{1\} \in \Sigma(G)$, $G \in \Sigma(G)$;

2) множество $\Sigma(G)$ линейно упорядочено по включению;

3) $\Sigma(G)$ — полное множество, т. е. для любого множества $\{H_i, i \in I\}$ подгрупп из $\Sigma(G)$, $\bigcap_{i \in I} H_i \in \Sigma(G)$, $\bigcup_{i \in I} H_i \in \Sigma(G)$;

4) если A и B — соседи в $\Sigma(G)$, то их нормализаторы $N(A)$ и $N(B)$ совпадают, $A \lhd B$, B/A — абелева группа без кручения, $[[N(A), N(A)], B] \leqslant A$;

5) если $x \in G$, $A \in \Sigma(G)$ и $x(g_1^{-1}xg_1)\ldots(g_n^{-1}xg_n) \in A$, то $x \in A$;

6) если A и B — соседи в $\Sigma(G)$, то у. группа B/A порядково изоморфна некоторой действительной группе.

Обратно, если в группе G имеется система подгрупп $\Sigma^*(G)$, удовлетворяющая условиям 1) — 6), то G можно превратить в л. у. группу, таким образом, что $\Sigma^*(G)$ будет множеством (не обязательно всех) выпуклых подгрупп л. у. группы G.

На группе G тогда и только тогда можно ввести порядок, превращающий ее в л. у. группу, когда для любого конечного набора неединичных элементов $x_1, \ldots, x_n$ найдется такой набор чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_i = \pm 1$ при $i = 1, \ldots, n$), что $1 \notin S(x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n})$. Отсюда, вытекает, что класс групп, допускающих превращение в л. у. группы, является квазимногообразием.

Архимедовой называется такая у. группа G, в которой для любых элементов x, y из G из того, что $x^n < y$ для всех $n \in \mathbf{Z}$ следует $x < 1$. Для л. у. группы это эквивалентно следующему: для любых $x > 1$, $y > 1$ из G найдутся такие натуральные числа m, n, что $x^m > y$ и $y^n > x$. Л. у. группа G является архимедовой тогда и только тогда, когда в ней нет собственных выпуклых подгрупп. Описание архимедовых л. у. групп дается классической *теоремой Гельдера*: л. у. группа тогда и только тогда является архимедовой, когда она порядково изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы поля действительных чисел с естественным порядком, т. е. является действительной группой.

Группа G называется *доупорядочиваемой*, если каждый ее частичный порядок может быть продолжен до линейного порядка. Группа G является доупорядочиваемой тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) если $1 \neq x \in G$, то $1 \notin S(x)$;

2) если $x, y, z \in G$, $x \neq 1$ и $y, z \in S(x)$, то $S(y) \cap S(z) \neq \varnothing$.

Всякая абелева группа без кручения и всякая нильпотентная группа без кручения являются доупорядочиваемыми группами. Свободная группа ранга $\geqslant 2$ недоупорядочиваема. Класс доупорядочиваемых групп замкнут относительно прямых произведений, локально замкнут, но не замкнут относительно подгрупп и декартовых произведений.

Всякую л. у. группу G можно превратить в топологическую группу, если в качестве предбазы окрестностей единицы G взять множество открытых интервалов $\langle x^{-1}, x\rangle = \{y \in G \mid x^{-1} < y < x\}$, $x \in P(G)$. Эту топологию называют *интервальной*. В интервальной топологии л. у. группа G является локально связной и локально компактной тогда и только тогда, когда в G имеется наименьшая выпуклая подгруппа, порядково изоморфная аддитивной группе $\mathbf{R}$ с естественным порядком.

Л. у. группа G называется *топологически полной*, если всякая ее фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу из G. Всякая л. у. группа допускает порядковый изоморфизм на подгруппу топологически полной л. у. группы.

Решеточно упорядоченные группы называются также *l-группами* (lattice — «решетка»). В l-группе для любых ее двух элементов x, y существует их точная нижняя грань $x \wedge y$, называемая *пересечением элементов*, и их точная верхняя грань $x \vee y$, называемая *объединением элементов*, причем выполнены соотношения:

$$x \wedge y \leqslant x, \quad x \wedge y \leqslant y,$$
$$x \leqslant x \vee y, \quad y \leqslant x \vee y,$$
$$\text{если } u \leqslant x,\ u \leqslant y, \quad \text{то } u \leqslant x \wedge y,$$
$$\text{если } x \leqslant v,\ y \leqslant v, \quad \text{то } x \vee y \leqslant v.$$

Во всякой l-группе G справедливы следующие утверждения:

а) $\langle G; \cdot\rangle$ — группа;

б) $\langle G; \vee, \wedge\rangle$ — решетка;

в) для произвольных элементов x, y, z, t из G

$$x(y \wedge z)t = xyt \wedge xzt, \quad x(y \vee z)t = xyt \vee xzt.$$

Верно и обратное, если алгебраическая система G сигнатуры $l = \langle \cdot, {}^{-1}, 1, \wedge, \vee\rangle$ удовлетворяет аксиомам

а)—в), то она является решеточно упорядоченной группой относительно частичного порядка: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \wedge y = x$ (или, что то же самое, $x \vee y = y$). Так как аксиомы а)—в) записываются в развернутом виде тождествами сигнатуры l, то можно говорить о многообразии решеточно упорядоченных групп.

Во всякой l-группе тождественно выполняются следующие равенства:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$(x \vee y)^{-1} = x^{-1} \wedge y^{-1}, \quad (x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \vee y^{-1},$$

$$x (x \wedge y)^{-1} y = x \vee y, \quad x (x \vee y)^{-1} y = x \wedge y.$$

Первые два из этих тождеств показывают, что решетка произвольной l-группы является дистрибутивной.

Всякий элемент x l-группы G определяет следующую тройку элементов: $x^+ = x \vee 1$ — *положительная часть* элемента x, $x^- = x \wedge 1$ — *отрицательная часть* элемента x, $|x| = x \vee x^{-1}$ — *модуль* элемента x. В произвольной l-группе выполнены следующие соотношения:

$$x = x^+x^-, \quad x^+x^- = x^-x^+, \quad x^+ \wedge (x^-)^{-1} = 1,$$

$$(xy)^+ = x (x \wedge y^{-1})^{-1}, \quad (xy)^+ \leqslant x^+y^+,$$

$$(x^n)^+ = (x^+)^n, \quad (x^n)^- = (x^-)^n,$$

$$|x| = x^+ (x^-)^{-1}, \quad |x^n| = |x|^n, \text{ при } n \geqslant 0,$$

$$|xy| \leqslant |x||y||x|, \text{ если } xy = yx, \text{ то } |xy| \leqslant |x||y|,$$

$$|xy^{-1}| = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1},$$

$$|x \vee y| \leqslant |x| \vee |y| \leqslant |x||y|.$$

Элементы x, y l-группы называются *ортогональными* (в обозначениях $x \perp y$), если $|x| \wedge |y| = 1$. Ортогональные элементы l-группы перестановочны, и если $x \perp y$, то $|x| \vee |y| = |x||y|$. Во всякой l-группе G справедлива лемма о разложении: если $x, y_1, \ldots, y_n \in P(G)$ и $x \leqslant y_1 y_2 \ldots y_n$, то в G найдутся элементы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такие, что $1 \leqslant z_i \leqslant y_i$, при $i = 1, 2, \ldots, n$, и $x = z_1 z_2 \ldots z_n$.

Подгруппа H l-группы G называется *l-подгруппой*, если $x \vee y \in H$ и $x \wedge y \in H$ для любых $x, y \in H$. Всякая l-подгруппа H l-группы G является l-группой относительно порядка, индуцированного на H порядком G. Множество выпуклых l-подгрупп l-группы G является полной дистрибутивной подрешеткой решетки всех подгрупп G.

Наряду с понятием порядкового гомоморфизма в теории l-групп широко применяется понятие *l-гомоморфизма*, т. е. такого отображения l-групп, которое сохраняет все операции сигнатуры $l = \langle \cdot, ^{-1}, 1, \vee, \wedge \rangle$. Взаимнооднозначный l-гомоморфизм l-групп называется *l-изоморфизмом.*

Ядром l-гомоморфизма $\varphi: G \to H$ является выпуклая нормальная l-подгруппа в G. Последняя называется также *l-идеалом*. Факторгруппа G/N l-группы G по ее l-идеалу N является l-группой и естественный гомоморфизм G на G/N является l-гомоморфизмом.

Определим спрямляющие подгруппы и поляры. Если H — выпуклая l-подгруппа l-группы G, то множество правых смежных классов G/H является решеткой относительно порядка: $Hx \leqslant Hy$ в G/H тогда и только тогда, когда найдется такой элемент z из H, что $x \leqslant zy$. Выпуклая l-подгруппа H l-группы G называется *спрямляющей l-подгруппой*, если множество G/H линейно упорядочено. Выпуклая l-подгруппа H l-группы G является спрямляющей тогда и только тогда, когда множество выпуклых l-подгрупп G, содержащих H, линейно упорядочено по включению. Всякая выпуклая l-подгруппа любой l-группы является пересечением спрямляющих подгрупп.

Если G есть l-группа и $X \subseteq G$, то множество $X^{\perp} = \{y \in G \mid |y| \wedge |x| = 1$ для всякого $x \in X\}$ является выпуклой l-подгруппой и называется *полярой* множества X. Множество всех поляр l-группы является полной булевой алгеброй относительно включения, но не всегда является подрешеткой решетки выпуклых l-подгрупп. Для поляр в l-группе выполнены соотношения:

$$X^{\perp\perp\perp} = X^{\perp}, \quad \text{если} \quad X \subseteq G,$$

$$X^{\perp} \leqslant Y^{\perp}, \quad \text{если} \quad Y \subseteq X \subseteq G.$$

У. группы, приведенные в примерах 1)—4) на с. 224—225, являются l-группами. Особую роль в теории l-групп играет группа $A(X)$ автоморфизмов л. у. множества X. Если $f, g \in A(X)$, то $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$ и $(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$ для любого $x \in X$.

Всякий l-гомоморфизм l-группы G в l-группу $A(X)$ называется l-представлением.

Всякая l-группа имеет точное l-представление в l-группу $A(X)$ автоморфизмов подходящего л. у. множества X (*теорема Холланда*).

Важнейшими подмногообразиями многообразия всех l-групп являются следующие:

$l\mathfrak{A}$ — *многообразие абелевых l-групп*,

$l\mathfrak{O}$ — *многообразие линейно аппроксимируемых групп*, задаваемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee 1 = 1$,

$l\mathfrak{B}$ — *многообразие нормальнозначных l-групп*, задаваемое тождеством $|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|$,

$l\mathfrak{R}$ — *многообразие жестких l-групп*, задаваемое тождеством $x^{-1}|y|x|y|^{-2} \vee 1 = 1$.

Многообразие $l\mathfrak{O}$ совпадает с классом всех l-групп, являющихся l-подгруппами декартовых произведений линейно упорядоченных групп; следовательно, $l\mathfrak{O}$-группы аппроксимируются л. у. группами. Всякая локально нильпотентная l-группа содержится в $l\mathfrak{O}$.

Многообразие $l\mathfrak{B}$ состоит из всех тех l-групп G, в которых для любой пары (A, B) выпуклых l-подгрупп, где A и B — соседи, выполнено $A \triangleleft B$. Это многообразие отлично от многообразия всех l-групп, но содержит любое собственное подмногообразие l-групп.

Многообразие $l\mathfrak{R}$ состоит из всех тех групп, которые обладают центральной системой подгрупп с факторами без кручения.

Множество всех многообразий l-групп является полной дистрибутивной решеткой континуальной мощности.

Упорядоченная группа G называется *порядково полной*, если каждое непустое ограниченное сверху подмножество X из G имеет в G точную верхнюю грань. Всякая порядково полная у. группа является абелевой. Произвольная архимедова l-группа вкладывается в некоторую порядково полную l-группу, и следовательно, абелева. Во всякой l-группе G имеется ар-

химедово ядро $A_r(G)$, т. е. l-идеал, содержащий все архимедовы выпуклые l-подгруппы G.

Группа G, на которой задано отношение линейного порядка $\leqslant$, называется *правоупорядоченной*, если неравенство $x \leqslant y$ в G влечет неравенство $xg \leqslant yg$ для любого $g \in G$. Конус $P(G)$ положительных элементов правоупорядоченной группы обладает свойствами:

а) $P \cdot P \leqslant P$;

б) $P \cap P^{-1} = \varnothing$;

в) $P \cup P^{-1} \cup \{1\} = G$.

Во всякой l-группе G конус $P(G)$ есть пересечение некоторого множества правых порядков. Более того, у. группа G тогда и только тогда порядково изоморфна некоторой подгруппе l-группы, когда $P(G)$ есть пересечение некоторых правых порядков группы G.

Упорядоченная группа называется *группой Рисса*, если она удовлетворяет интерполяционному свойству: для любых элементов x_1, x_2, y_1, y_2 из G таких, что $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2$, найдется такой элемент z, что $x_i \leqslant z \leqslant y_i$, $i = 1, 2$. Группы Рисса часто встречаются в функциональном анализе.

Всякая l-группа является группой Рисса. В направленных группах Рисса справедливы многие утверждения, верные для l-групп, например, лемма о разложении, теорема о дистрибутивности решетки выпуклых нормальных подгрупп.

§ 4. Разное

4.1. Группы автоморфизмов. Факторгруппа группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ по подгруппе внутренних автоморфизмов $\operatorname{Inn} G$ называется *группой внешних автоморфизмов* группы G и обозначается через $\operatorname{Out} G$. Имеет место короткая точная последовательность

$$E \to \operatorname{Inn} G \xrightarrow{\iota} \operatorname{Aut} G \xrightarrow{\lambda} \operatorname{Out} G \to E,$$

где ι — вложение, λ — естественный гомоморфизм. Кроме того, существует короткая точная последовательность

$$E \to C(G) \xrightarrow{\varkappa} G \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Inn} G \to E,$$

где $\varkappa$ — вложение, σ — гомоморфизм, сопоставляющий произвольному элементу $g \in G$ внутренний автоморфизм $\sigma_{g^{-1}}\colon f \mapsto g^{-1} f g$, $f \in G$.

Группа G называется *совершенной*, если $C(G)=E$ и $\mathrm{Out}\,G=E$. В этом случае $G\simeq\mathrm{Inn}\,G=\mathrm{Aut}\,G$.

Группа $\mathrm{Aut}\,G$ является подгруппой группы $\mathrm{Symm}(G)$ и, следовательно, если G — конечная группа порядка n, то $\mathrm{Aut}\,G$ также конечна и $|\mathrm{Aut}\,G|\leqslant n!$. Группа $\mathrm{Aut}\,G$ может оказаться конечной и в случае, когда сама группа G бесконечна. Например, $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}\simeq\simeq\mathbf{Z}(2)$. Хорошо известно, что факторгруппа $G/C(G)$ неабелевой группы G всегда нециклична.

Примеры. 1) Группа автоморфизмов свободной абелевой группы $A_n=F_n(\mathfrak{A})\simeq\mathbf{Z}^n$ ранга n изоморфна группе $GL(n,\mathbf{Z})$. Группа автоморфизмов элементарной абелевой p-группы $A_n(p)$ ранга n (т. е. группы $A_n(p)\simeq\underbrace{\mathbf{Z}(p)\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}(p)}_{n}=\mathbf{Z}(p)^n$), которую можно рассматривать как векторное пространство размерности n над полем из p элементов, изоморфна группе $GL(n,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. В общем случае группа автоморфизмов (невырожденных линейных преобразований) векторного пространства V размерности n над полем P есть группа $GL(n,P)$. 2) Пусть $\mathbf{Z}(n)=\langle g\rangle$ — циклическая группа. Отображение $g\to g^k$, $1\leqslant\leqslant k\leqslant n-1$, однозначно продолжается до автоморфизма α_k группы $\mathbf{Z}(n)$ тогда и только тогда, когда $(k,n)=1$. Отображение $k+n\mathbf{Z}\longmapsto\alpha_k$ при $(k,n)=1$ определяет изоморфизм из мультипликативной группы $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ кольца вычетов по модулю n на группу $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}(n)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}(n)$ — абелева группа порядка $\varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

Для $N\trianglelefteq G$ через $\mathrm{Aut}(G,N)$ обозначим группу всех автоморфизмов группы G, оставляющих N инвариантной и индуцирующих тождественное отображение в факторгруппе G/N. Через $\mathrm{Stab}(G,N)\leqslant\leqslant\mathrm{Aut}(G,N)$ обозначим подгруппу всех автоморфизмов действующих тождественно на N и G/N, называемую *группой стабильных автоморфизмов*. Группа $\mathrm{Cent}\,G\underset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Aut}(G,C(G))$ называется *группой центральных*, а группа $\mathrm{IAut}\,G\underset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Aut}(G,G')$ — *группой* IA-*автоморфизмов* группы G.

Любой автоморфизм $\alpha\in\mathrm{Aut}\,G$ индуцирует автоморфизм $\bar\alpha\in\mathrm{Aut}\,G/N$, если N — автоморфно допустимая подгруппа группы G. В частности, группа $\mathrm{Aut}\,F$ автоморфизмов свободной группы F гомоморфно отображается в любую группу $\mathrm{Aut}\,F(\mathfrak{C})$, где $F(\mathfrak{C})==F/V(F)$ — свободная группа многообразия $\mathfrak{C}==\mathfrak{B}(V)$.

Конечно порожденная и финитно аппроксимируемая группа G является хопфовой группой. В этом

случае группа $\operatorname{Aut} G$ также финитно аппроксимируемая (но не всегда конечно порождена).

Заметим, что хопфовыми являются свободные группы конечных рангов, конечно порожденные нильпотентные и, более общо, полициклические группы, конечно порожденные группы матриц над полем, свободные разрешимые группы конечных рангов и т. д.

Пусть A — абелева нормальная подгруппа группы G. Группа когомологий $H^1(G/A, A)$ (см. п. 4.2) интерпретируется как факторгруппа $\operatorname{Stab}(G, A)/\operatorname{Inn}_A G$, где $\operatorname{Inn}_A G$ — группа внутренних автоморфизмов группы G, соответствующих элементам из A. Во многих случаях $H^1(G/A, A) = E$, т. е. $\operatorname{Stab}(G, A) = \operatorname{Inn}_A G$ (см., например, Саркисян Р. А.//Сиб. мат. ж. — 1972. — Т. 13, № 5. — С. 1090—1106).

Рассмотрим группы автоморфизмов свободных групп. Пусть $F_n = F(X)$ — свободная группа ранга $n \geqslant 2$ с базисом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Группа $\operatorname{Aut} F_n$ конечно определена. Она порождается множеством *нильсеновых автоморфизмов*, заданных на X следующими отображениями;

$$\iota_k\colon\ x_k \mapsto x_k^{-1},\quad x_j \mapsto x_j \text{ при } j \neq k,$$

$$\tau_{kl}\colon\ x_k \mapsto x_l\quad x_l \mapsto x_k\ (k \neq l),\ x_j \mapsto x_j \text{ при } j \neq k,\ l,$$

$$\rho_{kl}\colon\ x_k \mapsto x_k x_l\ (k \neq l),\quad x_j \mapsto x_j \text{ при } j \neq k,$$

$$\lambda_{kl}\colon\ x_k \mapsto x_l x_k\ (k \neq l),\quad x_j \mapsto x_j \text{ при } i \neq k,$$

$$k, l, j = 1, 2, \ldots, n$$

Группа $\operatorname{Aut} F_n$ порождается также автоморфизмами ι_1, τ_{12}, ρ_{12} вместе с автоморфизмом π, переставляющим элементы из X по длинному циклу: $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_n \mapsto x_1$. При $n = 4, 6, 8, \ldots$ группа $\operatorname{Aut} F_n$ порождается автоморфизмами π и ψ: $x_1 \mapsto x_2^{-1}$, $x_2 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_3, \ldots, x_{n-2} \mapsto x_{n-2}$, $x_{n-1} \mapsto$ $\mapsto x_n x_{n-1}^{-1}$, $x_n \mapsto x_{n-1}^{-1}$. При $n = 5, 7, 9, \ldots$ группа $\operatorname{Aut} F_n$ порождается автоморфизмами ψ и $\chi = \pi\iota_1\iota_2 \ldots \iota_n$.

Определяющие соотношения группы $\operatorname{Aut} F_n$ в выписанных множествах порождающих элементов выглядят громоздко (см. [31], [101]).

В настоящее время наиболее удобной для пользования системой порождающих элементов групп $\operatorname{Aut} F_n$, $n \geqslant 2$, считается система *автоморфизмов Уайтхеда*. Автоморфизмы Уайтхеда 1-го типа определяются

подстановками множества $X^{\pm 1}=\{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots$ $\dots, x_n^{\pm 1}\}$, согласованными на $x_i^{\pm 1}$. Они составляют расширенную группу подстановок $\overline{\mathbf{S}}_n$ порядка $2^n\cdot n!$. Автоморфизмы Уайтхеда 2-го типа записываются в виде (A, a), где $a\in A\subseteq X^{\pm 1}$, $a^{-1}\notin A$. Автоморфизм (A, a) оставляет на месте элементы $a^{\pm 1}$ и отображает произвольный элемент $x\in X^{\pm 1}\setminus\{a^{\pm 1}\}$ по следующему правилу: $x\mapsto a^{-1}xa$, если $x^{\pm 1}\in A$, $x\mapsto xa$, если $x\in A$, $x^{-1}\notin A$; $x\mapsto a^{-1}x$, если $x^{-1}\in A$, $x\notin A$; $x\mapsto x$, если $x^{\pm 1}\notin A$. Легко видеть, что $(A, a)^{-1}=(A-a+$ $+a^{-1}, a^{-1})$ в упрощенной записи, где «минус» означает удаление, а «плюс» — добавление элемента.

Множество определяющих соотношений группы $\operatorname{Aut} F_n$ может быть выбрано как объединение множеств R_1 определяющих соотношений конечной группы $\overline{\mathbf{S}}_n$ и R_2 определяющих соотношений следующих видов: 1) $(A,\ a)^{-1}=(A-a+a^{-1},\ a^{-1})$, 2) $(A, a)(B, a)=$ $=(A\cup B, a)$, если $A\cap B=\{a\}$, 3) $(B,b)^{-1}(A, a)(B, b)=$ $=(A, a)$, если $A\cap B=\varnothing$, $a^{-1}\notin B$, $b^{-1}\notin A$, 4) $(B, b)^{-1}(A, a)$, $(B, b)=(A\cup B-b, a)$, если $A\cap B=$ $=\varnothing$, $a^{-1}\notin B$, $b^{-1}\in A$, 5) $(A, a)(A-a+a^{-1}, b)=$ $=\tau_{ab^{-1}}(A-b+b^{-1}, a)$, если $b\in A$, $b^{-1}\notin A$, $a\neq b$, где $\tau_{ab^{-1}}$ — автоморфизм 1-го типа, заданный отображением $a\mapsto b^{-1}$, $b\mapsto a^{-1}$, $x\mapsto x$ при $x\neq a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$, 6) $\sigma^{-1}(A, a)\sigma=(\sigma(A), \sigma(a))$ для любого автоморфизма 1-го типа σ (McCool J.//J. London Math. Soc. — 1974. —V.8. — P. 259—266)

Группа $\operatorname{IAut} F_n$, $n\geqslant 2$, порождается конечным множеством автоморфизмов, заданных следующими отображениями:

$$\varphi_{ilk}\colon x_k\mapsto [x_i, x_l]\,x_k\quad (i\neq l;\ i, l\neq k),\qquad x_j\mapsto x_j\ \text{ при }\ j\neq k,$$

$$\psi_{ij}\colon x_j\mapsto x_i x_j x_i^{-1}\quad (i\neq j),\qquad x_k\mapsto x_k\ \text{ при }\ k\neq j.$$

Группа $\operatorname{IAut} F_2$ совпадает с группой $\operatorname{Inn} F_2\simeq F_2$. Группы $\operatorname{IAut} F_n$ и $\operatorname{IOut} F_n \underset{\text{def}}{=} \operatorname{IAut} F_n/\operatorname{Inn} F_n$, $n\geqslant 2$, не имеют кручения. Центр группы $\operatorname{Out} F_n$, $n\geqslant 3$ единичен (Lue A. S. T.//Bull. London Math. Soc.— 1979. — V. 11, N 1. — P. 6—7).

Любой автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} F_n$, $n \geqslant 2$, индуцирует автоморфизм свободной абелевой группы $A_n = F_n/F'_n$. Ядром соответствующего эпиморфизма $\operatorname{Aut} F_n \to \operatorname{Aut} A_n \simeq GL(n, \mathbf{Z})$ служит группа $\operatorname{IAut} F_n$.

Группа $\operatorname{Aut} F_2$ есть расширение группы $\operatorname{Inn} F_2 \simeq F_2$ посредством группы $GL(2, \mathbf{Z})$. Известны также представления:

$$\operatorname{Aut} F_2 \simeq (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) \rightarrowtail (\mathbf{Z}(3) * \mathbf{Z}(3)) \rightarrowtail (\mathbf{Z}(4) \rightarrowtail \mathbf{Z}(2)),$$

$$\operatorname{Aut} F_2 \simeq \operatorname{Aut}(\mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)) \simeq$$
$$\simeq (\mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)) \rightarrowtail (\mathbf{Z}(3) * \mathbf{Z}(2)) \rightarrowtail \mathbf{Z}(2) \simeq$$
$$\simeq (\mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)) \rightarrowtail (\mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2) * \mathbf{Z}(2)) \rightarrowtail (\mathbf{Z}(3) * \mathbf{Z}(2))$$

(Djoković D. Z.//Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — V.88, N2. — P. 218—220; Козлов Г. Т.//Тезисы докл. 8-й Всес. конф. по мат. лог. Москва, 1986.— С. 85).

Любой автоморфизм группы F_2 переводит элемент $[x_1, x_2]$ в элемент вида $([x_1, x_2]^g)^{\pm 1}$ для некоторого $g \in F_2$.

Любой элемент конечного порядка $\varphi \in \operatorname{Aut} F_n$ переходит при эпиморфизме $\operatorname{Aut} F_n \to GL(n, \mathbf{Z})$ в элемент того же порядка $\bar{\varphi}$. Однако в общем случае это не будет отображением «на». Например, нет прообраза того же порядка у элемента $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z})$, имеющего порядок 6.

Элементы конечных порядков группы $\operatorname{Aut} F_2$ составляют шесть классов сопряженности в соответствии со следующей таблицей:

порядки элементов	2	3	4
количество классов	4	1	1
представители классов	τ_{12}, ι_1, $\iota_1\iota_2$, $\lambda_{21}^{-1}\rho_{21}\iota_1$	$\tau_{12}\rho_{21}\iota_1$	$\tau_{12}\iota_1$

В группе $\operatorname{Aut} F_3$ восемь классов сопряженности элементов порядка 2, по три класса — элементов порядков 3 и 4, четыре класса — элементов порядка 6

(McCool J.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — V. 260, N 1. — P. 309—318).

Конечная группа K вложима в группу $\mathrm{Aut}\, F_n$, $n \geqslant 2$, тогда и только тогда, когда в K найдется непустая система подгрупп $\{H_i, G_i, L_j \mid i \in I,\ j \in J\}$ со свойствами: 1) $G_i < H_i$, 2) $\sum\limits_i (|K : G_i| - |K : H_i|) + \sum |K : L_j| \leqslant n$, 3) в K нет неединичной нормальной подгруппы, лежащей во всех G_i и L_j. Пусть $\pi(G)$ — множество конечных порядков элементов из G. Число $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, p_i — различные простые, $k_i \in \mathbf{N}$, принадлежит $\pi(\mathrm{Aut}\, F'_n)$ в том и только том случае, если $\sum\limits_{i=1}^{s} \left(p_i^{k_i} - p_i^{k_i - 1}\right) \leqslant n$. Для $n \geqslant 2$, если $n+1$ — простое число, то $\pi(\mathrm{Out}\, F_n) = \pi(\mathrm{Aut}\, F_n) \cup \{2n+2\}$, в остальных случаях $\pi(\mathrm{Out}\, F_n) = \pi(\mathrm{Aut}\ F_n)$. Группа $\mathrm{Out}\, F_n$, $n \geqslant 2$, не вложима в группу $\mathrm{Out}\, F_{n+1}$ (Храмцов Д. Г.//Мат. заметки — 1985. — Т. 38, № 3. — С. 386—392; Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 3. — С. 376—394).

Пусть G — конечная подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, F_n$, $n \in \mathbf{N}$. Подгруппа F_n^G всех элементов группы F_n, неподвижных относительно элементов группы G, является свободным множителем группы F_n (Dyer J. L., Scott G. P.//Communs Algebra. — 1975. — V. 3, N 3. — P. 195—201). Если φ — автоморфизм или даже произвольный эндоморфизм группы F_n, то подгруппа F_n^{φ} неподвижных относительно φ элементов группы F_n конечно порождена (Gersten S. M.//Adv. Math. — 1987. — V. 64. — P. 51—85; Goldstein R. Z., Turner E. C.//Contemp. Math. — 1985. — V. 44. — P. 69—72). Более того, для любой подгруппы $G \leqslant \mathrm{Aut}\, F_n$, $n \in \mathbf{N}$, группа F_n^G конечно порождена (Губа В. С.// Тезисы сообщ. 11 Всес. симп. по теор. групп, Свердловск, 1989. — С. 148—149).

Если $U = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ — упорядоченный набор элементов свободной группы F_n, $n \in \mathbf{N}$, то группа $\mathrm{Stab}\, U \leqslant \mathrm{Aut}\, F_n$ всех автоморфизмов группы F_n, оставляющих U неподвижным, конечно определена. Аналогичное утверждение справедливо также для группы $\mathrm{Stab}_C\, F_n \leqslant \mathrm{Aut}\, F_n$ всех автоморфизмов группы F_n, оставляющих на месте упорядоченный набор

$[U] = ([u_1], [u_2], \ldots, [u_k])$ классов сопряженности элементов из F_n (McCool J.//J. Algebra.— 1975.— V. 35, N 1—3.— P. 205—213).

Говорят, что нетождественный автоморфизм φ группы F_n имеет *конечную орбиту*, если существует неединичный элемент $w \in F_n$ и число $k \in \mathbf{N}$ такие, что $\varphi^k(w) = w$. Оказывается, что для любого $n \geqslant 2$ существуют автоморфизмы $\psi \in \operatorname{Aut} F_n$ без конечных орбит (Scharlemann M., Squier C.//Contemp. Math.— 1983.— V. 20.— P. 341—346).

Автоморфизм φ произвольной группы G называется *степенным*, если он действует тождественно на решетке всех подгрупп группы G. Подгруппа всех степенных автоморфизмов произвольной группы G является абелевой финитно аппроксимируемой нормальной подгруппой группы $\operatorname{Aut} G$. Автоморфизм φ называется *нормальным*, если он действует тождественно на решетке всех нормальных подгрупп конечных индексов группы G, и p-нормальным, p — простое, если φ действует тождественно на решетке всех нормальных подгрупп p-примарных индексов группы G. Любой p-нормальный автоморфизм свободной группы F_n, $n \in \mathbf{N}$, p — нечетное простое, является внутренним (Lubotzky A.//J. Algebra.— 1980.— V. 63, N 2.— P. 494—498).

Пусть $G = * G_i$, $i \in I$, — свободное произведение конечного числа неразложимых (в свободное произведение) собственным образом сомножителей. Удобно использовать запись $G = \underset{j \in J}{*} G_j * F(X)$, где для любого $j \in J$ группа G_j не изоморфна группе $\mathbf{Z}$, а $F(X)$ — свободная группа. Тогда группа $\operatorname{Aut} G$ порождается автоморфизмами следующих типов: 1) *Факторные автоморфизмы.* Каждый множитель G_i, $i \in I$, отображается на себя. Они составляют подгруппу, изоморфную группе $\prod\limits_{i \in I} \operatorname{Aut} G_i$. 2) *Перестановочные автоморфизмы.* Зафиксируем для каждой пары G_k, G_l, $k, l \in I$, изоморфных множителей изоморфизм α_{kl}. Считаем эти изоморфизмы согласованными, т. е. $\alpha_{km} = \alpha_{kl}\alpha_{lm}$, если это имеет смысл. Автоморфизм переставляет часть изоморфных множителей согласно α_{kl}, действуя тождественно на остальные. Составляют конечную подгруппу K. 3) *Автоморфизмы Уайтхеда.* а) Зафик-

сируем элемент $1 \neq g \in G_j$, $j \in J$. На множитель G_j и на часть других множителей G_k, $k \in J' \subseteq J$, автоморфизм действует тождественно. Остальные множители G_l, $l \in J \setminus J'$, сопрягаются по правилу $G_l \to G_l^{g^{-1}}$, $f \mapsto f^{g^{-1}}$. Каждый из элементов $x \in X$ переводится в один из элементов x, xg^{-1}, gx, gxg^{-1}. б) Зафиксируем элемент $x_0 \in X$. Часть множителей G_j, $j \in J' \subseteq J$ отображается тождественно, остальные G_k, $k \in J \setminus J'$, по правилу $G_k \to G_k^{x_0}$, $f \mapsto f^{x_0}$. Элемент $x = x_0$ и часть других элементов $x \in X' \subseteq X$ отображаются тождественно, остальные — в один из элементов xx_0^{-1}, x_0x, $x_0xx_0^{-1}$.

Если все группы G_j, $\operatorname{Aut} G_j$ $(j \in J)$ конечно определены, то и группа $\operatorname{Aut} G$ конечно определена (Gilbert N. D.// Proc. London Math. Soc. — 1987. — V. 54. — P. 115—140).

Из результатов о группах автоморфизмов свободных произведений с объединением отметим только один. Если $G = G_1 *_H G_2$ — свободное произведение с объединением конечных групп, то $\operatorname{Aut} G = A_1 *_B A_2$ — также свободное произведение с объединением конечных групп (Karrass A., Pietrowski A., Solitar D.//Contemp. Math. — 1984. — V. 33. — P. 328—340).

Отразим влияние группы автоморфизмов на исходную группу. Рассмотрим уравнение $\operatorname{Aut} G = H$ с неизвестной группой G. Это уравнение не имеет решений, если, например, H — одна из групп следующего списка: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(2n+1)$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mathbf{S}_6$, $\mathbf{A}_m$ $(m \neq 1, 2, 8)$, $F_\varkappa$ $(\varkappa \neq 0)$, бесконечная черниковская группа, нильпотентная периодическая группа неограниченного периода. Не существует конечно порожденной группы G, для которой $H \simeq SL(2, \mathbf{Z})$.

Бесконечная абелева группа G, для которой $H \simeq D_{2n}$ — группа диэдра порядка $2n$, существует тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 6$. Бесконечная абелева группа G, для которой H — обобщенная группа кватернионов K_n порядка 2^n, $n \geqslant 3$, существует тогда и только тогда, когда $n = 3$. Конечная абелева группа H может быть реализована как группа $\operatorname{Aut} G$ бесконечной группы G в том и только том случае, когда порядок группы H четен и H является прямой суммой циклических групп $\mathbf{Z}(2)$, $\mathbf{Z}(3)$, $\mathbf{Z}(4)$, причем если H обладает элементом порядка 12, то H должна обладать элементом порядка 2, не являщимся шестой степенью (Fournelle T. A.//J. Algebra. — 1983. — V. 80, N 1. — P. 106—112).

Пусть G — группа, для которой $H = \mathrm{Aut}\, G$ — счетная нильпотентная периодическая группа. Тогда H имеет конечный период, группа $\mathrm{Inn}\, G$ конечна и элементы группы G конечных порядков образуют конечную подгруппу. Более того, в группе H элементы порядков взаимно простых с 6 образуют конечную подгруппу. В то же время существует группа G, для которой $H = \mathrm{Aut}\, G$ — счетная метабелева периодическая группа неограниченного периода (Robinson D. J. S. //Quartery J. Math. — 1979. — V. 30. — P. 351—364).

Если H — конечная группа, то уравнение $\mathrm{Aut}\, G = H$ в классе конечных групп может иметь только конечное множество решений (Iyer H. K.//Rocky Mountain J. Math. — 1979. — V. 9, N 4. — P. 653—670). Заметим, что указанное множество может состоять более, чем из одного элемента. Например, группы $\mathbf{Z}(3)$ и $\mathbf{Z}(4)$ имеют группы автоморфизмов, изоморфные группе $\mathbf{Z}(2)$.

Если $H = \mathrm{Aut}\, G$ — конечная группа для произвольной группы G, то группа $\mathrm{Inn}\, G \simeq G/C(G) \leqslant H$ также конечна. Это влечет конечность коммутанта G'. В рассматриваемом случае элементы конечных порядков группы G образуют конечную подгруппу $T(G) \geqslant G'$. Из периодичности G следует ее конечность. Если группа G конечно порождена, то она является расширением циклической подгруппы из $C(G)$ посредством конечной группы. Нильпотентная группа G имеет конечную группу автоморфизмов H в том и только том случае, если индекс $|G : C(G)|$ и группа $\mathrm{Aut}\, C(G)$ конечны, см. (Robinson D. J. S.//Proc. London Math. Soc. — 1974. — V. 35. — P. 34—54).

Автоморфизм φ группы G называется *регулярным*, если $\varphi(g) = g$, где $g \in G$, влечет $g = 1$. Если конечная группа G имеет регулярный автоморфизм простого нечетного порядка, то группа G нильпотентна.

Для произвольного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$ множество неподвижных точек G^{φ} называют также централизатором $C_G(\varphi)$. Автоморфизм φ называется *почти регулярным*, если его централизатор $C_G(\varphi)$ конечен. Пусть φ — почти регулярный автоморфизм периодической группы G, для которого $\varphi^2 = \mathrm{id}$ (т. е. φ — инволюция). В этом случае группа G локально конечна и почти разрешима. Более того, в G имеется нильпотентная ступени $k \leqslant 2$ подгруппа конечного

индекса, индекс и коммутант подгруппы $[G, \langle\varphi\rangle] \leqslant \leqslant G \leqslant \operatorname{Hol} G$ также конечны в G (Шунков В. П.// Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11. — С. 470—493; Беляев В. В., Сесекин Н. Ф.//Studia Scien. Math. Hungarica. — 1982. — V. 17. — P. 137—141).

Рассмотрим группы автоморфизмов разрешимых групп. Нильпотентная группа G порождается совокупностью элементов g_i тогда и только тогда, когда абелева группа G/G' порождается образами $\bar{g}_i$ этих элементов. Если $G = F(X, \mathfrak{C})$ — свободная группа в некотором нильпотентном многообразии $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{N}_k$, то любое отображение $X \to G$, $x \longmapsto xv_x$, $v_x \in G'$, определяет автоморфизм группы G.

Пусть $F_{n,m} = F_n(\mathfrak{N}_m)$ — свободная группа ранга n в многообразии всех нильпотентных групп ступени $k \leqslant m$. При $m = 1, 2$ гомоморфизмы индуцирования α_m: $\operatorname{Aut} F_n \to \operatorname{Aut} F_{n,m}$ являются эпиморфизмами.

Если $m \geqslant 3$, то α_m уже не является отображением «на». Возьмем, например, $n = 2$, тогда любой автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} F_2$ переводит элемент $[x_1, x_2]$ в элемент $([x_1, x_2]^g)^{\pm 1}$, $g \in F_2$, в то время как автоморфизм χ: $x_1 \longmapsto x_1[x_1, x_2]^2$, $x_2 \longmapsto x_2$ группы $F_{2,3}$ (базисы групп мы обозначаем одинаково) переводит $[x_1, x_2]$ в $[x_1, x_2]\left([x_1, x_2]^{x_2}\right)^{-2}$; следовательно, χ не индуцируется автоморфизмом из $\operatorname{Aut} F_2$.

Группа $\operatorname{Aut} F_{n,m}$ при $n \geqslant m \geqslant 2$ порождается четырьмя нильсеновыми автоморфизмами ι_1, ρ_{12}, τ_{12}, π и $(m-2)$-мя автоморфизмами θ_k: $x_1 \longmapsto x_1[x_1, x_2, \ldots \ldots, x_k]$, $k = 3, 4, \ldots, m$. Если $n \geqslant 4$, то нильсеновы автоморфизмы заменяются двумя порождающими группу $\operatorname{Aut} F_n$ элементами, следовательно, в этом случае группа $\operatorname{Aut} F_{n,m}$ имеет m порождающих элементов (Andreadakis S.//Arch. Math. — 1984. — V. 42, N 4. — P. 296—300).

Если конечно порожденные нильпотентные группы соизмеримы, т. е. в них есть изоморфные подгруппы конечных индексов, то и группы их автоморфизмов соизмеримы. Обратное неверно, так как существуют неизоморфные конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, группы автоморфизмов которых изоморфны (см. [47]).

Конечная нециклическая p-группа имеет неединичный внешний автоморфизм (*теорема Гашюца*).

Справедливо аналогичное утверждение для любой нильпотентной p-группы. Существует нильпотентная

группа без внешних автоморфизмов. Конечно порожденная нильпотентная группа полициклического ранга $l \geqslant 2$ имеет неединичный внешний автоморфизм. Для $l = 1$ вопрос о его существовании открыт. Существует совершенная полициклическая группа без кручения полициклического ранга $l = 7$. С кручением такой пример найден среди метабелевых групп полициклического ранга $l = 4$, см. ([47], Robinson D. J. S.// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — V. 62. — P. 281—294).

Группа автоморфизмов почти полициклической группы конечно определена (см. [40]).

Любая конечная группа G представима в виде $G = \operatorname{Aut} H/\operatorname{Cent} H$, где H есть 2-ступенно нильпотентная группа периода p^2. Группу H можно выбрать также в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения (Heineken H., Liebeck H.//Arch. Math. — 1974. — V. 25, N 1. — P. 8—16; Liebeck H.// J. London Math. Soc. — 1975. — V. 10, N 3. — P. 349—356).

Пусть $S_{n,k} = F_n(\mathfrak{A}^k)$ — свободная разрешимая группа ранга n в многообразии $\mathfrak{A}^k$ всех разрешимых групп ступени не больше k. Известно, что $\operatorname{Inn} S_{2,k} = \operatorname{IAut} S_{2,k}$ для любого k. Гомоморфизмы $\operatorname{Aut} F_n \to \operatorname{Aut} S_{n,2}$ при $n = 2$ и $n \geqslant 4$ являются эпиморфизмами, следовательно, группы $\operatorname{Aut} S_{n,2}$ при $n = 2$ или $n \geqslant 4$ порождаются образами нильсеновых автоморфизмов и, следовательно, конечно порождены. В то же время, группа $\operatorname{Aut} S_{3,2}$ не является даже конечно порожденной. См. по этому поводу обзорные статьи [74], [100].

Пусть $A = \delta_{k-1} S_{n,k}$ — последний неединичный член ряда коммутантов группы $S_{n,k}$. Очевидно, что $S_{n,k-1} \simeq S_{n,k}/A$. Все автоморфизмы группы $S_{n,k}$, тождественные на A, являются внутренними. Группа $\operatorname{Aut}(S_{n,k}, A)$ допускает изоморфное представление матрицами над групповым кольцом $\mathbf{Z}S_{n,k-1}$ по правилу

$$\varphi \mapsto \left(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j}\right), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad (*)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис $S_{n,k}$, $\varphi \in \operatorname{Aut}(S_{n,k}, A)$, $\frac{\partial}{\partial x}$ — частная производная Фокса со значением

в $\mathbf{Z}S_{n,k-1}$ (см. п. 1.2) В частном случае группы $\operatorname{Aut}(S_{n,2}, S'_{n,2})$ правая часть (*) состоит из тех и только тех матриц, которые стабилизируют вектор $(x_1-1, x_2-1, \ldots, x_n-1)$.

Пусть группа G представлена как $G=F/N'$, $N \trianglelefteq F$. Пусть $\frac{\partial}{\partial x_j}$ — частная производная Фокса на группе G со значениями в кольце $\mathbf{Z}(F/N)$ (см. п. 1.2). Тогда группа $\operatorname{Aut}(G, N/N')$ допускает изоморфное представление матрицами по правилу, аналогичному (*).

Пусть $F_n(\mathfrak{M}_1)$ — свободная группа ранга n в многообразии центрально-метабелевых групп $\mathfrak{M}_1$. Группа $\operatorname{Aut} F_n(\mathfrak{M}_1)$ конечно порождена при $n \geqslant 4$ и бесконечно порождена при $n=2$, 3. Если $X=\{x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n\}$ — базис $F_n(\mathfrak{M}_1)$, то при $n \geqslant 4$ она порождается нильсеновыми автоморфизмами ι_1, τ_{12}, ρ_{12}, π (точнее, их аналогами) и автоморфизмом α: $x_1 \mapsto x_1[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$. Пока неясно, можно ли убрать из множества порождающих элемент α, т. е. не будет ли гомоморфизм $\operatorname{Aut} F_n \to \operatorname{Aut} F_n(\mathfrak{M}_1)$ эпиморфизмом (Stöhr E.//Akad. Der. Wissens chaften der DDR.— Berlin, 1985).

Если конечно порожденная группа G есть расширение абелевой группы посредством полициклической группы, то на группе $\operatorname{Aut} G$ выполнена *альтернатива Титса*: произвольная конечно порожденная подгруппа $H \leqslant \operatorname{Aut} G$ либо содержит F_2, либо почти разрешима. Прямое сплетение $H = K \wr \mathbf{Z}$, где K — конечная группа, вложимо в группу $\operatorname{Aut} G$ для некоторой конечно порожденной разрешимой группы G. Однако H не содержит F_2 и не почти разрешима в случае, если K не разрешима (см. [47]). Можно ли вложить любую счетную группу H в группу $\operatorname{Aut} G$ для подходящей конечно порожденной разрешимой группы G, пока не известно.

С каждой группой G связана последовательность групп автоморфизмов $A^1G = \operatorname{Aut} G$, $A^{i+1}G = \operatorname{Aut} A^iG$, $i=1, 2, \ldots$ Если $C(G)=E$, то $C(A^iG)=E$ для всех i и существуют естественные вложения $A^iG \leqslant A^{i+1}G$. Можно определить группу $A^\alpha G$ для любого порядкового ординала α, беря на предельном шаге объединение всех предыдущих групп: $A^\alpha G = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A^\beta G$, и полагая $A^{\beta+1}G = \operatorname{Aut} A^\beta G$. Получим *башню автоморфиз-*

мов $A^{\alpha}G$. Последовательность групп автоморфизмов конечной группы G стабилизируется на конечном шаге, т. е. существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $A^{n+1}G = A^nG$. Если G — произвольная группа, то башня ее групп автоморфизмов стабилизируется на некотором ординале α. Для любого наперед заданного α найдется группа $G(\alpha)$, башня групп автоморфизмов которой стабилизируется в точности, начиная с α (Thomas S.// roc. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 95, N 2. — P. 166—168).

Пусть центр группы G единичен. Тогда группы G и A^1G являются подгруппами группы A^2G. Группа A^1G совершенна в том и только том случае, когда G автоморфно допустима в A^2G. Группа $\mathrm{Aut}\, F_n$ совершенна при любом $n = 2, 3, \ldots$ Группа $G = F_n/N'$, где N — автоморфно допустимая подгруппа F_n, лежащая в F'_n, если факторгруппа F_n/N аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, также имеет совершенную группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$. Отсюда следует совершенность групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, F_n(\mathfrak{A}^l)$ свободных разрешимых групп ступени $l \geqslant 2$ ранга $n \geqslant 2$ (Dyer J. L., Formanek E.//Bull. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 81, N 2. — P. 435—437).

Группы $\mathrm{Aut}\, F_n(\mathfrak{N}_2)$ совершенны при $n \neq 1, 3$. Группа $A^2F_3(\mathfrak{N}_2)$ представляется в виде $A^1F_3(\mathfrak{N}_2) \rightthreetimes \langle\varphi\rangle$, где φ — внешний автоморфизм группы $A^1F_3(\mathfrak{N}_2)$, имеющий порядок 2, и сама совершенна (Dyer J. L., Formanek E.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1976. — V. 79, N 2. — P. 271—279).

4.2. Когомологии групп. Глубокое взаимодействие между алгеброй и топологией достигается через группы гомологий и когомологий топологического пространства, а потому истоки когомологической теории групп находятся в равной степени в алгебре и в топологии. В этом пункте отражен алгебраический аспект теории и приведены приложения теории когомологий к теории групп.

Введем комплексы, резольвенты и G-модули. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Последовательность

$$\ldots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \ldots \quad (n \in \mathbf{Z}) \qquad (*)$$

R-модулей X_n и их гомоморфизмов d_n называется *цепным комплексом*, если произведение $d_n d_{n+1} = 0$

для всех $n \in \mathbf{Z}$. Более компактное обозначение $(X_n; d_n)$ или просто X. Гомоморфизмы d_n называют *дифференциалами*, элементы групп $Z_n(X) = \operatorname{Ker} d_n$ — *циклами*, элементы группы $B_n(X) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ — *границами* (*размерности* n). *Группы гомологий* комплекса X определяются формулой $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$. Точность последовательности (*) означает, что $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, т. е. что $H_n(X) = 0$ для всех n. *Резольвентой* R-модуля A называется точный комплекс вида

$$\ldots \to X_n \xrightarrow{d_n} \ldots \to X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A \to 0.$$

Резольвента называется *свободной*, если X_n — свободные R-модули.

Можно рассматривать комплексы, расположенные по возрастанию индексов

$$\ldots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \ldots$$

Такие комплексы называют *коцепными* и говорят соответственно о *коциклах* $Z^n(X) = \operatorname{Ker} d^n$, *кограницах* $B^n(X) = \operatorname{Im} d^{n-1}$ и *когомологиях* $H^n(X)$.

Пусть G — некоторая группа, $\mathbf{Z}G$ — ее целочисленное групповое кольцо. В дальнейшем термин *G-модуль* означает то же, что $\mathbf{Z}G$-модуль. Мы рассматриваем правые G-модули, однако любой правый G-модуль A можно считать также левым G-модулем относительно действия $ga = ag^{-1}$, $a \in A$, $g \in G$. Обозначим $A \otimes B$ и $A \otimes_G B$ тензорное произведение G-модулей A и B над $\mathbf{Z}$ и над $\mathbf{Z}G$ соответственно. Пусть C — абелева группа, на которой G действует тривиально, т. е. $cg = c$, $c \in C$, $g \in G$. Абелеву группу $C \otimes \mathbf{Z}G$ можно считать G-модулем относительно действия $(c \otimes r)g = c \otimes rg$, $c \in C$, $r \in \mathbf{Z}G$, $g \in G$. Такие модули называют *индуцированными*. Двойственно, обозначим $\operatorname{Hom}(A, B)$ и $\operatorname{Hom}_G(A, B)$ группы гомоморфизмов $\varphi \colon A \to B$ над $\mathbf{Z}$ и над $\mathbf{Z}G$ соответственно.

Абелеву группу $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}G, C)$ можно считать G-модулем относительно действия $(\varphi(g))(r) = \varphi(g^{-1}r)$, $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}G, C)$, $r \in \mathbf{Z}G$, $g \in G$. Такие модули называют *коиндуцированными*.

Для определения групп гомологий и когомологий выберем свободную резольвенту тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$

$$\ldots \to X_n \xrightarrow{d_n} \ldots \to X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0 \qquad (**)$$

и пусть A — произвольный G-модуль. Рассмотрим комплекс

$$\ldots \to X_n \otimes_G A \xrightarrow{\partial_n} \ldots \to X_1 \otimes_G A \xrightarrow{\partial_1} X_0 \otimes_G A \to 0,$$

где $\partial_n(x_n \otimes a) = d_n x_n \otimes a$, $x_n \in X_n$, $a \in A$. Этот комплекс, вообще говоря, не является точным. Его группы гомологий называют *группами гомологий группы G с коэффициентами в G-модуле A* и обозначают $\mathrm{H}_n(G, A)$. Двойственно, рассмотрим коцепной комплекс.

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(X_0, A) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Hom}_G(X_1, A) \to \ldots$$
$$\ldots \to \mathrm{Hom}_G(X_n, A) \xrightarrow{\partial^n} \ldots,$$

где $\partial^n(f)x_{n+1} = f(d_n x_{n+1})$, $x_{n+1} \in X_{n+1}$, $f \in \mathrm{Hom}_G(X_n, A)$. Его группы когомологий называют *группами когомологий группы G с коэффициентами в G-модуле A* и обозначают $H^n(G, A)$. Можно доказать, что группы $H_n(G, A)$ и $H^n(G, A)$ зависят лишь от G и A, но не зависят от выбора свободной резольвенты (**).

Бывает часто удобно группы (ко)гомологий рассматривать вместе. Для этого введем обозначения

$$H_*(G, A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} H_n(G, A) \text{ и } H^*(G, A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^n(G, A).$$

Если α: $A_1 \to A_2$ — гомоморфизм G-модулей, то отображения $X_n \otimes_G A_1 \to X_n \otimes_G A_2$ индуцируют гомоморфизмы групп гомологий α_n: $H_n(G, A_1) \to H_n(G, A_2)$. Аналогично, имеются гомоморфизмы α^n: $H^n(G, A_1) \to H^n(G, A_2)$. Группы $H_n(G, —)$ и $H^n(G, —)$ являются ковариантными функторами второго аргумента.

Пусть

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \qquad (***)$$

точная последовательность G-модулей. Тогда существует *длинная точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \to H_{n+1}(G, C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(G, A) \xrightarrow{\alpha_n}$$
$$\to H_n(G, B) \xrightarrow{\beta_n} H_n(G, C) \xrightarrow{\delta_n} \ldots \qquad (****)$$

Отображения α_n и β_n индуцированы отображениями α и β. Так как α — мономорфизм, а β — эпиморфизм, то можно считать, что $A \leqslant B$, $C = B/A$. Так как модуль X_n свободен, то $X_n \otimes_G A \leqslant X_n \otimes_G B$ и, следовательно, $X_n \otimes_G C = X_n \otimes_G B / X_n \otimes_G A$.

Пусть z — цикл, представляющий некоторый элемент $h \in H_n(G, C)$. Образ элемента $z' = \partial_n z$ в $X_{n-1} \otimes_G \otimes_G C$ равен нулю, поэтому $z' \in X_{n-1} \otimes_G A$. Так как $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, то z' — цикл, представляющий некоторый элемент $h' \in H_{n-1}(G, A)$. По определению $\delta_n h = h'$ и δ_n называется *связывающим* или *граничным* гомоморфизмом. Последовательность (****) функториально зависит от последовательности (***). Это означает, что коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

определяет коммутативную диаграмму длинных точных последовательностей групп гомологий

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_{n+1}(G, C) & \to & H_n(G, A) & \to & H_n(G, B) & \to & H_n(G, A) & \to \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \ldots \to & H_{n+1}(G, C') & \to & H_n(G, A') & \to & H_n(G, B') & \to & H_n(G, A') & \to \ldots \end{array}$$

Длинная точная последовательность групп когомологий определяется аналогично и имеет вид

$$\ldots \to H^{n-1}(G, C) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(G, A) \xrightarrow{\alpha^n} H^n(G, B) \xrightarrow{\beta^n}$$
$$\to H^n(G, C) \xrightarrow{\delta^n} \ldots$$

Группы гомологий обладают следующими тремя свойствами, которые можно было бы взять в качестве их определения.

а) $H_0(G, A) = \mathbf{Z} \otimes_G A$ — наибольший фактормодуль модуля A, на котором группа G действует тривиально;

б) для каждой короткой точной последовательности G-модулей существует функториально зависящая от нее длинная точная последовательность групп гомологий;

в) $H_n(G, A) = 0$, если A — индуцированный G-модуль и $n > 0$.

Свойствами а)—в) группы $H_n(G, A)$ определяются однозначно.

Для любого G-модуля A обозначим A^0 тривиальный G-модуль с той же самой аддитивной группой. Имеется эпиморфизм $A^0 \otimes \mathbf{Z}G \to A$ $(a \otimes g \mapsto ag)$ и, следовательно, точная последовательность

$$0 \to A' \to A^0 \otimes \mathbf{Z}G \to A \to 0.$$

Связывающие гомоморфизмы относительно этой последовательности

$$\delta_n\colon H_n(G, A) \to H_{n-1}(G, A')$$

являются изоморфизмами для всех $n > 1$ и

$$H_1(G, A) \simeq \operatorname{Ker}(H_0(G, A') \to H_0(G, A \otimes \mathbf{Z}G)).$$

Эти изоморфизмы называют *изоморфизмами сдвига размерности.*

Рассмотрим функториальную зависимость по первому аргументу и замену групп. Если $\varphi\colon H \to G$ — гомоморфизм групп и A — некоторый G-модуль, то A можно считать также H-модулем, полагая $ah = a\varphi(h)$, $a \in A$, $h \in H$. Очевидно, имеется эпиморфизм $\mathbf{Z} \otimes_H A = \mathbf{Z} \otimes_G A$, который по свойству а) можно интерпретировать как эпиморфизм $H_0(H, A) \to H_0(G, A)$. С помощью сдвига размерности получим гомоморфизм $H_n(H, A) \to H_n(G, A)$. В этом смысле $H_n(-, A)$ — ковариантный функтор первого аргумента. Аналогично, имеется вложение $\operatorname{Hom}_G(\mathbf{Z}, A) \to \operatorname{Hom}_H(\mathbf{Z}, A)$, которое интерпретируется как гомоморфизм $H^0(G, A) \to H^0(H, A)$. Сдвигая размерность, получим гомоморфизмы $H^n(G, A) \to H^n(H, A)$, т. е. $H^n(-, A)$ — контравариантный функтор первого аргумента. Пусть H — подгруппа в G. Тогда вложение $H \to G$ индуцирует *гомоморфизмы ограничения и коограничения*

$$\operatorname{res}\colon H^n(G, A) \to H^n(H, A), \qquad \operatorname{cor}\colon H_n(H, A) \to H_n(G, A).$$

Для любого H-модуля C рассмотрим абелеву группу $C \otimes_H \mathbf{Z}G$, где $\mathbf{Z}G$ считается левым H-модулем относительно умножения на элементы H слева. На $C \otimes \mathbf{Z}G$ можно ввести структуру правого G-модуля, положив $(c \otimes r)g = c \otimes rg$, $c \in C$, $r \in \mathbf{Z}G$, $g \in G$. Имеют место изоморфизмы

$$H_n(H, C) \simeq H_n(G, C \otimes \mathbf{Z}G), \qquad n > 0.$$

Эти изоморфизмы называют *заменой групп.* Двойственное утверждение

$$H^n(H, C) \simeq H^n(G, \mathrm{Hom}_H(\mathbf{Z}G, C)).$$

Определим стандартную резольвенту произвольной группы G. Обозначим через X_n, $n = 1, 2, \ldots$, свободный G-модуль со свободными порождающими $(g_1, \ldots, g_n)$, где $g_i \in G$, $g_i \neq 1$. Считаем, что X_0 порождается одним символом ( ). Удобно также считать, что $(g_1, \ldots, g_n) = 0$, если $g_i = 1$ для некоторого i. Определим гомоморфизмы d_n: $X_n \to X_{n-1}$ равенством

$$d_n(g_1, \ldots, g_n) = (g_1, \ldots, g_{n-1})\, g_n +$$
$$+ \sum_{i=n-1}^{1} (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) + (-1)^n (g_2, \ldots, g_n)$$

и гомоморфизм ε: $X_0 \to \mathbf{Z}$ равенством $\varepsilon(\ \ ) = 1$. Проверяется что последовательность G-модулей X_n и гомоморфизмов d_n, ε — свободная резольвента тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$. Она называется *стандартной резольвентой* группы G.

Пусть A — некоторый G-модуль. *Скрещенными гомоморфизмами* α: $G \to A$ называют отображения, удовлетворяющие равенству $\alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1) g_2 + \alpha(g_2)$. Скрещенный гомоморфизм называется *главным*, если для некоторого элемента $a \in A$ $\alpha(g) = ag - a$. Из формулы для дифференциалов следует, что $H^1(G, A)$ — это факторгруппа группы скрещенных гомоморфизмов по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов. Аналогично, $H^2(G, A)$ — факторгруппа группы отображений α: $G \times G \to A$, удовлетворяющих равенству

$$\alpha(g_1, g_2) \cdot g_3 - \alpha(g_1, g_2 g_3) + \alpha(g_1 g_2, g_3) - \alpha(g_2, g_3) = 0$$

по подгруппе, состоящей из отображений вида

$$\alpha(g_1, g_2) = \beta(g_1) g_2 - \beta(g_1 g_2) + \beta(g_2),$$

где β: $G \to A$ — некоторое отображение, $\beta(1) = 0$.

Для определения *резольвенты Грюнберга* предположим, что группа G представлена как факторгруппа $G = F/N$, где F — свободная группа, $N \triangleleft F$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}G$. Если I — произвольный правый идеал кольца $\mathbf{Z}F$, то I — свободный $\mathbf{Z}F$-модуль, следовательно, $I/I\mathfrak{n}$ — свобод-

ный $\mathbf{Z}G$-модуль, где $\mathfrak{n}$ — идеал, порожденный элементами вида $x-1$, $x\in N$. Рассмотрим последовательность

$$\to \mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^3 \xrightarrow{d_4} \mathfrak{f}\mathfrak{n}/\mathfrak{f}\mathfrak{n}^2 \xrightarrow{d_3} \mathfrak{n}/\mathfrak{f}\mathfrak{n} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{f}/\mathfrak{f}\mathfrak{n} \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}F/\mathfrak{n} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

(здесь $\mathfrak{f}$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}F$). Член X_n этой последовательности определяется по формуле

$$X_n = \mathfrak{n}^k/\mathfrak{n}^{k+1} \text{ при } n=2k,\ X_n = \mathfrak{f}\mathfrak{n}^k/\mathfrak{f}\mathfrak{n}^{k+1} \text{ при } n=2k+1,$$

а гомоморфизмы d_n индуцированы вложениями $\mathfrak{n}^k \to \mathfrak{f}\mathfrak{n}^{k-1}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{n}^k \to \mathfrak{n}^k$, ε — тривиализация. Очевидно, эта последовательность является резольвентой. По предыдущему замечанию она состоит из свободных G-модулей и, следовательно, может быть использована для вычисления [ко]гомологий группы G.

Если $G=F$ — свободная группа, то резольвента Грюнберга принимает вид

$$0\to \mathfrak{f} \to \mathbf{Z}F \to \mathbf{Z} \to 0,$$

поэтому при $n>1$ $H_n(F, A) = H^n(F, A) = 0$ для любого F-модуля A.

Пусть $C(m)$ — циклическая группа порядка m с порождающим t. Представим $C(m)$ как факторгруппу F/N бесконечной циклической группы с порождающим x по подгруппе N, порожденной x^m. Тогда в резольвенте Грюнберга все модули — свободные циклические, т. е. изоморфны $\mathbf{Z}C(m)$, а сама резольвента принимает вид

$$\to \mathbf{Z}C(m) \xrightarrow{d_n} \ldots \to \mathbf{Z}C(m) \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}C(m) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

где d_n — умножение на $r=t-1$ при нечетном n и на $R = 1+t+\ldots+t^{m+1}$ при четном n. А потому для любого $C(m)$-модуля A имеем

$$H_{2k}(C(m),\ A) = \{a\in A \mid Ra=0\}/rA,$$
$$H_{2k-1}(C(m),\ A) = \{a\in A \mid ra=0\}/RA, \quad k>0.$$

В частности, для тривиального $C(m)$ — модуля A

$$H_{2k}(C(m),\ A)=0, \qquad H_{2k-1}(C(m),\ A) = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \quad k>0.$$

В последовательности Грюнберга верно, что $\mathbf{Z}F/\mathfrak{n} \simeq \mathbf{Z}G$, $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{f}\otimes_F \mathbf{Z}G$, $\operatorname{Ker} d_1 = \mathfrak{n}/\mathfrak{f}\mathfrak{n}$, поэтому для

любого представления группы G в виде $G=F/N$ имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{f}\mathfrak{n} \to \mathfrak{f} \otimes_F \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Пусть N^{ab} — факторгруппа N по ее коммутанту N'. Сопряжение элементами $x \in F$ индуцирует на N^{ab} структуру G-модуля. Отображение $xN' \longmapsto (x-1)+\mathfrak{f}\mathfrak{n}$ определяет изоморфизм G-модулей и, следовательно, имеет место точная последовательность

$$0 \to N^{\mathrm{ab}} \to \mathfrak{f} \otimes_F \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Модуль N^{ab} носит название *модуля соотношений* группы G.

Предположим, что G задается одним соотношением $v(x_1, \ldots, x_k)=1$. Тогда N^{ab} — циклический G-модуль с порождающим vN'. Известно, что если слово v не равно собственной степени никакого другого слова группы F, то N^{ab} — свободный G-модуль с порождающим vN', т. е. последняя последовательность свободная резольвента тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$. Поэтому если G — группа с одним соотношением и без кручения, то при $n>2$ для любого G-модуля A имеем $H_n(G, A)=H^n(G, A)=0$.

Пусть $G=G_1 *_S G_2$ — свободное произведение групп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой S. Тогда для любого G-модуля A существует длинная точная последовательность

$$\to H_n(S, A) \xrightarrow{\left(\mathrm{cor}_S^{G_1},\, \mathrm{cor}_S^{G_2}\right)} H_n(G_1, A) \oplus H_n(G_2, A) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{G_1}^{G}+\mathrm{cor}_{G_2}^{G}}$$
$$\to H_n(G, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(S, A) \to \ldots,$$

где через cor обозначены отображения коограничения для соответствующих подгрупп, а через δ_n — некоторый связывающий гомоморфизм. В частности, для свободного произведения $G=G_1 * G_2$ имеют место изоморфизмы

$$H_n(G, A) \simeq H_n(G_1, A) \oplus H_n(G_2, A) \qquad (n>1).$$

Аналогичные результаты справедливы для когомологий.

Пусть S и T — две изоморфные подгруппы в G и α: $S \to T$ — некоторый изоморфизм между ними. Обозначим $\tilde{G}$ HNN-расширение группы G относительно

α. Тогда для любого $\widetilde{G}$-модуля A существует длинная точная последовательность

$$\ldots \to H_n(S, A) \xrightarrow{\operatorname{cor}_S^G - \alpha_n \operatorname{cor}_T^G} H_n(G, A) \xrightarrow{\operatorname{cor}_G^{\widetilde{G}}}$$
$$\to H_n(\widetilde{G}, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(S, A) \to \ldots,$$

где δ_n — некоторый связывающий гомоморфизм (аналогично для когомологий).

Пусть $G = G_1 \times G_2$ — прямое произведение групп G_1 и G_2. Если $X^{(1)}$ — некоторый G_1-модуль, $X^{(2)}$ — G_2-модуль, то тензорное произведение $X^{(1)} \otimes X^{(2)}$ обладает естественной структурой G-модуля: $(x_1 \otimes x_2)(g_1, g_2) = x_1 g_1 \otimes x_2 g_2$. Если модули $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ свободны над G_1 и G_2 соответственно, то $X^{(1)} \otimes X^{(2)}$ — свободный G-модуль. Пусть $(X_n^{(1)}, d_n^{(1)})$ и $(X_n^{(2)}, d_n^{(2)})$ — свободные резольвенты тривиального модуля $\mathbf{Z}$ над G_1 и G_2. Рассмотрим G-модули $X_n = \bigoplus_{k+l=n} X_k^{(1)} \otimes X_l^{(2)}$ и гомоморфизмы d_n: $X_n \to X_{n-1}$, определенные равенством

$$d_n(x_1 \otimes x_2) = d_k^{(1)} x_1 \otimes x_2 + (-1)^k x_1 \otimes d_l^{(2)} x_2,$$
$$x_1 \in X_k^{(1)}, \quad x_2 \in X_l^{(2)}, \quad k + l = n.$$

Тогда (X_n, d_n) — свободная резольвента тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$ и

$$H_n(G_1 \times G_2, \mathbf{Z}) = \Big(\bigoplus_{k+l=n} H_k(G_1, \mathbf{Z}) \otimes H_l(G_2, \mathbf{Z})\Big) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(H_k(G, \mathbf{Z}), H_l(G_2, \mathbf{Z}))$$

(во втором слагаемом участвует функтор Tor (см. [32], [62]); если группы гомологий $H_*(-, \mathbf{Z})$ хотя бы одной из групп G_1 или G_2 не имеют кручения, то второе слагаемое равно нулю).

Пусть G — свободная абелева группа, $G = \bigoplus_I G_i$, где G_i — бесконечная циклическая с порождающим x_i. Для каждой группы G_i имеется свободная резольвента

$$0 \to \mathbf{Z}G_i \xrightarrow{d^{(i)}} \mathbf{Z}G_i \to \mathbf{Z} \to 0,$$

где $d^{(i)}$ — умножение на $x_i - 1$. Тензорное произведение этих резольвент изоморфно внешней алгебре $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{Z}G}(G)$ группы G над кольцом $\mathbf{Z}G$. Дифференциал d_n на свободных порождающих $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$

однородной компоненты Λ_n действует по формуле

$$d_n(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}) = \\ = \sum_{j=n}^{1} (-1)^{n-j} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{x}_{i_j} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}(x_{i_j} - 1),$$

где $\hat{x}_{i_j}$ означает пропуск x_{i_j}. Если G имеет конечный ранг r, то $H_n(G, \mathbf{Z}) = 0$ при $n > r$ и $H_n(G, \mathbf{Z})$ — свободная абелева группа ранга $\binom{r}{n}$ при $0 \leqslant n \leqslant r$.

Теоремы об универсальных коэффициентах: для любого тривиального G-модуля A имеют место изоморфизмы

$$H_n(G, A) \simeq H_n(G, \mathbf{Z}) \otimes A \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-1}(G, \mathbf{Z}), A),$$
$$H^n(G, A) \simeq \operatorname{Ext}(H_{n-1}(G, \mathbf{Z}), A) \oplus \operatorname{Hom}(H_n(G, \mathbf{Z}), A).$$

Эти формулы подчеркивают особую роль $\mathbf{Z}$ как модуля коэффициентов. Вторая формула показывает, что когомологии в случае тривиального модуля коэффициентов сводятся к гомологиям. В качестве следствия имеем: если группы $H_n(G, \mathbf{Z})$ — свободные абелевы, то

$$H^n(G, \mathbf{Z}) \simeq \operatorname{Hom}(H_n(G, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}).$$

Укажем топологическую интерпретацию групп гомологий. Пусть X — связное локально связное топологическое пространство и G — его фундаментальная группа. Если X асферично (т. е. если его гомотопические группы, начиная со второй, тривиальны), то имеет место изоморфизм

$$\alpha_n\colon H_n(X) \to H_n(G, \mathbf{Z}),$$

где слева стоят группы гомологий топологического пространства X, а справа — гомологии группы G, определенные чисто алгебраически. Для любой абстрактной группы G такое пространство X существует и единственно с точностью до гомотопической эквивалентности. Его называют пространством $K(G, 1)$ или *классифицирующим пространством* группы G. Например, если G — свободная группа, то $K(G, 1)$ — букет окружностей, если G — свободная абелева группа ранга r, то $K(G, 1)$ есть r-мерный тор, если G — группа крашеных кос (см. п. 4.4), то $K(G, 1)$ — подпространство n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, состоящее из точек $(z_1, \ldots, z_n)$ с различными z_i. Изоморфизмы α_n позволяют привлекать к вычислению групп $H_n(G, \mathbf{Z})$ топологические соображения.

Рассмотрим когомологии в малых размерностях. Пусть $G = A \rightthreetimes B$ — полупрямое произведение абелевой группы A и группы B. Обозначим через I группу

автоморфизмов группы G, действующих тождественно на A и в факторгруппе G/A. Если $\alpha \in I$, то для любого $b \in B$ имеем $\alpha(b) = ba_b$, где $a_b \in A$. Функция $f\colon B \to A$, определенная равенством $f(b) = a_b$, является скрещенным гомоморфизмом, причем если α — внутренний автоморфизм, соответствующий элементу $a \in A$, то f — главный скрещенный гомоморфизм. Это устанавливает изоморфизм между группой $H^1(B, A)$ и факторгруппой I по подгруппе внутренних автоморфизмов, индуцированных элементами $a \in A$. Если $\alpha \in I$, то $\alpha(B)$ — дополнение A в G, поэтому $H^1(B, A)$ можно интерпретировать как факторгруппу группы всевозможных дополнений по подгруппе, состоящей из дополнений, сопряженных B с помощью элементов $a \in A$.

Пусть снова B — произвольная группа и A — некоторый B-модуль. Рассмотрим всевозможные расширения

$$1 \to A \to G \to B \to 1,$$

в которых сопряжения элементами из G индуцируют на A данную структуру B-модуля. Два таких расширения с группами G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $G_1 \to G_2$, тождественный на подгруппе A и факторгруппе $B = G/A$. Рассмотрим далее теоретико-множественное сечение $\iota\colon B \to G$ ($\iota(1) = 1$). Отображение $f\colon B \times B \to A$, определенное равенством

$$\iota(b_1 b_2) = \iota(b_1)\,\iota(b_2)\, f(b_1, b_2),$$

позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами группы $H^2(B, A)$ и классами эквивалентных расширений группы A с помощью группы B. Нулевому элементу группы $H^2(B, A)$ соответствует полупрямое произведение $A \rightthreetimes B$.

Собственно, изложенные выше факты были одной из мотивировок введения групп когомологий абстрактной группы.

Рассмотрим гомологии в малых размерностях. Для любой группы G имеет место изоморфизм $H_1(G, \mathbf{Z}) \simeq G/G'$. Действительно, умножая резольвенту Грюнберга тензорно на $\mathbf{Z}$, получим, что $H_1(G, \mathbf{Z}) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$, где $\mathfrak{g}$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbf{Z}G$. Отображение $gG' \mapsto (g-1) + \mathfrak{g}^2$ устанавливает изоморфизм

$G/G' \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$. Если $G = F/N$, где F — свободная группа, то

$$H_2(G, \mathbf{Z}) \simeq N \cap F'/[N, F] \quad (\textit{формула Хопфа}).$$

Для конечной группы G группу $H_2(G, \mathbf{Z})$ называют *мультипликатором Шура* группы G. Это один из важных инвариантов конечных простых групп.

Теоретико-групповую интерпретацию имеет также группа $H_4(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Если G — произвольная группа без инволюций, то

$$H_4(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq T(N'/[N', F])$$

(Кузьмин Ю. В.//ДАН СССР, 1987.— Т. 196, №2.— С. 267—270). Здесь, как и раньше, $G = F/N$, где F — свободная группа. Эта формула позволяет обнаружить 2-кручение в свободных группах некоторых многообразий, заданных коммутаторными тождествами (например, в свободных центрально-разрешимых группах).

Строение группы связано и с ее гомологическими свойствами. Пусть G_1 и G_2 — произвольные группы. Если гомоморфизм φ: $G_1 \to G_2$ индуцирует изоморфизм $H_1(G_1, \mathbf{Z}) \to H_1(G_2, \mathbf{Z})$ и эпиморфизм $H_2(G_1, \mathbf{Z}) \to H_2(G_2, \mathbf{Z})$, то φ индуцирует изоморфизм колец Ли $L(G_1) \to L(G_2)$, построенных по нижнему центральному ряду групп G_1 и G_2 (Stallings J.//J. Algebra. — 1965. — N 2. — P. 170—181).

Если группы G_1 и G_2 конечны и индуцированные гомоморфизмы $H_n(G_1, \mathbf{Z}) \to H_n(G_2, \mathbf{Z})$ — изоморфизмы, то φ — также изоморфизм. В этом смысле конечная группа определяется своими гомологиями (Culler M.// Proc. Amer. Math. Soc., 1978. — V. 72, N 1. — P. 218—220).

Конечная группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого простого делителя p порядка группы G и любого простого нетривиального G-модуля A $(pA = 0)$ имеем $H^n(G, A) = 0$ для всех $n \geqslant 0$ (Stammbach U.//J. Pure and Appl. Algebra. — 1977. — N 11. — P. 293—301).

Введем обозначение $H(G) = \oplus H^{2n}(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, $H(G)$ — коммутативная подалгебра $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-алгебры $H^*(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

Размерность Крулля алгебры $H(G)$ совпадает с максимальным рангом элементарных абелевых p-подгрупп группы G (*теорема Квиллена*).

Гомологическая алгебра дает теории групп такие важные характеристики как размерность и эйлерова характеристика. *Гомологическая размерность* $\operatorname{hd} G$ группы G определяется как наименьшее число d такое, что для любого G-модуля A имеют место равенства $H_n(G, A)=0$ при $n > d$. Аналогично определяется *когомологическая размерность* $\operatorname{cd} G$ (для счетных группы $\operatorname{cd} G \leqslant \operatorname{hd} G + 1$).

Группа G свободна тогда и только тогда, когда $\operatorname{cd} G = 1$. Отсюда вытекает, что группа без кручения, содержащая свободную подгруппу конечного индекса, сама свободна (*теорема Столлингса—Суона*).

Чистым рангом $\operatorname{pr} A$ абелевой группы A называют $\dim_{\mathbf{Q}} A \otimes \mathbf{Q}$. Если группа G разрешима, то ее чистый ранг — это, по определению, сумма рангов факторов ее ряда коммутантов.

Для разрешимой группы G имеем $\operatorname{cd} G = \operatorname{pr} G < \infty$ тогда и только тогда, когда G — конструируемая группа без кручения (*теорема Гилденхьюза—Крофоллера—Штребеля*).

Класс *конструируемых групп* определяется как наименьший класс групп, содержащий единичную группу и замкнутый относительно конечных расширений и HNN-расширений, в которых базовая группа и ассоциированные подгруппы конструируемы.

Эйлерова характеристика группы G определяется равенством

$$\chi(G) = \sum_n (-1)^n \dim_{\mathbf{Q}} H_n(G, \mathbf{Q}).$$

Для того чтобы определение имело смысл, надо потребовать, чтобы число слагаемых в правой части было конечно и чтобы все слагаемые были конечны. Первое достигается наложением условия $\operatorname{hd} G < \infty$. Для выполнения второго условия достаточно потребовать существования резольвенты тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$, состоящей из конечно порожденных проективных G-модулей (модуль проективен, если он изоморфен прямому слагаемому свободного модуля). Группы, удовлетворяющие этим двум условиям, называются *группами типа FP*. Если H — подгруппа конечного индекса в группе G, то $\chi(H) = |G:H|\chi(G)$. Это свойство позволяет определить эйлерову характеристику для *группы типа VFP*, т. е. для групп G, которые

обладают подгруппой конечного индекса H типа FP,

$$\chi(G) = \frac{\chi(H)}{|G:H|}.$$

При таком определении $\chi(G)$ становится рациональным, не обязательно целым числом.

а) Если простое число p делит знаменатель $\chi(G)$, то в G есть элементы порядка p. Например, $\chi(SL(2, \mathbf{Z})) = -1/12$, а потому в $SL(2, \mathbf{Z})$ есть элементы порядка 2 и 3.

б) Если p^k делит знаменатель $\chi(G)$, то в G есть подгруппа порядка p^k (*теорема Брауна*). Если группа G конечна, то $\chi(G) = 1/|G|$, поэтому для конечной группы G теорема Брауна превращается в первую теорему Силова.

в) Пусть $1 \to A \to G \to B \to 1$ — короткая точная последовательность групп, в которой группы A и B являются группами типа VFP. Если G почти без кручения, то она является группой типа VFP и $\chi(G) = \chi(A)\chi(B)$.

г) Пусть $1 \to A \to G \to B \to 1$ — такое групповое расширение, что группа A не имеет кручения и является группой типа VFP, а B есть p-группа. Если $p \nmid \chi(A)$, то расширение расщепляется.

4.3. Уравнения в группах. *Уравнением* в теории групп называют выражение вида

$$v(\bar{g}, \bar{y}) = 1, \qquad (*)$$

где $v(\bar{g}, \bar{y}) \underset{\text{def}}{=} v(g_1, g_2, \ldots, g_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — групповое слово от элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ (коэффициентов) данной группы G, над которой рассматривается уравнение, и неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Допустима также запись уравнения в виде $v(\bar{g}, \bar{y}) = w(\bar{f}, \bar{y})$, эквивалентная записи $v(\bar{g}, \bar{y}) w(\bar{f}, \bar{y})^{-1} = 1$.

Решением уравнения $(*)$ в группе $H \geqslant G$ называют набор элементов $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ группы H, для которого $v(\bar{g}, \bar{h}) = 1$ — верное равенство. Говорят, что уравнение $(*)$ *разрешимо над группой* G, если оно имеет решение в некоторой группе $H \geqslant G$.

Пусть $G(Y) = G * F(Y)$ — свободное произведение группы G и свободной группы $F(Y)$ счетного ранга над $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Левую часть произвольного уравнения $(*)$ можно считать элементом группы $G(Y)$.

Считаем, что слово $v(\bar{g}, \bar{y})$ циклически редуцировано как элемент группы $G(Y)$ и включает в свою запись хотя бы одну переменную y_i.

Очевидным образом вводится понятие системы уравнений

$$v_i(\bar{g}, \bar{y}) = 1, \quad i \in I, \qquad (**)$$

над данной группой G, решения системы (**) над группой G и т. д.

Система уравнений (**) разрешима над G в том и только том случае, когда группа G вложена в группу $\bar{G} = G(Y)/\langle\langle\{v_i(\bar{g}, \bar{y}) \mid i \in I\}\rangle\rangle$ естественным гомоморфизмом $G \to \bar{G}$.

Пусть α_{ij} означает сумму показателей степеней, с которыми неизвестная y_j входит в запись слова v_i. Система (**) называется *неособенной*, если строки матрицы $A = (\alpha_{ij})$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$. Основной нерешенный в настоящее время вопрос в теории уравнений — о справедливости *гипотезы Кервера—Лауденбаха—Хоуви*: всякая неособенная система уравнений (**) разрешима над любой группой G.

Пример. Если g, f — элементы произвольной группы G, имеющие разные порядки, то уравнение $ygy^{-1} = f$ не разрешимо над G. Есть предположение, что над группой без кручения разрешимо любое уравнение.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс уравнений определенного типа. Говорят, что уравнения класса $\mathcal{K}$ *алгоритмически разрешимы* в группе G, если существует алгоритм, определяющий, имеет ли произвольное уравнение из $\mathcal{K}$ над группой G решение в группе G или не имеет.

Рассмотрим уравнения в свободных группах. При циклически несократимых словах $f, g_1, g_2 \in F$ уравнения $y^k = f$, $k \in \mathbf{N}$, $yg_1y^{-1} = g_2$ решаются в F графически. Как отмечалось на с. 99, в первом случае решение $y = a$ существует и единственно, если $f \underline{\circ} \underbrace{aa \ldots a}_{k}$, во втором случае решение $y = b$ осуществляет циклическую перестановку g_1 до g_2, а общее решение имеет вид $y = bc$, где $c \in C_F(g_1)$. Графическое решение допускают в свободной группе F также уравнения $[y_1, y_2] = f$ и $y_1^2y_2^2 = g$. Это следует из таких фактов: 1) циклически несократимый элемент $f \in F$ является коммутатором в F в том и только том

случае, если f совпадает с циклической перестановкой слова вида $r \circeq uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1}$ (заметим, что $uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1} = [uw^{-1}, wv]$); циклически несократимый элемент вида $s = f_1^2 f_2^2$ есть циклическая перестановка одного из слов вида u^2v^2, $uvwu^{-1}wv$, $u^2wv^2w^{-1}$.

Уравнение (*) называется *квадратичным*, если в запись его левой части каждая неизвестная из $\bar{y}$ входит в точности дважды, причем оба раза в степенях $+1$ или -1. Существует достаточно простой алгоритм, определяющий разрешимость квадратичного уравнения (*) в свободной группе. При этом можно рассматривать обобщение уравнения (*), допуская для коэффициентов параметры как показатели степеней. Параметры могут принимать целочисленные значения, причем эта возможность ограничивается наложением на них системы линейных неравенств с целыми коэффициентами. Формально обобщенное уравнение, о котором идет речь, имеет вид $u_0 g_1^{\lambda_1} u_1 g_2^{\lambda_2} \ldots$ $\ldots g_k^{\lambda_k} u_k = 1$, где $u_i \in G(Y)$, $g_i \in G$, λ_i — целочисленные параметры, связанные системой неравенств $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \beta_{ti}\lambda_i \leqslant 0 \mid \beta_{ti} \in \mathbf{Z} \right\}$. Кроме того, квадратичные уравнения алгоритмически разрешимы в свободных произведениях групп и в группах с условиями малых сокращений (Comerford L. P., Edmunds C. C.// J. Algebra. — 1981. — V. 68, N 2. — P. 276—297; Contemp. Math. — 1984. — V. 33. — P. 159—196; Comerford L. P.//J. Algebra.— 1981.— V. 69.— P. 175—185).

Любое уравнение (*) алгоритмически разрешимо во всякой свободной группе (Маканин Г. С.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 46, № 6. — С. 1199—1273).

Известно описание общего решения произвольного уравнения или системы уравнений от одной неизвестной в свободной группе. Общее решение представлено конечным множеством параметрических слов вида $ab^\lambda c$ с целочисленным параметром λ. Подробнее см. в [30].

Пример. Уравнение $[[x_1, y_1], [x_2, y_1]] = 1$ имеет в свободной группе $F(x_1, x_2)$ общее решение, задаваемое словами x_1^k, x_2^k, $\left(x_1^{-1}x_2\right)^k$, где k принимает произвольное значение в $\mathbf{Z}$.

Уравнение от двух или более переменных, вообще говоря, уже не допускает общего решения, записываемого конечным множеством слов с целочисленными параметрами. Ничего не дает также допущение параметров, принимающих значения в самой свободной группе.

Пример. Уравнение $[y_1, y_2] = [x_1, x_2]$ в свободной группе $F(x_1, x_2)$ имеет общее решение, задаваемое бесконечной последовательностью пар слов: (x_1, x_2), $\left(x_1x_2^{k_1}, x_2\right)$, $\left(x_1x_2^{k_1}, x_2\left(x_1x_2^{k_1}\right)^{l_1}\right)$, $\left(x_1x_2^{k_1}\left(x_2\left(x_1x_2^{k_1}\right)^{l_1}\right)^{k_2}, x_2\left(x_1x_2^{k_1}\right)^{l_1}\right)$, ..., которую нельзя определить через конечное множество слов с целочисленными параметрами.

Уравнения вида $v(\bar{y}) = g$, $g \in G$, называют *бескоэффициентными*. Пусть $G = F(\mathfrak{C})$ — свободная группа некоторого многообразия $\mathfrak{C}$. Если ранг $F(\mathfrak{C})$ не меньше, чем число неизвестных в $v(\bar{y})$, то можно определить элемент $v(\bar{x}) \in F(\mathfrak{C})$, заменяя в $v(\bar{y})$ различные неизвестные различными элементами базиса X группы $F(\mathfrak{C})$. Бескоэффициентное уравнение имеет решение в группе $F(\mathfrak{C})$ в том и только том случае, если элемент g является образом элемента $v(\bar{x})$ при каком-нибудь эндоморфизме группы $F(\mathfrak{C})$. Вопрос о существовании эндоморфизма группы G, переводящего произвольный элемент $g \in G$ в произвольный элемент $f \in G$, называют *проблемой эндоморфной сводимости* в группе G. Для групп, свободных в многообразиях, эта проблема называется также *проблемой подстановки*. Об ее алгоритмических аспектах см. далее и в [47], [55].

Пусть $F = F(X)$ — свободная группа. Верны следующие утверждения о разрешимости в ней бескоэффициентных уравнений. 1) Уравнение $[y_1, y_2] = y_3^k$, $k \geqslant 2$, имеет в F решение только при $[y_1, y_2] = y_3 = 1$. 2) Уравнение вида $[y_1, y_2][y_3, y_4] \ldots [y_{m-1}, y_m] = [x_1, x_2] \ldots [x_{n-1}, x_n]$ имеет решение в F тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$. 3) Уравнение вида $[y_1, y_2][y_3, y_4] \ldots [y_{m-1}, y_m] = [x_1, x_2]^k$, $k \geqslant 2$, имеет решение в F, если $m \geqslant 2[k/2] + 2$, в частности, $\left[x_1x_2x_1^{-1}, x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-2}\right]\left[x_2^{-1}x_1x_2, x_2^2\right] = \left[x_1, x_2\right]^3$. 4) Уравнение $y_1^2y_2^2y_3^2 = \left[x_1, x_2\right]$ имеет решение в F: $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_2^{-1}x_1^{-1}x_2$, $y_3 = x_2^{-1}$. 5) Ранг подгруппы, порожденной в F компонентами решения уравнения вида

$y_1^k y_2^k \ldots y_m^k = 1$, $k \geqslant 2$, не превышает $m/2$. 6) Ранг подгруппы, порожденной в F компонентами решения уравнения вида $y_1^{k_1} y_2^{k_2} y_3^{k_3} = 1$, $k_i \geqslant 2$, не превышает 1. 7) Если в уравнении $v(\bar{y}) = v(y_1, \ldots, y_m) = f^k$, $k \geqslant 2$, слово $v(\bar{y})$ не является истинной степенью и не входит ни в какой базис (т. е. не является примитивным элементом) группы $F(Y)$, то компоненты любого решения $\bar{a}$ вместе с элементом f порождают в $F(Y)$ подгруппу ранга, не превосходящего $m - 1$.

Определенный способ записи общего решения произвольного бескоэффициентного уравнения в свободной группе предложен в (Разборов А. А.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 4. — С. 779—832).

Пусть $\Gamma = \Gamma(a)$ — однопорожденный свободный неассоциативный группоид. Его элементами являются слова a, a^2, $(a^2)a$, $a(a^2)$, $(a^2)(a^2)$ и т. п. Каждое из них имеет естественную длину и однозначно определяется расстановкой скобок. Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольный набор переменных или элементов какой-нибудь группы, то элемент $\gamma \in \Gamma$ длины n показывает, как нужно расставить скобки в $z_1 z_2 \ldots z_n$, чтобы получить сложный коммутатор, обозначаемый через $[z_1, z_2, \ldots, z_n]_\gamma$. Например, $[z_1, z_2, z_3, z_4]_{(a^2)(a^2)} = [[z_1, z_2], [z_3, z_4]]$. Пусть $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(\tilde{a})$ — однопорожденный свободный коммутативный неассоциативный группоид, $\Gamma \to \tilde{\Gamma}$, $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$, — естественный гомоморфизм. Уравнение $[y_1, y_2, \ldots, y_n]_\gamma = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\delta$, $\gamma, \delta \in \Gamma$, разрешимо в свободной группе $F = F(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\gamma} = \tilde{\delta}$. При этом компоненты любого решения $\bar{f}$ составляют базис в подгруппе $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant F$ (Rips E.//Isr. J. Math.— 1981.— V. 39, N 4. — P. 326—340).

Любая бесконечная система уравнений над свободной группой от конечного числа переменных эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме (Губа В. С.//Мат. заметки. — 1986. — Т. 40, № 3. — С. 321—324).

Рассмотрим понятие аппроксимируемости уравнений. Пусть φ: $G \to H$ — некоторый эпиморфизм. Уравнению $v(\bar{g}, \bar{y}) = 1$ с коэффициентами из G сопоставим уравнение $v(\bar{h}, \bar{y}) = 1$ с коэффициентами $\bar{h} = \varphi(\bar{g})$

из H. Разрешимость первого из них в G влечет разрешимость второго в H. Первое уравнение называется *аппроксимируемым в классе* групп $\mathscr{K}$, если его неразрешимость в G влечет неразрешимость второго уравнения для какого-либо эпиморфного образа $H \in \mathscr{K}$ группы G.

Пока не известно, будет ли класс $\mathscr{F}$ всех конечных групп аппроксимировать любое уравнение с коэффициентами из свободной группы F. Известно лишь следующее. 1) Уравнение вида $ygy^{-1} = f$, g, $f \in F$, аппроксимируется любым классом $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп. 2) Уравнение вида $y_1^k = f$, $f \in F$, аппроксимируется классом $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп при условии $p \nmid k$. 3) Уравнение $y_1^2 y_2^2 y_3^2 = f$, $f \in F$, не всегда аппроксимируется классом $\mathscr{F}_S$ конечных простых групп, поскольку любой элемент конечной простой группы K представим как произведение $h_1^2 h_2^2 h_3^2$, $h_i \in K$. 4) Уравнение вида $[y_1, y_2] \ldots [y_{2n-1}, y_{2n}] = f$, $f \in F$, где f не представим в F_n как произведение n коммутаторов, не аппроксимируется классом всех нильпотентных групп, так как любой элемент n — порожденной нильпотентной группы представим как произведение n коммутаторов. 5) Уравнение вида $[y_1, y_2] = f^k$, $1 \neq f \in F$, $k \geqslant 2$, не аппроксимируется классом конечных простых групп $\mathscr{F}_S$, так как в любой группе $H \in \mathscr{F}_S$ все элементы являются коммутаторами.

Рассмотрим вопрос о разрешении уравнений над группами. Свободные конструкции позволяют решать над любой группой G уравнения вида $y_1^k = g$, $k \in \mathbf{N}$, $g \in G$, и вида $y_1 g_1 y_1^{-1} = g_2$, g_1, $g_2 \in G$, при условии, что $|g_1| = |g_2|$.

Из теоремы Магнуса (с. 114) легко следует, что над свободной группой разрешимо любое уравнение. Любое уравнение разрешимо над любой локально индикабельной группой, в частности, над произвольной группой с одним соотношением без кручения (Бродский С. Д.//Сиб. мат. ж. — 1984. — Т 25, № 2. — С. 84—103).

Если группа G вложима в связную компактную группу Ли, то любое неособенное уравнение $v(\bar{g}, y) = 1$ (т. е. такое уравнение, сумма показателей степеней при y в левой части которого не равна нулю) разрешимо над группой G. В частности, любое

неособенное уравнение разрешимо над произвольной конечной; или более общо, финитно аппроксимируемой группой.

Если все показатели степеней, с которыми неизвестная y входит в запись части уравнения $v(\bar{g}, y) = 1$, имеют один знак, то указанное уравнение разрешимо над любой группой G. Уравнение $v(\bar{g}, y)^k = 1$ при $k \geqslant 2$ разрешимо над любой группой G, не имеющей элементов порядков 2, 3 (Егоров В. Н.//Иваново, 1983, 25 с., № 1127-83 Деп.). Для неособенного уравнения $v(\bar{g}, y) = 1$ существует такое натуральное число k, что уравнение $v(\bar{g}, y)^k = 1$ разрешимо над любой группой G. При этом k можно подобрать таким образом, что оно будет не больше числа $4 \sum\limits_i |\alpha_i| + \sum\limits_i \alpha_i$, где α_i — показатели степеней y в записи $v(\bar{g}, y)$. Как мы видим, k не зависит от G (Makar-Limanov L. Makar-Limanov O.//J. Algebra.— 1985. — V. 93, N 1. — P. 165—168). Уравнение $g_1 y g_2 y g_3 y^{-1} = 1$ разрешимо над любой группой G (Howie J.//Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1981. — V. 26, N 2. — P. 89—96).

Группа G называется *алгебраически замкнутой* (а. з.), если любая конечная система уравнений над G, разрешимая над G, имеет решение в самой группе G.

Любая группа вложима в а. з. группу той же мощности. Любая а. з. группа проста.

Группа G называется *экзистенциально замкнутой* (э. з.), если любая конечная система уравнений и неравенств, разрешимая над G (при естественном определении неравенства $v(\bar{g}, \bar{y}) \neq w(\bar{f}, \bar{y})$ и его разрешимости), разрешима уже в самой группе G. Однако это определение по существу не дает ничего нового, так как неединичные а. з. группы являются также э. з.

Рассмотрим уравнения в разрешимых группах. Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — ее мальцевская база. Произвольному элементу $g = u_1^{\alpha_1(g)} u_2^{\alpha_2(g)} \ldots u_r^{\alpha_r(g)}$ взаимно однозначно соответствует строка $(\alpha_1(g), \alpha_2(g), \ldots, \alpha_r(g))$ целочисленных координат. Введем для произвольной переменной y_i строку ее координат $(\alpha_1(y_i), \ldots, \alpha_r(y_i))$ с неопределенными компонентами. Любому значению переменной y_i в группе G отве-

чает значение введенной строки в $\mathbf{Z}^r$. Поскольку при групповых операциях строки координат преобразуются по полиномиальным формулам, зависящим только от выбора мальцевской базы, любое уравнение с коэффициентами из G эквивалентно некоторой системе диофантовых уравнений от неопределенных компонент неизвестных $\alpha_i(y_j)$, $i=1, 2, \ldots, r$; $j=1, 2, \ldots$

Для любого диофантова уравнения D можно построить бескоэффициентное уравнение в свободной нильпотентной группе $G=F_n(\mathfrak{N}_k)$ достаточно большого ранга n при $k \geqslant 9$, имеющее решение в G в том и только том случае, если уравнение D разрешимо в целых числах. Аналогичное утверждение верно, если в качестве G брать свободную разрешимую группу ступени $l \geqslant 2$ достаточно большого ранга (Р о м а н ь к о в В. А.//Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 457—471; Сиб. мат. ж. — 1979. — Т. 20, № 3. — С. 671—673).

П р и м е р. Существуют уравнения над нильпотентными группами, не разрешимые в бо́льших нильпотентных группах. Таковы, скажем, уравнения вида $yg^ky^{-1}=g^l$, где $g^k \neq g^l$. Как правило, подобные примеры легко строятся также для многообразий групп.

Пусть K — связный 2-мерный CW-комплекс, для которого $\pi_1(K) \simeq G$. Сопоставим каждому ребру $e \in E(L) \setminus E(K)$ некоторого бо́льшего связного комплекса $L \supset K$ переменную $y=y(e)$, считая, что $y(e^{-1})=y^{-1}$. Свяжем с каждой гранью $D \in D(L) \setminus D(K)$ слово $v(D)$, получающееся при прохождении граничного пути $p \in \partial D$. Получим систему уравнений $\{v(D)=1 \mid D \in D(L) \setminus D(K)\}$ над G. Наоборот, по любой системе уравнений можно построить такую пару комплексов $L \supset K$, что описанная конструкция приводит к данной системе уравнений. Неособенность этой системы равносильна равенству $H_2(K, L)=0$. Она разрешима над G тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\pi_1(K) \simeq G \to \pi_1(L)$ является вложением. Переходя к факторкомплексу $M=L/K$, для которого $H_2(M)=0$, можно дать другую равносильную формулировку разрешимости неособенной системы уравнений над G на языке сферических диаграмм (см. H o w i e J.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1984. — V. 96, N 2. — P. 257—270).

4.4. Алгоритмические вопросы. Две основные алгоритмические проблемы могут быть определены следующим образом.

Проблема равенства (Ден, 1910 г.). Пусть группа G задана конечным кодом. Существует ли алгоритм, выясняющий по двум произвольным групповым словам от порождающих элементов группы, определяют ли они один и тот же элемент группы?

Проблема изоморфизма (Титце, 1908 г.). Пусть $\mathscr{K}$ — класс всех конечных групповых кодов. Существует ли алгоритм, выясняющий по любой произвольной паре кодов из $\mathscr{K}$, определяют ли они изоморфные группы?

Более формальные формулировки этих и других алгоритмических проблем используют теорию нумераций и теорию рекурсивных множеств. Именно, пусть $G = \langle X \| R \rangle$ — конечный код группы. Тогда G является факторгруппой свободной группы $F(X)$ с базой X по нормальной подгруппе N, порожденной множеством R. Пусть α: $F(X) \to \mathbf{N}$ — лексикографическая нумерация элементов $F(X)$. Для группы G проблема равенства разрешима тогда и только тогда, когда множество $\alpha(N)$ рекурсивно. Это определение разрешимости проблемы равенства для группы G не зависит ни от выбора гёделевой (рекурсивно перечислимой) нумерации элементов группы $F(X)$, ни от выбора конечного кода группы G.

Пусть $\mathscr{K}$ — рекурсивно перечислимый класс конечных групповых кодов, β: $\mathscr{K} \to \mathbf{N}$ — инъективная гёделева нумерация кодов из $\mathscr{K}$ и M — подмножество $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, состоящее из всех таких пар (k, l), для которых коды $\beta^{-1}(k)$ и $\beta^{-1}(l)$ определяют изоморфные группы. Проблема изоморфизма для класса $\mathscr{K}$ разрешима в том и только в том случае, когда множество M является рекурсивным.

Другие подходы к постановке алгоритмических задач можно формулировать на языке алгоритмов над словами (А. А. Марков), на языке канонических систем Поста, на языке машин Тьюринга. В настоящее время подавляющее большинство математиков верят в тезис о том, что все эти подходы являются эквивалентными.

В классическом варианте проблема равенства ставится для конечно определенной группы. Для коррект-

ности ее рассмотрения необходимо и достаточно, чтобы группа была задана эффективным способом. Так, проблема может быть поставлена для конечно порожденной группы с рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношение (точнее для кода такого вида). Такие группы называются *рекурсивно определенными.* Отметим на неформальном уровне некоторые другие алгоритмические проблемы. Будем говорить «элемент», имея в виду его запись через порождающие группы. Поскольку вопросы алгоритмические, будем опускать слова «существует ли алгоритм...».

Проблема сопряженности (Ден). Сопряжены ли два произвольных элемента группы?

Проблема вхождения (Нильсен, Магнус). Входит ли произвольный элемент в подгруппу, заданную порождающими элементами?

Проблема автоморфной сопряженности (Уайтхед). Является ли один из двух произвольных элементов группы автоморфным образом другого?

Проблема равенства в общем случае решена отрицательно: существует конечно определенная группа с неразрешимой проблемой равенства (*теорема Новикова*).

В основе конструкции Новикова лежит результат Тьюринга о неразрешимости проблемы равенства для полугрупп с сокращением. Конструкция примера в дальнейшем была значительно упрощена — группы Буна (B o o n e W. W.//Ann. Math. — 1959. — V. 70. — P. 207—265), группы с нормальным базисом (см. [6]), группы Бриттона (B r i t t o n J. L.//Ann. Math. — 1963. — V. 77. — P. 16—32); последние строятся с использованием свободных конструкций.

Группа с одним соотношением всегда имеет разрешимую проблему равенства (*теорема Магнуса*).

Не известно, разрешима ли проблема равенства в группе с двумя соотношениями.

Пусть $\mathfrak{m}$ — произвольная тьюрингова или табличная степень в иерархиях рекурсивно перечислимых множеств, тогда существует конечный код такой, что соответствующая степень множества $\alpha(N)$ равна $\mathfrak{m}$.

Примеры кодов групп с разрешимой проблемой равенства дает теория малых сокращений (см. п. 1.3).

Если код группы G удовлетворяет одному из условий $\mathscr{C}(6)$ или $\mathscr{C}'(1/5)$ (см. с. 118), то в группе G разрешима проблема равенства (*теорема Линдона*).

Результат Линдона является экстремальным, поскольку известно, что любая конечно определенная группа допускает код (его можно получить эффективно из данного конечного кода), в котором длина каждого куска не превышает $1/5$ длины соотношения. Разрешимость проблемы равенства в группах с малым сокращением вытекает из возможности применения к ним *алгоритма Дена* (либо его модификации), основанного на следующем факте: если несократимое слово w определяет единицу в группе G, то w содержит более $^1/_2$ некоторого соотношения из R. Алгоритм очевиден: длину w $(w=1)$ можно уменьшить, не изменяя его значения в G.

Конечно порожденная группа $G=\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ тогда и только тогда имеет разрешимую проблему равенства, когда выполнено одно из следующих условий:

а) существуют вложения $G \leqslant S \leqslant T$, где S — простая, T — конечно определенная группа;

б) G вложима в любую алгебраически замкнутую группу;

в) существует выполнимая формула первого порядка групповой сигнатуры $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что из $H \models \Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ для группы H следует вложимость G в H, продолжающая отображение $g_i \mapsto h_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Арифметическая структура множества $\mathfrak{M}$ всех конечно определенных групп с разрешимой проблемой равенства слов при любой гёделевой нумерации достаточно сложна:

а) множество $\mathfrak{M}$ не является рекурсивно перечислимым; более точно оно лежит в классе E_3 иерархии Клини—Мостовского [56];

б) не существует равномерного алгоритма, решающего проблему равенства во всех конечных кодах групп из класса $\mathfrak{M}$.

Приведем результаты, касающиеся марковских свойств, проблемы сопряженности и других алгоритмических вопросов.

а) Для любых двух тьюринговых степеней $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ в иерархии рекурсивно перечислимых множеств существует конечно определенная группа, для которой $\mathfrak{m}$ —

степень сложности проблемы равенства, а $\mathfrak{n}$ — проблемы сопряженности.

б) Группа с условием $\mathscr{C}(6)$ (или $\mathscr{C}'(1/5)$) имеет разрешимую проблему сопряженности.

в) Разрешимость проблемы сопряженности не переносится на конечные расширения (Горяга А. В., Киркинский А. С.//Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 4. — С. 393—406).

г) Не известно, разрешима ли проблема сопряженности в группах с одним соотношением.

Проблема вхождения неразрешима уже в группе $F_2 \times F_2$, а ее разрешимость не следует из условий малого сокращения.

Проблема изоморфизма любой данной конечно определенной группе неразрешима (*теорема Адяна*). Вопрос о разрешимости проблемы изоморфизма в классе групп с одним соотношением открыт.

Классический результат, утверждающий разрешимость проблемы автоморфной сопряженности для наборов элементов свободной группы, принадлежит Уайтхеду.

Пусть $\mathscr{C}$ — абстрактное групповое свойство, выполненное в некоторой конечно определенной группе G_1 и не выполняющееся в любой конечно определенной группе, содержащей фиксированную конечно определенную группу G_2. Такие свойства называют *марковскими*.

Если $\mathscr{C}$ — марковское свойство, то класс всех конечных кодов групп, обладающих свойством $\mathscr{C}$, не является рекурсивным; другими словами, свойство $\mathscr{C}$ алгоритмически нераспознаваемо (*теорема Адяна—Рабина*).

Марковскими являются следующие свойства: быть единичной, циклической, конечной, свободной, абелевой, нильпотентной, разрешимой группой и т. д.

Существует 3-ступенно разрешимая конечно определенная (в классе всех групп) группа с неразрешимой проблемой равенства (Харлампович О. Г.// ИАН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 4.— С. 854—873). Проблема равенства разрешима в многообразиях $\mathfrak{A}^2$ и $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ (см. [55] и Харлампович О. Г.// Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 4. — С. 481—501).

Для любого многообразия групп $\mathfrak{C}$, содержащего $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$, существует конечно определенная в $\mathfrak{C}$ группа с

неразрешимой проблемой равенства (Епанчинцев В. И., Кукин Г. П.//Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18, № 3. — С. 259—285).

Проблема равенства разрешима для свободных разрешимых групп, свободных полинильпотентных групп.

Проблема сопряженности разрешима в многообразии метабелевых групп, а также для свободных разрешимых и свободных полинильпотентных групп (см. [55]).

Проблема вхождения разрешима в многообразиях $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$ (см. [6]). Не известно, как решается проблема изоморфизма в классе метабелевых групп.

Связь между финитной аппроксимируемостью и разрешимостью проблемы равенства получается из следующих соображений. Пусть ФА-группа G задана конечным кодом. Тогда множество $\alpha(N)$ является рекурсивно перечислимым множеством. Пусть $\{N_i \mid i \in \in I\}$ — множество всех содержащих N нормальных подгрупп конечного индекса свободной группы F и β: $I \to \mathbf{N}$ — гёделева нумерация множества I. Так как G является ФА-группой, то $N = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$ и $\alpha(F \setminus N) = \bigcup\limits_{i \in I} \alpha(F \setminus N_i)$. По теореме о проекции рекурсивно перечислимого множества, отсюда следует, что множество $\alpha(F \setminus N)$ также рекурсивно перечислимо, а потому $\alpha(N)$ — рекурсивное множество. Следовательно, в группе G разрешима проблема равенства.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для конечно определенных групп из классов ФАС и ФАВ-групп.

Пусть G — конечно определенная группа. Тогда: 1) если G является ФА-группой, то в G разрешима проблема равенства, 2) если G является ФАС-группой, то в G разрешима проблема сопряженности, 3) если G является ФАВ$_{\text{к. п.}}$-группой, то в G разрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы.

Свойство ФА переносится на подгруппы, на прямые и свободные произведения, на конечные расширения. Сплетение $A \wr B$ групп A и B является ФА-группой тогда и только тогда, когда A и B — ФА-группы и выполнено одно из условий: 1) A — абелева группа,

2) B — конечная группа. Произвольная конечно порожденная линейная группа является ФА-группой. Конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью полициклической группы, является ФА-группой.

Свойство ФАВ переносится на свободные произведения и конечные расширения, но не переносится на прямые произведения. Произвольная почти полициклическая группа является ФАВ-группой.

О фундаментальных группах многообразий см., например, [38]. Это понятие было введено в 1892 г. Пуанкаре и дало основание для использования комбинаторной теории групп в топологии. Существующие в топологии проблемы алгоритмического характера, такие, как проблема гомеоморфизма, проблема гомотопической тривиальности путей (стягиваемости), проблема эквивалентности узлов, находят адекватное свое отражение в аналогичных проблемах для фундаментальных групп. Основная проблема топологической характеризации на поверхностях — это вопрос о стягиваемости замкнутой кривой в точку. Соответствующий алгоритм был построен Деном.

Решена проблема равенства для произвольной фундаментальной группы узла. В настоящее время усилиями Тёрстена и других авторов для широкого класса 3-многообразий также решена проблема равенства. Так как любая конечно определенная группа реализуема как фундаментальная группа 4-многообразия, то проблема стягиваемости для 4-многообразия неразрешима. Проблема гомеоморфизма неразрешима уже в классе триангулируемых 4-многообразий. Не существует алгоритма, распознающего пятимерную сферу.

Геометрическое решение проблемы равенства для группы кос почти очевидно. Проблема сопряженности для неё также имеет положительное решение. Проблема эквивалентности узлов пока не решена.

4.5. Связь с топологическими пространствами. Через $\pi_1(X)$ обозначим фундаментальную группу линейно связного топологического пространства X.

Примеры. 1) Пусть S^n есть n-мерная сфера, тогда $\pi_1(S^1) \simeq \mathbf{Z}$ и $\pi_1(S^n) = E$ (единичная группа) при $n \geqslant 2$. 2) Пусть $\mathbf{R}^2(n)$ — плоскость с n выколотыми точками, тогда $\pi_1(\mathbf{R}^2(n)) \simeq F_n$ — свободная группа ранга n. 3) Для «бутылки Клейна» K имеем $\pi_1(K) \simeq G$, где группа G задается кодом $\langle x_1, x_2 \| x_1x_2x_1x_2^{-1} = 1\rangle$.

Фундаментальная группа произведения двух пространств изоморфна прямому произведению их фундаментальных групп, т. е. $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств индуцирует гомоморфизм $f_*\colon \pi_1(X) \to$

$\to \pi_1(Y)$ их фундаментальных групп. Если f — гомотопическая эквивалентность, то f_* — изоморфизм.

Если X — деформационный ретракт Y, то $\pi_1(X) \simeq \simeq \pi_1(Y)$, в частности, если пространство Y стягиваемо, то $\pi_1(Y) = E$.

Пусть W_1, W_2 — линейно связные открытые подмножества пространства X такие, что $X = W_1 \cup W_2$ и $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ — линейно связно. Для всех рассматриваемых здесь фундаментальных групп выберем базисную точку $x_0 \in W_1 \cap W_2$, а через ι_{k*} обозначим индуцированные гомоморфизмы, соответствующие вложениям. Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(W_1) \arrow[dr, "\iota_{3*}"] & \\
\pi_1(W_1 \cap W_2) \arrow[ur, "\iota_{1*}"] \arrow[dr, "\iota_{2*}"'] & & \pi_1(X) \\
& \pi_1(W_2) \arrow[ur, "\iota_{4*}"'] &
\end{tikzcd}$$

является *выталкивающим квадратом* (push out square). Это значит, что для любой группы H, любой пары гомоморфизмов φ_i: $\pi_i(W_i) \to H$ $(i = 1, 2)$ таких, что $\iota_{1*}\varphi_1 = \iota_{2*}\varphi_2$, существует единственный гомоморфизм φ_3: $\pi_1(X) \to H$ такой, что $\iota_{3*}\varphi_3 = \varphi_1$, $\iota_{4*}\varphi_3 = \varphi_2$ (*теорема Зейферта—ван Кампена*).

Если в приведенной выше диаграмме группа $\pi_1(W_1 \cap W_2)$ естественно вложена в $\pi_1(W_1)$ и $\pi_1(W_2)$, то $\pi_1(X) \simeq \pi_1(W_1) *_{\pi_1(W_1 \cap W_2)} \pi_1(W_2)$.

Пусть X — пространство с выделенными гомеоморфными друг другу линейно связными подпространствами W_1, W_2. Пусть пространство $\bar{X}$ получается из X присоединением *ручки* $W \times [0, 1]$, основания которой $(W, \{0\})$ и $(W, \{1\})$ естественно отождествлены с W_1, W_2 соответственно. Если в приведенных условиях группы $\pi_i(W_i)$ естественно вложены в $\pi_1(X)$, то $\pi_1(\bar{X})$ есть HNN-расширение группы $\pi_1(X)$ с ассоциированными подгруппами $\pi_1(W_i)$, $i = 1, 2$.

Для любой группы G существует пространство X, для которого $\pi_1(X) \simeq G$.

Если Y — линейно связное T_1-пространство, G — группа, φ: $\pi_1(Y) \to G$ — гомоморфизм, то найдется вложение ι: $Y \to X$ такое, что $\pi_1(X) \simeq G$.

Для любой подгруппы $H \leqslant \pi_1(Y)$ существует накрывающее отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f_*(\pi_1(X)) = H$; а если $f\colon X \to Y$ — накрывающее отображение топологических пространств, то $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ — вложение (*теорема о накрывающих отображениях*).

Представим идею фундаментальной группы в ее комбинаторном виде. Рассматриваемые здесь комплексы и отображения предполагаются чисто комбинаторными и алгебраическими.

Граф или *одномерный комплекс* Γ состоит из множества вершин $V(\Gamma) \neq \varnothing$, ребер $E(\Gamma)$, инволюции $^{-1}\colon E(\Gamma) \to E(\Gamma)$, $e \mapsto e^{-1}$, для которой $e^{-1} \neq e$, $(e^{-1})^{-1} = e$, пары отображений α, ω: $E(\Gamma) \to V(\Gamma)$, где $\alpha(e)$ — начало ребра e, $\omega(e)$ — конец ребра e, согласованных с инволюцией, т. е. $\alpha(e^{-1}) = \omega(e)$, $\omega(e^{-1}) = \alpha(e)$. *Отображение* $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ графа Γ_1 в граф Γ_2 состоит из согласованных отображений $f_V\colon V(\Gamma_1) \to V(\Gamma_2)$, $f_E\colon E(\Gamma_1) \to E(\Gamma_2)$, т. е. $f_E(e^{-1}) = (f_E(e))^{-1}$, $f_V(\alpha(e)) = \alpha(f_E(e))$, $f_V(\omega(e)) = \omega(f_E(e))$. Если Γ_1 ориентирован, а f — отображение «на», то f индуцирует ориентацию на Γ_2. Графы и их отображения образуют категорию, снабженную функторами «вершины» и «ребра» в категорию множеств.

Путь в графе Γ — это упорядоченный набор ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$. Его *начало* $\alpha(p) \underset{\text{def}}{=} \alpha(e_1)$, *конец* $\omega(p) \underset{\text{def}}{=} \omega(e_n)$, *длина* n. Каждой вершине $v \in V(\Gamma)$ соответствует единичный путь 1_v из пустого множества ребер, для которого $\alpha(1_v) = \omega(1_v) \underset{\text{def}}{=} v$. По определению, *обратный* к пути $p = e_1, e_2, \ldots, e_n$ путь p^{-1} есть $e_n^{-1}, e_{n-1}^{-1}, \ldots, e_1^{-1}$.

Путь *замкнут*, если $\alpha(p) = \omega(p)$, *приведен*, если $e_i \neq e_{i+1}^{-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *прост*, если $\alpha(e_i) \neq \alpha(e_j)$ при $i \neq j$. *Произведение* p_1p_2 путей p_1 и p_2 определяется в случае, если $\omega(p_1) = \alpha(p_2)$, добавлением пути p_2 за путем p_1. Пути p_1 и p_2 называются *эквивалентными*, если от p_1 к p_2 можно перейти конечной последовательностью вычеркиваний и вставок соседей ee^{-1}. Каждый класс эквивалентности $[p]$ содержит единственный приведенный путь. Множество всех классов эквивалентности с индуцированной частичной операцией умножения образует *фундаментальный группоид* $\gamma(\Gamma)$. Отображение $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$

индуцирует гомоморфизм f_*: $\gamma(\Gamma_1) \to \gamma(\Gamma_2)$ фундаментальных группоидов. Если Γ линейно связен, то множество всех классов эквивалентности путей с началом и концом в фиксированной точке $x_0 \in \Gamma$ относительно умножения образуют *фундаментальную группу* $\pi_1(\Gamma)$, изоморфный тип которой не зависит от выбора x_0.

Фундаментальная группа графа $\pi_1(\Gamma)$ свободна.

Имеют место аналоги теоремы Зейферта—ван Кампена и теоремы о накрывающих отображениях. При этом накрывающим называется отображение f: $\Gamma_1 \to \Gamma_2$, являющееся отображением «на» и взаимнооднозначно переводящее множество ребер, инцидентных любой заданной вершине $v \in V(\Gamma_1)$, в аналогичное множество относительно вершины $f(v) \in V(\Gamma_2)$. Если f сохраняет ориентацию, то любой путь p в Γ_2 однозначно поднимается до пути $f^{-1}(p)$ в Γ_1, если только фиксировать прообраз $f^{-1}(\alpha(p)) = \alpha(f^{-1}(p))$.

Пусть Γ_0, Γ_1, Γ_2 — графы, ι_k: $\Gamma_0 \to \Gamma_k$, $k = 1, 2$, — отображения, не нарушающие ориентацию. Тогда найдется граф Γ_3, единственным образом определяющийся следующими свойствами: 1) существуют отображения τ_k: $\Gamma_k \to \Gamma_3$, $k = 1$, 2, делающие диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_1 \arrow[dr, "\tau_1"] & \\ \Gamma_0 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & & \Gamma_3 \\ & \Gamma_2 \arrow[ur, "\tau_2"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной; 2) для любых отображений $\varkappa_k$: $\Gamma_k \to \Gamma$, $k = 1$, 2, в некоторый граф Γ таких, что $\iota_1\varkappa_1 = \iota_2\varkappa_2$ существует единственное отображение $\varkappa_3$: $\Gamma_3 \to \Gamma$ с условием $\tau_i\varkappa_3 = \varkappa_i$, $i = 1, 2$ (вариант выталкивающего квадрата). Пусть $v_0 \in \Gamma_0$, $v_k = \iota_k(v_0)$ $(k = 1, 2)$, $v_3 = \iota_1\tau_1(v_0) = \iota_2\tau_2(v_0)$, тогда $\pi_1(\Gamma_3, v_3) = \langle \tau_{1*}(\pi_1(\Gamma_1, v_1)), \tau_{2*}(\Gamma_2, v_2)\rangle$. Другими словами, выталкивающий квадрат реализует подгруппу, порожденную образами фундаментальных групп (и верхнюю грань в решетке подгрупп). Пусть γ_i: $\Gamma_i \to \Gamma_3$, $i = 1, 2$, — отображения. Выберем в $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ такие пары (e_1, e_2), (v_1, v_2), что их компоненты имеют одинаковые образы в Γ_3. Соберем

из таких пар подграф $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \times \Gamma_2$. *Расслоенным произведением* называется коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_1 \arrow[dr, "\gamma_1"] & \\
\Gamma_0 \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & \Gamma_3 \\
& \Gamma_2 \arrow[ur, "\gamma_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Если имеется такой квадрат, причем $v_i \in V(\Gamma_i)$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{pr}_1(v_0) = v_1$, $\mathrm{pr}_2(v_0) = v_2$ и $\gamma_1(v_1) = \gamma_2(v_2) = v_3$, а γ_1 и γ_2 — *иммерсии* (индуцирующие вложения множеств ребер инцидентных с любой вершиной $v \in V(\Gamma_i)$ $(i = 1,\ 2)$, в соответствующее множество для ее образа), тогда $\gamma_{1*}(\pi_1(\Gamma_1,\ v_1)) \cap \gamma_{2*}(\pi_1(\Gamma_2,\ v_2)) = \mathrm{pr}_{i*}\gamma_{i*}(\pi_1(\Gamma_0,\ v_0))$. Другими словами, расслоенное произведение реализует пересечение фундаментальных групп (Stallings J. P. //Invent. Math. — 1983. — V.71. — P.551 — 565; Contemp. Math. — 1985. — V.44. — P.79 — 84).

Двумерный комплекс (или просто *комплекс*) K имеет в качестве одномерного остова граф Γ. Кроме множеств $V(K)$, $E(K)$ комплекс K может включать также множество граней $D(K)$, на которых задана инволюция ${}^{-1}$: $D(K) \to D(K)$, $d \mapsto d^{-1}$, со свойствами $d^{-1} \neq d$, $(d^{-1})^{-1} = d$. Каждой грани d сопоставляется замкнутый циклический путь $\tilde{p} = \partial d$, состоящий из обычного замкнутого пути $p = e_1, \ldots, e_n$ и всех его циклических перестановок. Если d соответствует $\tilde{p} = \partial d$, то d^{-1} соответствует $\widetilde{p^{-1}}$ $(p^{-1} \underset{\mathrm{def}}{=} e_n^{-1},\ e_{n-1}^{-1}, \ldots, e_1^{-1})$. *Отображение* f: $K_1 \to K_2$ комплекса K_1 в комплекс K_2 определяется как совокупность тройки согласованных отображений f_V: $V(K_1) \to V(K_2)$, f_E: $E(K_1) \to E(K_2)$, f_D: $D(K_1) \to D(K_2)$, где согласование на $d \in D(K_1)$ заключается в том, что образ при f от ∂d совпадает с $\partial f(d)$, а образ при f от d^{-1} совпадает с $f(d)^{-1}$.

Пути p_1 и p_2 называются *гомотопными*, если от p_1 к p_2 можно перейти последовательностью вставок и вычеркиваний ee^{-1} или подпути q, где $q \in \partial d$ для

некоторой грани $d \in D(K)$. Фиксируя начальную точку $v_0 \in V(K)$, получаем *фундаментальную группу* $\pi_1(K, v_0)$ комплекса K, элементами которой являются классы эквивалентности $[p]$ замкнутых путей с началом v_0. Если K линейно связен, т. е. соответствующий граф линейно связен, что предполагается, то изоморфный тип группы $\pi_1(K, v_0)$ не зависит от выбора v_0 — получаем фундаментальную группу комплекса $\pi_1(K)$.

Группа $\pi_1(K)$ имеет код $\langle \{[x_e] \mid e \in E(K) \setminus T\} \| \{[r_d] = 1 \mid d \in D(K)\} \rangle$, где T — максимальное дерево в K (точнее, в одномерном остове K), $x_e = [v_0, \alpha(e)]$, e, $[\omega(e), v_0]$, где e — одно из двух ребер $\{e, e^{-1}\}$, не принадлежащих T, $[v_1, v_2]$ — единственный приведенный путь из вершины v_1 по дереву T в вершину v_2; $r_d = [v_0, \alpha(p)]$, p, $[\omega(p), v_0]$, где d — произвольная грань в $D(K)$, $p \in \partial d$ — какой-нибудь ее граничный путь.

Наоборот, по любому коду $\langle X \| R \rangle$ можно определить комплекс K такой, что группа $\pi_1(K)$ задается этим кодом. Для этого вначале возьмем граф $\Gamma = \Gamma(X)$, состоящий из одной вершины и $\varkappa = [X]$ ребер (петель), взаимно однозначно соответствующих элементам из X. Выберем на каждом ребре $e = e(x)$ направление, сопоставляя полученному упорядоченному ребру элемент x, а противоположно направленному ребру e^{-1} — элемент x^{-1}. Для каждого определяющего слова $r \in R$ введем грань $d = d(r)$, граничный путь которой получается, если записывать последовательно ребра, соответствующие буквам в записи r. Полученный комплекс K является искомым.

Для комплексов справедливы полные аналоги теоремы Зейферта — ван Кампена и теоремы о накрывающих отображениях. При этом накрывающим называется такое отображение комплексов $f\colon K_1 \to K_2$, которое есть отображение «на», накрытие соответствующих графов, взаимно однозначно отображающее множество ребер из граничного пути $p \in \partial d$ любой грани $d \in D(K_1)$ на соответствующее множество для ее образа $f(d) \in D(K_2)$ (каждое ребро считается столько раз, сколько раз оно появляется в граничном пути). См. по этому поводу [30], [80].

Фундаментальная группа $\pi_1(S_{g,r})$, где $S_{g,r}$ — связная компактная ориентируемая поверхность рода g с r компонентами края, модель которой — сфера с

g ручками и r дырами, может быть задана кодом

$$\left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g, c_1, c_2, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, c_r \,\Big\|\, \prod_{k=1}^{r} c_k \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle.$$

Фундаментальная группа $\pi_1(Q_{g,r})$ $(g \geqslant 0)$ связной компактной неориентируемой поверхности рода g с r компонентами края, модель которой — сфера с g вклеенными листами Мёбиуса и r дырами, может быть задана кодом

$$\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_g, y_1, y_2, \ldots, y_r \,\Big\|\, \prod_{j=1}^{r} y_j \prod_{l=1}^{g} x_l^2 = 1 \right\rangle.$$

Как следствие отметим, что для группы гомологий справедливы изоморфизмы: $H_1(S_{g,0}) \simeq \mathbf{Z}^{2g}$, $H_1(S_{g,r}) \simeq \simeq \mathbf{Z}^{2g+r-1}$ при $r \geqslant 1$, $H_1(Q_{g,0}) \simeq \mathbf{Z}(2) \oplus \mathbf{Z}^{g-1}$, $H_1(Q_{g,r}) \simeq \simeq \mathbf{Z}^{g+r-1}$ при $r \geqslant 1$.

Известна теорема Радо, согласно которой любую компактную поверхность (с краем) X можно *триангулировать*, т. е. разбить на подмножества T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, гомеоморфные треугольникам Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в плоскости $\mathbf{R}^2$, правильно прилегающим друг другу (см., например, [38]). Зафиксировав гомеоморфизмы ρ_i: $\Delta_i \to T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим граф $\Gamma(X)$, вершины и ребра которого соответствуют вершинам и ребрам треугольников Δ_i. Пусть T — максимальное дерево в $\Gamma(X)$, каждому ребру которого $e \in T$ приписан элемент 1. Ребра $e \in \Gamma(X) \setminus T$ пронумеруем, упорядочим и припишем каждому из них свой элемент $x_i = x(e_i)$, считая, что $x(e_i^{-1}) = x_i^{-1}$. Тогда группа $\pi_1(X)$ может быть задана кодом $\langle \{x_i\} \| \{r_j = 1\} \rangle$, где каждое слово r_j получается как произведение букв x_i^ε, $\varepsilon = \pm 1$, соответствующих ребрам при обходе вокруг T_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь M есть 3-многообразие, G — конечно определенная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Тогда существует компактное 3-многообразие N и иммерсия f: $N \to M$ такие, что f_*: $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ является мономорфизмом на G. Если при этом $G = \pi_1(M)$, то в качестве f можно выбрать не только иммерсию, но и вложение.

Известен следующий список всех конечно порожденных абелевых групп, которые могут быть фундаментальными группами 3-многообразий (с указанием многообразий):

группы	E	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}(2)$	$\mathbf{Z}(p),\ p\geqslant 2$
многообразия	$\mathbf{D}^2\times I$	$\mathbf{D}^2\times\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^2\times I$	$\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}$	$\mathbf{P}^2\times\mathbf{T}$	$L(p,1)$

Здесь $\mathbf{D}^2$ — круг, I — интервал, $\mathbf{P}^2$ — проективная плоскость, $L(p, 1)$ — линзовое пространство, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^2$ — одномерный и двумерный тор соответственно.

Известен также полный список нильпотентных фундаментальных групп замкнутых (возможно, неориентируемых) 3-многообразий (Thomas C.//Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1968. — V. 64. — P. 303—306).

Конечно порожденная группа, изоморфная фундаментальной группе некоторого 3-многообразия конечно определена (*теорема Скотта—Шалена*).

Группы кос Артина задаются следующими кодами: $B_n=\langle\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_{n-1}\,\|\,[\sigma_i,\ \sigma_j]=1$ при $|i-j|\geqslant 2$, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant n-2\rangle$. Относительно их реализации в $\mathbf{R}^3$ см. [29], [36].

Полагаем $\zeta=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}$, тогда $\zeta\sigma_i\zeta^{-1}=\sigma_{i+1}$ для $1\leqslant i\leqslant n-2$, значит, $B_n=\langle\sigma_1,\ \zeta\rangle$. Имеем $B_1=E$, $B_2\simeq\mathbf{Z}$, а центр группы B_n при $n\geqslant 3$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом ζ^n.

Существует эпиморфизм $\varphi_n\colon B_n\to\mathbf{S}_n$ ($n\in\mathbf{N}$), для которого $\varphi(\sigma_i)=(i,\ i+1)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Ядро $C_n=\operatorname{Ker}\varphi_n$ называется *группой крашеных кос Артина* и порождается множеством элементов $\gamma_{ij}=\sigma_{j-1}\ldots$ $\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}$, где $1\leqslant i<j\leqslant n$, в которых может быть задана следующим копредставлением: $\langle\{\gamma_{ij}\}\,|\,1\leqslant i<j\leqslant n\}\,\|\,\{[\gamma_{ij},\ \gamma_{kl}]=1$, если $i<j<k<l$, или $i<k<l<j$, $\gamma_{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jk}=\gamma_{ik}\gamma_{jk}\gamma_{ij}$, если $i<j<k$, $\gamma_{ik}\gamma_{jk}\gamma_{ij}=\gamma_{jk}\gamma_{ij}\gamma_{ik}$, если $i<j<k$, $\gamma_{ik}\gamma_{jk}\gamma_{jl}\gamma_{jk}^{-1}=$ $=\gamma_{jk}\gamma_{jl}\gamma_{jk}^{-1}\gamma_{ik}$, если $i<j<k<l\rangle$.

Подгруппа C_n автоморфно допустима в B_n. Для любого эпиморфизма $\rho\colon B_n\to\mathbf{S}_n$ найдется автоморфизм $\mu\in\operatorname{Inn}B_n$ такой, что реализуется одна из сле-

дующих возможностей: 1) $\mu\rho=\pi$, где $\pi(\sigma_i)=(1, 2, \ldots, n)$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, 2) $n=4$, $\mu\rho$: $\sigma_1\mapsto(1, 2, 3, 4)$, $\zeta\mapsto(1, 2)$, 3) $n=6$, $\mu\rho$: $\sigma_1\mapsto(1, 2)(3, 4)(5, 6)$, $\zeta\mapsto(1, 2, 3)(4, 5)$. Факторгруппа C_n/C'_n — свободная абелева группа ранга $\binom{n}{2}$, ее базис составляют образы элементов γ_{ij}, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Все подгруппы следующей цепи: $E=C_n(n)\leqslant C_n(n-1)\leqslant\ldots\leqslant C_n(1)=C_n$, где $C_n(r)=\langle\{\gamma_{ij}\mid 1\leqslant i<j,\ r<j\leqslant n\}\rangle$ нормальны в C_n. Подгруппа $F_n(r)\underset{\text{def}}{=}\langle\gamma_{1,r+1}, \gamma_{2,r+1}, \ldots, \gamma_{r,r+1}\rangle\leqslant C_n(r)$ $(r=1, 2, \ldots, n-1)$ свободна ранга r с базисом из указанных порождающих элементов. Образы групп $F_n(r)$ порождают факторы $C_n(r)/C_n(r+1)$, причем $F_n(r)\cap C_n(r+1)=E$ при всех r, т. е. $C_n(r)=C_n(r+1)\rightthreetimes F_n(r)$, $C_n(r)/C_n(r+1)\simeq F_n(r)\simeq F_r$ $(r=1, 2, \ldots, n-1)$.

Группа B_3 может быть задана кодом $\langle x_1, x_2\,\|\,x_1^3=x_2^2\rangle$, т. е. B_3 является свободным произведением с объединением двух бесконечных циклических групп.

Группа B_4 разлагается в свободное произведение групп $A=\langle x_1, x_2\,\|\,x_1^4=x_2^2\rangle$ и $B=\langle y_1, y_2\,\|\,y_1^3=y_2^2\rangle$ с объединенной подгруппой $N=\langle z_1, z_2, z_3\,\|\,z_1^2=z_2^2=z_3^2\rangle$. При этом за порождающие групп A, B, C можно принять элементы $x_1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $y_1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1$, $z_1=x_1^2=y_1^{-1}y_2y_1$, $z_2=x_2=y_2$, $z_3=x_1x_2x_1^{-1}=y_1y_2y_1^{-1}$. Группы B_n, $n\geqslant 5$, не имеют разложений ни в какое древесное произведение собственных подгрупп (Karrass A., Pietrowski A., Solitar D. // Contemp. Math. — 1984. — V.33. — P. 341 — 352).

Зададим на базисе $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ свободной группы $F_n=F(X)$ автоморфизмы τ_i: $x_i\mapsto x_{i+1}$, $x_{i+1}\mapsto x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}$, $x_k\mapsto x_k$ при $k\neq i, i+1$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Отображение $B_n\to\operatorname{Aut}F_n$, где $\sigma_i\mapsto\tau_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, однозначно продолжается до изоморфного вложения. Произвольный автоморфизм $\alpha\in\operatorname{Aut}F_n$ принадлежит образу группы B_n при этом вложении в том и только в том случае, если: 1) α переводит элементы базиса X в сопряженные к ним, т. е. $x_i\mapsto x_{\sigma(i)}^{g_i}$, $g_i\in F_n$, 2) $\alpha(x_1x_2\ldots x_n)=x_1x_2\ldots x_n$. Внутренний автоморфизм группы F_n, отвечающий элементу $x_1x_2\ldots x_n$, порождает центр группы B_n.

Добавим некоторые сведения об автоморфизмах групп кос Артина: 1) при $n \geqslant 4$ группа $\operatorname{Aut} B_n$ совершенна, 2) $\operatorname{Out} B_3 \simeq \mathbf{Z}(2)$, группа $\operatorname{Aut}(\operatorname{Aut} B_3)$ совершенна (Dyer J. L., Grossman E. K.), 3) $\operatorname{Aut} B_4 \simeq \operatorname{Aut} F_2$ (см. работу Karrass—Pietrowski—Solitar, цитированную выше).

Группой классов отображений или *модулярной группой Тайхмюллера* компактной ориентируемой поверхности S_g рода g называется группа M_g всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (можно считать также, диффеоморфизмов) S_g, рассматриваемых с точностью до изотопической эквивалентности. Группа M_g^* всех гомеоморфизмов (диффеоморфизмов) поверхности S_g, также рассматриваемых с точностью до изотопической эквивалентности, содержит M_g в качестве нормальной подгруппы индекса 2. Расширение M_g до M_g^* расщепляется.

Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм поверхности S_g изотопически эквивалентен произведению скручиваний Дена. Известно, что группа M_1 порождается двумя изотопическими классами скручиваний Дена; минимальное число изотопических классов скручиваний Дена, достаточное для порождаемости группы M_g при $g \geqslant 2$, равно $2g+1$. Любая группа M_g, $g \geqslant 2$, может быть порождена четырьмя элементами (не обязательно отвечающими скручиваниям Дена). Группы M_g конечно определены, причем, определяющие соотношения для упомянутых выше $2g+1$ порождающих элементов явно выписаны (Wajnryb B.//Isr. J. Math. — 1983. — V. 45, N 2, 3. — P. 157—172).

Группа M_g естественным образом действует на фундаментальной группе $\pi_1(S_g)$. Установлено, что $M_1 \simeq SL(2, \mathbf{Z})$ и $M_g \simeq \operatorname{Out} \pi_1(S_g)$ при $g \geqslant 2$. Любой автоморфизм группы $\pi_1(S_g)$ индуцирован автоморфизмом свободной группы F_{2g}.

Отметим некоторые другие известные алгебраические свойства групп M_g, $g \geqslant 2$.

1) Группа M_g почти без кручения; более точно, в M_g существует нормальная подгруппа $\Gamma_g = \operatorname{Ker}(M_g \to \operatorname{Aut}(H_1(S_g, \mathbf{Z}(3))))$ индекса $l \leqslant 3^{4g^2}$, не имеющая кручения.

2) Группа M_g финитно аппроксимируема.

3) Любая разрешимая подгруппа группы M_g почти абелева, а ранг любой ее абелевой подгруппы не превосходит числа $3g-3$.

4) Любая подгруппа $G \leqslant M_g$ либо содержит F_2, либо является почти абелевой группой (более точно, либо $G \cap \Gamma_g$ содержит F_2, либо $G \cap \Gamma_g$ — свободная абелева группа ранга $l \leqslant 3g-3$).

5) Конечно порожденная подгруппа $G \leqslant M_g$ либо почти абелева, либо содержит максимальную подгруппу бесконечного индекса.

6) Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ конечно порожденной подгруппы $G \leqslant M_g$ нильпотента и почти абелева (заметим, что $\Phi(M_g) = E$). (См. Иванов Н. В.// Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 4. — С. 786—789; Функц. анализ и его прилож. — 1987. — Т. 21, № 2. — С. 76—77.)

Если $S_{g,*}$ — компактная поверхность рода g с выделенной точкой $*$, то $M_{g,*}$ — группа гомеоморфизмов поверхности $S_{g,*}$, фиксирующих $*$ и рассматриваемых с точностью до изотопии, также фиксирующей $*$. Аналогично, если $S_{g,m}$ — поверхность рода g с m граничными окружностями, то $M_{g,m}$ — группа гомеоморфизмов, фиксирующих граничные точки, взятых с точностью до изотопии, также фиксирующей граничные точки.

Пусть S — компактная поверхность из числа введенных нами (S_g, S_{g*}, S_{gm}). В силу связности S ее первая группа гомологий $H_1(S, \mathbf{Z})$ изоморфна фактор-группе группы $\pi_1(S)$ по коммутанту, т. е. свободной абелевой группе. Группа классов отображений M_S естественным образом действует на группе $H_1(S, \mathbf{Z})$, а ядро гомоморфизма, связанного с этим действием называется *подгруппой Торелли* $T_S \trianglelefteq M_S$. Группа T_{S_g} конечно определена (см. [92], [100]).

Имеют место изоморфизмы: $\operatorname{Out} M_2^* \simeq \operatorname{Out} M_2 \simeq \mathbf{Z}(2) \oplus \mathbf{Z}(2)$ и $\operatorname{Out} M_g \simeq \mathbf{Z}(2)$, $\operatorname{Out} M_g^* \simeq E$ при $g \geqslant 3$ (см. McCarthy J. D. // Invent. Math. — 1986. — V. 84. — P. 49—71).

Пусть M — *мёбиусова группа*, т. е. группа всех дробно-линейных преобразований

$$f\colon z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1 \quad (a, b, c, d \in \mathbf{C})$$

расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Группа M изоморфна группе $PSL(2, \mathbf{C})$ и обладает естественной топологией, индуцированной топологией группы $SL(2, \mathbf{C})$. Подгруппа $G \leqslant M$ дискретна в том и только том случае, если ее прообраз дискретен в $SL(2, \mathbf{C})$.

Примеры дискретных подгрупп в $SL(2, \mathbf{C})$: 1) конечные подгруппы; 2) модулярная группа $SL(2, \mathbf{C})$; 3) группа Пикара $SL(2, \mathbf{Z}[i])$, где $\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ — кольцо целых гауссовых чисел.

Преобразование f, указанное выше, называется *эллиптическим*, если квадрат его следа $t = (\operatorname{tr} f)^2 = (a + d)^2$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant t < 4$, *параболическим*, если $t = 4$, *гиперболическим*, если $t > 4$, и *локсодромическим*, если $t \notin [0, +\infty)$.

Говорят, что группа G гомеоморфизмов хаусдорфова топологического пространства X на себя *действует разрывно*, если для любого компакта $K \subseteq X$ множество $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \varnothing\}$ конечно.

Группа $G \leqslant M$ $[G \leqslant PSL(2, \mathbf{R})]$ дискретна тогда и только тогда, когда G действует разрывно в пространстве $\mathbf{H}^3$ [плоскости $\mathbf{H}^2$] Лобачевского (*теорема Пуанкаре*).

Подгруппа $G \leqslant M$ (не обязательно дискретная) называется *элементарной*, если некоторая G-орбита в пространстве $\overline{\mathbf{H}}^3 = \mathbf{H}^3 \cup \{\infty\}$ конечна. Полный список реализуемых возможностей для дискретной элементарной подгруппы $G \leqslant M$ выглядит так: $\mathbf{Z}(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ — группа вращений, D_n $(n \in \mathbf{N})$ — группа симметрий правильного плоского n-угольника (*группа диэдра*), $\mathbf{A}_4$ — группа симметрий тетраэдра, $\mathbf{S}_4$ — октаэдра, $\mathbf{A}_5$ — икосаэдра, расширение группы $\mathbf{Z}$ или группы $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ посредством группы $\mathbf{Z}(q)$, $q = 1, 2, 3, 4$ или 6, прямая сумма $\mathbf{Z}(n) \oplus \mathbf{Z}$ или ее расширение посредством группы $\mathbf{Z}(2)$ (более детально см. в [4]).

Заметим, что для дискретной группы $G \leqslant M$ эквивалентны условия: (1) G состоит из эллиптических преобразований и E, (2) элементы G имеют неподвижную точку в $\mathbf{H}^3$, (3) G конечна.

Дискретная группа $G \leqslant M$ называется *фуксовой*, если относительно нее инвариантен некоторый открытый круг (или полуплоскость) $\Delta \subset \overline{\mathbf{C}}$, в котором G действует разрывно. Можно предполагать, что Δ — единичный круг или $\mathbf{H}^2$, и рассматривать $G \leqslant PSL(2, \mathbf{R})$ как дискретную группу изометрий.

Если фуксова группа $G \leqslant PSL(2, \mathbf{R})$ элементарна, то она или циклическая $\mathbf{Z}(n)$, или сопряжена с подгруппой $\langle g, h\rangle \leqslant PSL(2, \mathbf{R})$, где g: $z \mapsto kz$ $(k > 1)$, h: $z \mapsto -1/z$. Часто фуксовыми называют только неэлементарные группы. Заметим, что подгруппа $G \leqslant PSL(2, \mathbf{R})$ элементарна, если любые два элемента $g_1, g_2 \in G$ бесконечного порядка имеют общую неподвижную точку (равносильно тому, что $\operatorname{tr}[g_1, g_2] = 2$).

Если неэлементарная фуксова группа G такова, что униформизуемая ею поверхность $S = \mathbf{H}^2 \setminus G$ имеет конечную гиперболическую площадь, то G называется *группой 1-го рода*, в противном случае G — группа *2-го рода. Предельное множество* $\Lambda = \Lambda(G)$ (неэлементарной) фуксовой группы G есть замыкание множества неподвижных точек ее локсодромических или параболических элементов (наименьшее по включению непустое замкнутое подмножество $\mathbf{C}$, инвариантное относительно G). Известно, что Λ принадлежит границе $\partial\Delta$. Если $\Lambda = \partial\Delta$, то G — фуксова группа 1-го рода, если $\Lambda \neq \partial\Delta$ — 2-го рода.

Всякая конечно порожденная фуксова группа G обладает конечным множеством классов сопряженности максимальных циклических подгрупп $[\langle g_i\rangle]$ порядков m_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, содержащих все эллиптические элементы из G, а также конечным множеством классов сопряженности максимальных циклических подгрупп $[\langle f_j\rangle]$, $j = 1, 2, \ldots, s$, бесконечных порядков, содержащих все параболические элементы из G. Если G — группа 2-го рода, то в ней имеется также конечное множество классов сопряженности $[\langle h_k\rangle]$, $k = 1, 2, \ldots, t$, так называемых граничных максимальных циклических подгрупп, состоящих из гиперболических элементов (без условия граничности их бесконечно много). Если g — род поверхности $S = \Delta \setminus G$, то набор $(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; s; t)$ называется *сигнатурой группы* G.

Неэлементарная конечно порожденная фуксова группа G заданной сигнатуры $(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; s; t)$ существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0.$$

Фуксова группа 1-го рода сигнатуры (g; $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_r$; s; 0) может быть задана кодом

$$\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_r, a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, p_1, \ldots, p_s \,\middle\|\, x_1^{m_1} = \ldots \right.$$
$$\left. \ldots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{s} p_j \prod_{k=1}^{r} x_k = 1 \right\rangle.$$

Фуксовы группы 1-го рода изоморфны тогда и только тогда, когда их сигнатуры (с точностью до перестановки чисел m_i, $i = 1, 2, \ldots, r$) одинаковы. Конечно порожденные фуксовы группы точно представимы целочисленными матрицами.

Неэлементарная фуксова 2-порожденная группа обладает одним и только одним из следующих кодов: 1) $\langle x_1, x_2 \| \rangle \simeq F_2$, 2) $\langle x_1, x_2 \| x_1^p = 1\ (p \geqslant 2)\rangle \simeq \mathbf{Z}(p) * \mathbf{Z}$, 3) $\langle x_1, x_2 \| x_1^p = x_2^q = 1\ (2 \leqslant p \leqslant q,\ p+q \geqslant 5)\rangle \simeq \mathbf{Z}(p) * \mathbf{Z}(q)$, 4) $\left\langle x_1, x_2 \| x_1^p = x_2^q = (x_1 x_2)^r = 1 \left(2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\right)\right\rangle \simeq D(p, q, r)$ — группа Дика, 5) $\langle x_1, x_2 \| [x_1, x_2]^p = 1\ (p \geqslant 2)\rangle$, 6) $\langle x_1, x_2, x_3 \| x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = (x_1 x_2 x_3)^p = 1\ (p = 2k+1 \geqslant 3)\rangle = \langle x_1 x_2, x_2 x_3\rangle$.

Иногда группы $D(p, q, r)$ называют треугольными. Треугольная группа в этом смысле сигнатуры (0; p, q, r; 0; 0) при условии $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ — это фуксова группа 1-го рода, являющаяся подгруппой индекса 2 в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника с углами π/p, π/q, π/r в смысле геометрий Лобачевского, см. [69], [97].

Дискретная группа $G \leqslant M$ называется *клейновой группой 1-го рода*, если $\Lambda = \overline{\mathbf{C}} = \partial \mathbf{H}^3$ (Λ определяется аналогично предыдущему) и *клейновой группой 2-го рода* (иногда просто *клейновой группой*) в остальных случаях. Частный случай — фуксовы и квазифуксовы группы. *Квазифуксовой* называется группа, обладающая в $\overline{\mathbf{C}}$ инвариантной областью, ограниченной жордановой кривой. Они также делятся на группы 1-го и 2-го рода, см. [27].

Если в $\mathbf{C}$ имеется $2n$ попарно непересекающихся замкнутых кругов B_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, и g_i — преобразования из M, переводящие внутренность B_i во внеш-

ность B_{i+n}, $i=1, 2, \ldots, n$, то группа $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ клейнова. Она свободна и состоит (кроме единицы) только из локсодромических элементов. Такие группы называются *классическими группами Шоттки*. Наконец, существуют обобщения введенных понятий на более высокие размерности, см. [27].

Пусть G — дискретная группа движений евклидовой или неевклидовой плоскости E, имеющая компактную фундаментальную область (см. [68], [69]). Тогда она задается одним из следующих кодов:

1) порождающие элементы:

па) $s_1, s_2, \ldots, s_m$ $(m\geqslant 0)$; пб) $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ $(g\geqslant 0)$ или пб′) $v_1, v_2, \ldots, v_g$ $(g>0)$; пв) $e_1, e_2, \ldots \ldots, e_q$ $(q\geqslant 0)$, пг) $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1, m_1+1}, \ldots, c_{q, m_q+1}$ $(m_k\geqslant 0)$;

2) определяющие соотношения:

са) $s_i^{h_i}=1$, $h_i\geqslant 2$, $i=1, 2, \ldots, m$; сб) $c_{ij}^2=1$, $i=1, 2, \ldots, q$; $j=1, 2, \ldots, m_i+1$; св) $(c_{i,j+1}c_{ij})^{h_{ij}}=1$, $h_{ij}\geqslant 2$, $i=1, 2, \ldots, q$; $j=1, 2, \ldots, m_i$; $c_{i1}e_ic_{i,m_i+1}e_i^{-1}=1$, $i=1, 2, \ldots, q$; сг) $\prod\limits_{i=1}^{m} s_i \prod\limits_{j=1}^{g} [a_j, b_j] \prod\limits_{k=1}^{q} e_k = 1$ или сг′) $\prod\limits_{i=1}^{m} s_i \prod\limits_{j=1}^{g} v_j^2 \prod\limits_{k=1}^{q} e_k = 1$.

При этом, если поверхность $S=E\setminus G$ ориентируема, то берутся порождающие пб) и соотношения пг), а если — нет, то берутся пб′) и пг′) вместе со всеми остальными порождающими и соотношениями.

Группа, заданная представленным выше кодом, реализуется как дискретная группа движений сферы ($>$), евклидовой ($=$) или неевклидовой ($<$) плоскости в зависимости от выполнения соотношений

$$0 \gtreqless 2\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{h_i}\right)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\left(1-\frac{1}{h_{jk}}\right)-4+2q+f,$$

где $f=4g$, если поверхность S ориентируема, и $f=2g$, если поверхность S неориентируема.

Каждая из групп, заданных одним из указанных выше кодов, содержит в качестве подгруппы конечного индекса некоторую фундаментальную группу замкнутой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975.
2. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.
3. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества// Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат. Фундаментальные направления. — Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 117—247.
4. Бердон А. Геометрия дискретных групп. — М.: Наука, 1986.
5. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
6. Бокуть Л. А., Кукин Г. П. Неразрешимые алгоритмические проблемы для полугрупп, групп и колец//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 25. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 3—66.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука, 1969.
8. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Свободные алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1976.
9. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. — М.: ИЛ, 1950.
10. Глушков В. М. Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта//Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 2. — С. 3—41.
11. Глушков В. М. О строении свободных локально бикомпактных групп//Мат. сб. — 1959. — Т. 48, № 1. — С. 75—92.
12. Горчаков В. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. — М.: Наука, 1978.
13. Граев М. И. Теория топологических групп. I//Успехи мат. наук. 1950, — Т. 5, № 2. — С. 1 — 56.
14. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. — М.: Мир, 1973.
15. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.
16. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.
17. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — 3-е изд. — М.: Наука, 1982.
18. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.
19. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981.
20. Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1972.
21. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. — М.: Наука, 1980.
22. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
23. Копытов В. М., Медведев Н. Я. Многообразия решеточно упорядоченных групп//Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 4, № 3. — С. 117—128.
24. Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.
25. Кох Х. Теория Галуа p-расширений. — М.: Мир, 1973.

26. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М.: Мир, 1967.
27. Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А. Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. — Новосибирск: Наука, 1981.
28. Курош А. Г. Теория групп. — 3-е изд. — М.: Наука, 1967.
29. Лин В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 17. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 159—228.
30. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
31. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Представления групп в терминах образующих и соотношений. — М.: Наука, 1974.
32. Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.
33. Мальцев А. И. Избранные труды. — Т. I, II. — М.: Наука, 1976.
34. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
35. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986.
36. Марков А. А. Основы алгебраической теории кос//Тр. МИАН СССР. — Т. 16. — 1945.
37. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. — М.: Наука, 1984.
38. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977.
39. Медведев Н. Я. Многообразия решеточно упорядоченных групп. — Барнаул: Алт. гос. ун-т., 1987.
40. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1987.
41. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. — М.: Мир, 1974.
42. Мишина А. П. Абелевы группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 5. — М.: ВИНИТИ, 1967. — С. 9—44; — Т. 10. — М.: ВИНИТИ, 1972. — С. 5—45; — Т. 17. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 3—63.
43. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. — М.: Мир, 1980.
44. Мухин Ю. Н. Топологические группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 20. — М.: ВИНИТИ. — 1982. — С. 3—69.
45. Нейман Х. Многообразия групп. — М.: Мир, 1969.
46. Новиков С. П. Топология//Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 5—252.
47. Носков Г. А., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Бесконечные группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 17. — М.: ВИНИТИ. 1979. — С. 65—157.
48. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.
49. Платонов В. П. Строение топологических локально проективно нильпотентных групп и групп с нормализаторным условием//Мат. сб. — 1967. — Т. 72, № 1. — С. 38—58.

50. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. — М.: Наука, 1966.
51. Плоткин Б. И., Вовси С. М. Многообразия представлений групп. Общая теория, связи и приложения. — Рига: Зинатне, 1983.
52. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — 4-е изд. — М.: Наука, 1984.
53. Протасов И. В. Локальные теоремы для топологических групп//Изв. АН СССР. Математика. — 1979. — Т. 43, № 6. — С. 1430—1440.
54. Разрешимые и простые бесконечные группы//Новое в заруб. науке. Математика. — Вып. 21. — М.: Мир, 1981.
55. Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 21. — М.: ВИНИТИ, 1983. — С. 3—79.
56. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Наука, 1972.
57. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. — М.: Мир, 1968.
58. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
59. Серр Ж.-П. Деревья, амальгамы и SL_2//Математика/Сб. пер. — 1974. — Т. 18, № 1. — С. 3—51, № 2. — С. 3—27.
60. Фукс Д. Б. Классические многообразия//Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 253—317.
61. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
62. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, ч. 1; 1977, ч. 2.
63. Хамфри Д. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980.
64. Хамфри Д. Арифметические группы. — М.: Мир, 1983.
65. Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1982.
66. Холл Ф. Нильпотентные группы//Математика/Сб. пер. — 1968. — Т. 12, № 1. — С. 3—36.
67. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. — Т. 1. — М.: Наука, 1975.
68. Цишанг Х. О разложениях дискретных групп движений плоскости//Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, № 1. — С. 173—194.
69. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. — М.: Наука, 1988.
70. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980.
71. Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры//Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат. Фундаментальные направления. — Т. 11. — М.: ВИНИТИ, 1986.
72. Anderson M., Feil T. Lattice-ordered groups. An introduction. Dordrecht etc.: Reidel Publ. Comp., 1988.
73. Babakhanian A. Cohomological methods in group theory. — New York: Marcel Dekker, 1972. — (Pure and Appl. Math. — V. 11).
74. Bachmuth S., Mochizuki H. Y. The tame range of automorphism groups and GL_n//Group Theory. Proc. Singa-

pure Group Theory Conference. — Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1989. — P. 241—252.
75. Baumslag G. Lectures on nilpotent groups. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1971.
76. Baumslag G. A survey on groups with a single defining relation//London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1986. — V. 121. — P. 30—58.
77. Bieri R. Homological Dimension of Discrete Groups. — London: Queen Mary College Math. Notes, 1976.
78. Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S. Groups et anneaux réticules. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1977.
79. Cohen D. E. Groupes of cohomological dimension one. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1972.
80. Cohen D. E. Combinatorial Group Theory. A Topological Approach. — London: Queen Mary College Math. Notes, 1977.
81. Dehn M. Papers on Group Theory and Topology. — New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo: Springer, 1987.
82. Dicks W. Groups, Trees anf Projective Modules. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
83. Donkin S. Polycyclic groups, Lie algebras and algebraic groups//J. reine angew. Math. — 1982. — V. 326. — P. 104—123.
84. Gildenhuys D., Strebel R. On the cohomology of soluble groups//J. Pure and Appl. Algebra. — 1982. — V. 26, № 3. — P. 293—323.
85. Griffith P. Infinite Abelian Groups Theory. — Chicago: University of Chicago Press, 1970.
86. Gruenberg K. W. Cohomological topics in group theory.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1970.
87. Gupta N. Free Group Rings//Contemp. Math. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. — V. 66, 1987.
88. Hartley B. Topics in the theory of nilpotent groups// Group Theory. Essays for Philip Hall. — London Math. Ser., 1984. — P. 61—120.
89. Hilton P. J., Stammbach U. A course in homological algebra. — Berlin; Heidelberg; New York; Springer, 1971.
90. Jaco W. Lectures on three manifold topology. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1980.
91. Johnson D. L. Topics in the Theory of Group Presentations. — London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1980. — V. 42.
92. Johnson D. L. A survey of the Torelly group//Contemp. Math. — 1983. — V. 20. — P. 165—180.
93. Kac V. G. Constructing groups associated de infinite-dimensional Lie algebras//Infinite Dimensional Groups with Applications. — New York, 1968.
94. Kaplansky I. Infinite abelian groups. — Michigan, 1954 and 1969.
95. Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Locally Finite Groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.
96. Lazard M. Groupes analytiques p-adiques//Publ. Math. IHES. 1965. — V. 26.
97. Lyndon R.C. Groups and geometry. — London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1985. — V. 101.

98. Magnus W. Residually finite groups//Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 75. — P. 305—316.
99. Magnus W. The uses of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory: A survey//Resultate der Math. — 1984. — V. 4. — P. 171—192.
100. Mochizuki H. Y. Automorphisms of solvable groups. — Part II//London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1986.— V. 121.— P. 15—29.
101. Nielsen J. Collected Mathematical Papers. — Birkhäuser, 1986.
102. Olšanskiî A. Yu. On a geometrical method in the combinatorial group theory//Proc. Intern. Congr. Math. Warszawa. — 1983. — P. 415—424.
103. Remeslennikov V. N., Romanovskiî N. S. Algorithmic problems for solvable groups//Word Problems II. — 1980. — P. 337—346.
104. Ribes L. Introduction to profinite groups and Galois cohomology. — Kingston, Canada, 1970.
105. Rimlinger F. Pregroups and Bass — Serre theory//Mem. Amer. Math. Soc. — 1987. — V. 65, N 361.
106. Robinson D. J. S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. — New York; Heidelberg; Berlin; Springer, Part 1, Band 62; Part 2, Ibid., Band 63, 1972.
107. Robinson D. J. S. A new treatment of soluble groups with finiteness conditions on their abelian subgroups//Bull. London Math. Soc. — 1976. — V. 8, N 2. — P. 113—129.
108. Robinson D. J. S. A contribution to the theory of groups with finitely many automorphisms//Proc. London Math. Soc. — 1977. — V. 37. — P. 34—54.
109. Robinson D. J. S. A Course in the theory of groups. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1982.
110. Schupp P. A survey of SQ-universality. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973. — P. 183—188. — (Lect. Notes Math. — V. 319).
111. Segal D. Polycyclic groups. — Cambridge, 1983.
112. Serre J.-P. Trees. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
113. Stammbach V. Homology in group theory. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973.
114. Stillwell J. The word problem and the isomorphism problem for groups//Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 6, № 1. — P. 33—56.
115. Stillwell J. Classical topology and combinatorial group theory. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980.
116. Strebel R. Finitely presented soluble groups//Group Theory. Essays for Philip Hall. London Math. Soc., 1984. — P. 257—314.
117. Thurston W. P. Three dimensional manifolds. Kleinian groups and hyperbolic geometry//Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 6, N 3. — P. 357—381.
118. Warfield R. B. Nilpotent groups. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1976.
119. Weiss E. Cohomology of groups. — New York: Acad. Press, 1969.

ГЛАВА III

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

В § 1 настоящей главы излагаются общие свойства колец. В § 2 и § 3 рассматриваются вопросы, специфичные для ассоциативных и неассоциативных колец соответственно. Как уже отмечалось, теория полей и коммутативных ассоциативных колец остается за пределами рассмотрения (см. о них [19], [40], [152], [203]). Сравнительно мало внимания уделено кольцам и алгебрам Ли. Модулям посвящен § 4. При этом гомологическая алгебра изложена в минимальном объеме. В частности, практически не затронута K-теория. Наконец, в § 5 рассмотрены топологические, частично упорядоченные, дифференциальные, разностные, фильтрованные и градуированные кольца. Довольно мало внимания уделено модулям с дополнительной структурой. Рассмотрены также кольца, на которых действует некоторая группа. Из других не нашедших отражения в справочнике вопросов отметим теоретико-модельные вопросы [127], конструктивные аспекты [213], алгоритмические задачи [15], [58], свойства аддитивной группы кольца [92], [145], гл. XVII, и его мультипликативной полугруппы [234]. В последней работе рассматриваются и другие вопросы, лежащие на границе теории колец и теории полугрупп.

§ 1. Общие определения

1.1. Основные определения. Абелева группа R называется *кольцом*, если на ней определено умножение, связанное со сложением *дистрибутивными законами*:

$$(a+b)\,c = ac + bc \quad \text{и} \quad a\,(b+c) = ab + ac.$$

В качестве примеров колец укажем: кольцо $\mathbf{Z}$ целых чисел, кольцо $M_n(\mathbf{R})$ квадратных матриц порядка n с действительными элементами и кольцо $\mathbf{V}$ трехмерных векторов с обычным сложением и векторным произведением в качестве умножения.

Если $(R, +, \cdot)$ — кольцо, то $(R, +)$ называется его *аддитивной группой*, а $(R, \cdot)$ — *мультипликативным группоидом*. Если на кольце $(R, +, \cdot)$ задать новое умножение $\circ$, положив $a \circ b = ba$, то $(R, +, \circ)$ также оказывается кольцом, которое называется кольцом, *инверсным* или *противоположным* кольцу R. Из данного кольца R можно получить новые кольца $R^{(-)}$ и $R^{(+)}$, задав новые умножения $[\ ,\ ]$ и $\{\ ,\ \}$ равенствами $[a, b] = ab - ba$ и $\{a, b\} = ab + ba$ соответственно. Одноэлементное кольцо называется *нулевым*.

Если 0 — нуль аддитивной группы кольца R, то $a0 = 0a = 0$ для любого $a \in R$. Справедливы также равенства $a(-b) = (-a)b = -ab$ и $(-a)(-b) = ab$. *Вычитание* определяется равенством $a - b = a + (-b)$, где $-b$ — элемент, противоположный b (ср. п. II. 1.1). Дистрибутивные законы распространяются на вычитание: $(a - b)c = ac - bc$ и $a(b - c) = ab - ac$, а также на случай нескольких слагаемых:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

Каждую абелеву группу R можно превратить в кольцо, положив $ab = 0$ для всех $a, b \in R$. Такое кольцо называется *кольцом с нулевым умножением*.

Подмножество S кольца R называется *подкольцом*, если $0 \in S$ и $a + b$, $-a$, $ab \in S$ всякий раз, когда $a, b \in S$. Каждое подкольцо кольца R является кольцом относительно операций, заданных в R. Тривиальными подкольцами являются само R и одноэлементное множество $\{0\}$. Подкольцом кольца $\mathbf{Z}$ служит, например, множество всех четных чисел. В качестве примера подкольца $\mathbf{V}$ можно указать совокупность векторов, лежащих на фиксированной прямой. Это подкольцо является кольцом с нулевым умножением. Пересечение любого непустого множества подколец кольца R оказывается подкольцом. Поэтому для любого непустого подмножества $X \subseteq R$ существует наименьшее подкольцо, содержащее множество X. Про это подкольцо говорят, что оно *порождается множеством* X. Оно совпадает с множеством всех сумм всевозможных произведений элементов из X. Например, множество $\{15, 6\}$ порождает в Z подкольцо, состоящее из всех чисел, делящихся на 3.

Кольцо R называется *ассоциативным*, если $(ab)c = a(bc)$ для любых $a, b, c \in R$, т. е. если мультипликативный группоид является полугруппой. Если $ab = ba$ для всех $a, b \in R$, то кольцо R называется *коммутативным*. Кольцо, являющееся коммутативным и ассоциативным одновременно, называется *ассоциативно-коммутативным*. Ассоциативным [коммутативным] является кольцо, инверсное ассоциативному [коммутативному]. Ассоциативно-коммутативным является кольцо $\mathbf{Z}$, а также всякое кольцо с нулевым умножением. Кольцо $M_n(\mathbf{R})$ ассоциативно, но при $n \geqslant 2$ не коммутативно. Кольцо $\mathbf{V}$ не ассоциативно и не коммутативно. Существуют коммутативные, но не ассоциативные кольца (см. § 3). Однако, говоря о коммутативном кольце, чаще всего подразумевают, что оно является и ассоциативным. Термин «кольцо» часто употребляется в смысле «ассоциативное кольцо».

Левой [*правой*] *единицей* кольца R называется такой элемент e, что $ea = a$ $[ae = a]$ для всех $a \in R$. Под *единицей* понимается элемент, являющийся левой и правой единицей одновременно, т. е. такой элемент e, что $ea = ae = a$ для всех $a \in R$. В кольце не может быть более одной единицы. Более того, если R содержит левую единицу e' и правую единицу e'', то $e' = e''$, причем e' оказывается единицей. Очень часто единицу кольца обозначают символом 1. Нулевое кольцо — это единственное кольцо, в котором единица совпадает с нулем.

Единицами колец $\mathbf{Z}$ и $M_n(\mathbf{R})$ служат 1 и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ соответственно. Кольцо $\mathbf{V}$ единицы не имеет. Если RS — полугрупповая алгебра (см. п. 2.3) полугруппы левых нулей (см. п. IV. 2.1), то все элементы из RS оказываются правыми единицами. Подчеркнем, что единица подкольца может не быть единицей самого кольца. Например, матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ образуют подкольцо S кольца $R = M_2(\mathbf{R})$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ служит единицей в S, но не в R.

Кольцо R называется *линейной алгеброй* или просто *алгеброй* над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей (а также Φ-алгеброй), если R

является Φ-модулем и $\lambda(ab)=(\lambda a)b=\alpha(\lambda b)$ для любых $\lambda\in\Phi$ и $a, b\in R$. Особенно важен случай, когда Φ — поле и, следовательно, R является линейным пространством над Φ. В этом случае алгебра называется *конечномерной*, если она является конечномерным пространством над Φ. Всякое кольцо можно рассматривать как алгебру над кольцом целых чисел.

Примерами алгебр над полем Φ могут служить кольцо матриц $M_n(\Phi)$ и кольцо многочленов $\Phi[x]$. Первая из них конечномерна, а вторая нет. Поле комплексных чисел и тело кватернионов являются алгебрами над полем действительных чисел. Однако тело кватернионов алгеброй над полем комплексных чисел не является.

Если R — алгебра над полем Φ и $\{e_\iota\mid\iota\in\mathfrak{J}\}$ — база линейного пространства R, то $e_\iota e_\varkappa=\sum\limits_{\lambda\in\mathfrak{J}} c^\lambda_{\iota\varkappa}e_\lambda$, где $c^\lambda_{\iota\varkappa}\in\Phi$, причем для каждых ι и $\varkappa$ лишь конечное число элементов $c^\lambda_{\iota\varkappa}$ отлично от нуля. Элементы $c^\lambda_{\iota\varkappa}$ называются *структурными константами* алгебры R. Задание структурных констант полностью определяет умножение в алгебре R. Для ее ассоциативности [коммутативности] необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{\lambda\in\mathfrak{J}} c^\lambda_{\iota\varkappa}c^\rho_{\lambda\nu}=\sum\limits_{\mu\in\mathfrak{J}} c^\mu_{\varkappa\nu}c^\sigma_{\iota\mu}$ $[c^\lambda_{\iota\varkappa}=c^\lambda_{\varkappa\iota}]$ для любых ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, $\rho\in\mathfrak{J}$. Все сказанное дословно повторяется в случае, когда Φ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, а R — свободный Φ-модуль.

Всякое кольцо R может быть вложено в кольцо R^1 с единицей: элементами кольца R^1 служат пары (a, m), где $a\in R$, $m\in\mathbf{Z}$, а операции определяются равенствами:

$$(a, m)+(b, n)=(a+b,\ m+n)$$

и

$$(a,\ m)(b,\ n)=(ab+na+mb,\ mn).$$

Элементы кольца R отождествляются с парами вида $(a, 0)$, единицей служит пара $(0, 1)$. Если R ассоциативно [коммутативно], то ассоциативно [коммутативно] и кольцо R^1. Аналогично для Φ-алгебры R строится Φ-алгебра R^1 с единицей: $R^1=\{(a,\ \lambda)\mid a\in R,\ \lambda\in\Phi\}$, $(a,\ \lambda)+(b,\ \mu)=(a+b,\ \lambda+\mu)$, $(a,\ \lambda)(b,\ \mu)=(ab+\mu a+\lambda b,\ \lambda\mu)$, $\xi(a,\ \lambda)=(\xi a,\ \xi\lambda)$ для любых $a, b\in R$ и λ, μ, $\xi\in\Phi$. Про кольцо [алгебру] R^1 говорят, что оно получено из R *внешним присоединением*

единицы. Отметим, что если в R существовала единица, то единица в R^1 отлична от нее. Кроме того, кольцо R оказывается идеалом в R^1.

Подалгеброй линейной алгебры над полем [кольцом] Ф называется подкольцо, являющееся подпространством [подмодулем]. Алгебра над полем Ф называется *локально конечной*, если все ее конечно порожденные подалгебры конечномерны.

Кольцо целых чисел является подкольцом поля комплексных чисел, но не будет подалгеброй алгебры комплексных чисел над полем действительных чисел.

Элемент a алгебры R над полем Ф называется *алгебраическим*, если существует такой ненулевой многочлен $f(x)$ над полем Ф, что $f(a)=0$. Алгебра R называется *алгебраической*, если все ее элементы алгебраические. Если все элементы алгебры R над полем Ф являются корнями многочленов над Ф, степени которых ограничены в совокупности, то говорят, что R — *алгебраическая алгебра ограниченной степени.* Алгебраической алгеброй ограниченной степени оказывается всякая конечномерная алгебра над любым полем. *Проблема Куроша*: всякая ли алгебраическая алгебра над полем локально конечна? Отрицательный ответ дал Е. С. Голод ([96], гл. 8).

Отображение φ кольца R в кольцо S [Ф-алгебры R в Ф-алгебру S] называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ и $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in R$ [а также $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \Phi$ и $a \in R$]. Подчеркнем, что знаки $+$ и $\cdot$ в левой и правой частях этого равенства имеют различный смысл: слева — это операции в кольце R, а справа — в кольце S. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом.* Если $\varphi\colon R \to S$ — изоморфизм, то обратное отображение φ^{-1} также оказывается изоморфизмом, и потому такие кольца R и S естественно назвать *изоморфными.* Если второе условие из определения гомоморфизма заменить на $\varphi(ab)=$ $=\varphi(b)\varphi(a)$, то придем к определению *антигомоморфизма.* Взаимно однозначный антигомоморфизм называется *антиизоморфизмом.* Гомоморфизм [антигомоморфизм] кольца или алгебры в себя называется *эндоморфизмом* [*антиэндоморфизмом*] этого кольца или этой алгебры. *Автоморфизм* [*антиавтоморфизм*]

кольца или алгебры определяется как изоморфизм [антиизоморфизм] этого кольца или этой алгебры на себя. Если a — обратимый элемент ассоциативного кольца R и $\varphi(x)=a^{-1}xa$, то φ оказывается автоморфизмом кольца R, который называется *внутренним*. Если φ — наложение ассоциативного кольца R на область целостности R', причем $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\varphi(a^2)=(\varphi(a))^2$ и $\varphi(abc)=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ для любых $a, b, c \in R$, то φ оказывается гомоморфизмом или антигомоморфизмом (Хуа Ло Кен//Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 8, № 3. — С. 143—148).

Примеры. 1) R — кольцо многочленов над полем S и $\varphi(f(t))=f(1)$ для всех $f(t)\in R$ (φ — гомоморфизм); 2) R — произвольное кольцо, S — кольцо, инверсное кольцу R, и $\varphi(x)=x$ для всех $x\in R$ (φ — антиизоморфизм); 3) R — поле комплексных чисел и $\varphi(z)=\bar{z}$ для всех $z\in R$ (φ — автоморфизм); 4) R — кольцо матриц над полем P и $\varphi(A)$ — матрица, транспонированная к $A\in R$ (φ — антиавтоморфизм).

Пусть $\varphi\colon R\to S$ — гомоморфизм колец [Ф-алгебр]. Если X — подмножество в R, то положим $\varphi(X)=\{\varphi(x)\,|\,x\in X\}$. Если X — подкольцо [подалгебра] в R, то $\varphi(X)$ оказывается подкольцом [подалгеброй] в S. В частности подкольцом [подалгеброй] в S оказывается $\varphi(R)=\operatorname{Im}\varphi$. Это подкольцо оказывается ассоциативным [коммутативным] кольцом, если ассоциативно [коммутативно] кольцо R. Если в кольце R имеется единица 1, то $\varphi(1)$ служит единицей кольца $\operatorname{Im}\varphi$, но может не быть единицей кольца S. Элемент $\varphi(1)$ обязан быть единицей кольца S в случае, когда φ — гомоморфное наложение, т. е. $\varphi(R)=S$. Напротив, $\varphi(0)$ всегда является нулем кольца S.

Если $\{R_\iota\,|\,\iota\in\mathfrak{J}\}$ — семейство колец [Ф-алгебр], то прямое произведение множеств R_ι, т. е. совокупность строк $(\ldots, a_\iota, \ldots)$, где $a_\iota\in R_\iota$ или, что то же самое, множество всех таких отображений a множества $\mathfrak{J}$ в дизъюнктное объединение $\bigcup\limits_{\iota\in\mathfrak{J}} R_\iota$, что $a(\iota)\in R_\iota$ (ср. п. I.1.2) можно превратить в кольцо [Ф-алгебру], определив операции покомпонентно, т. е.

$$(\ldots, a_\iota, \ldots)+(\ldots, b_\iota, \ldots)=(\ldots, a_\iota+b_\iota, \ldots)$$

и

$$(\ldots, a_\iota, \ldots)(\ldots, b_\iota, \ldots)=(\ldots, a_\iota b_\iota, \ldots)$$

[а также

$$\lambda(\ldots, a_\iota, \ldots) = (\ldots, \lambda a_\iota, \ldots)$$

для любого $\lambda \in \Phi$].

Это кольцо называется *прямым произведением* или *полной прямой суммой* колец [Ф-алгебр] R_ι и обозначается через $\prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$, а при $\mathfrak{J} = \{1, \ldots, n\}$ — через $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ или $R_1 \times \ldots \times R_n$. Если все кольца R_ι ассоциативны, коммутативны или обладают единицей, то то же самое справедливо и для их прямого произведения.

Пусть $R = \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$. Отображение π_ι, ставящее в соответствие каждой строке ее ι-ю координату, является гомоморфизмом прямого произведения на кольцо [алгебру] R_ι, который называется *естественной проекцией*. Кольцо [Ф-алгебра] R изоморфно прямому произведению $\prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$ тогда и только тогда, когда существуют гомоморфные наложения π_ι кольца R на кольца R_ι, обладающие следующими свойством: каковы бы ни были гомоморфизмы φ_ι кольца [Ф-алгебры] S в кольца [Ф-алгебры] R_ι существует один и только один гомоморфизм φ кольца [Ф-алгебры] R в кольцо [Ф-алгебру] S такой, что $\pi_\iota(\varphi(x)) = \varphi_\iota(x)$ для любого $x \in S$ (ср. п. VII. 1.7).

Подкольцо S кольца $R = \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$, состоящее из всех таких строк, у которых почти все координаты (т. е. все, кроме, быть может, конечного числа их) равны нулю, называется *внешней прямой суммой* колец R_ι и обозначается через $\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} R_\iota$. Отметим, что в случае бесконечного множества индексов $\mathfrak{J}$ прямая сумма ненулевых колец единицы не имеет, даже если единицей обладает каждое из колец R_ι. Если $\mathfrak{J}$ конечно, то внешняя прямая сумма совпадает с прямым произведением. Все сказанное остается в силе и для алгебр.

Говорят, что кольцо R *представлено в виде подпрямого произведения* колец R_ι, $\iota \in \mathfrak{J}$, или что R является *подпрямым произведением* колец R_ι, или что R *разлагается в подпрямое произведение* колец R_ι, если существует такое гомоморфное вложение φ кольца R

в прямое произведение $\prod_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$, что $\varphi\pi_\iota$ оказывается гомоморфным наложением R на R_ι для каждого $\iota \in \mathfrak{J}$. Подпрямое произведение называется *тривиальным*, если для некоторого $\iota \in \mathfrak{J}$ гомоморфизм $\varphi\pi_\iota$ оказывается изоморфизмом. Кольцо называется *подпрямо неразложимым* или *монолитным*, если всякое его представление в виде подпрямого произведения оказывается тривиальным. Кольцо R подпрямо неразложимо тогда и только тогда, когда пересечение всех его ненулевых идеалов отлично от $\{0\}$. Это пересечение называется *сердцевиной* или *монолитом* кольца. Всякое кольцо представляется в виде подпрямого произведения подпрямо неразложимых колец. Внешняя прямая сумма колец является частным случаем подпрямого произведения. Подпрямое произведение, содержащее прямую сумму, называется *специальным*. Подпрямое произведение колец R_ι, $\iota \in \mathfrak{J}$, называется *несократимым*, если для любого $\varkappa \in \mathfrak{J}$ гомоморфизм $\varphi\pi^{(\varkappa)}$, где $\pi^{(\varkappa)}$ — естественная проекция $\prod_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$ на $\prod_{\iota \in \mathfrak{J} \setminus \{\varkappa\}} R_\iota$, не является вложением. Это равносильно тому, что для любого $\varkappa \in \mathfrak{J}$ пересечение $\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J} \setminus \{\varkappa\}} \operatorname{Ker} \varphi\pi_\iota \neq \{0\}$. Грубо говоря, несократимость означает, что нельзя обойтись меньшим числом сомножителей. Все сказанное остается справедливым для алгебр.

Говорят, что кольцо R *аппроксимируется кольцами из некоторого класса* $\mathfrak{k}$, если для каждого ненулевого $a \in R$ найдется гомоморфизм $\varphi: R \to S$ такой, что $S \in \mathfrak{k}$ и $\varphi(a) \neq 0$. Если класс $\mathfrak{k}$ *замкнут относительно подколец* (т. е. вместе со всяким кольцом содержит и все его подкольца), то аппроксимируемость кольцами из класса $\mathfrak{k}$ равносильна разложимости в подпрямое произведение колец из $\mathfrak{k}$. Все сказанное справедливо и для алгебр. В частности, алгебра над полем называется *финитно аппроксимируемой*, если она аппроксимируется конечномерными алгебрами.

Если A и B — алгебры над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей, то тензорное произведение Φ-модулей $A \otimes_\Phi B$ (см. п. 4.1) становится Φ-алгеброй, если положить $(a' \otimes b')(a'' \otimes b'') = a'a'' \otimes b'b''$ и $\lambda(a \otimes b) = \lambda a \otimes b$ для любых $\lambda \in \Phi$, a, a', $a'' \in A$,

и b, b', $b'' \in B$. Эта алгебра называется *тензорным* или *кронекеровым произведением* алгебр A и B. Тензорные произведения $A \otimes_\Phi B$ и $B \otimes_\Phi A$ изоморфны. Если A и B — ассоциативные [коммутативные] алгебры, то ассоциативным [коммутативным] будет и их тензорное произведение. Если A есть Φ-алгебра, а Ψ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, содержащее Φ в качестве подкольца с той же самой единицей, то $\Psi \otimes_\Phi A$ естественным образом превращается в Ψ-алгебру (см. [87], с. 110—111). Ассоциативная алгебра A с единицей 1 над полем Φ изоморфна тензорному произведению своих подалгебр B и C, содержащих 1, тогда и только тогда, когда для любых [некоторых] баз $\{e_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ и $\{f_\varkappa \mid \varkappa \in \tilde{\mathfrak{K}}\}$ алгебр B и C соответственно имеем $e_\iota f_\varkappa = f_\varkappa e_\iota$ для любых $\iota \in \mathfrak{I}$ и $\varkappa \in \tilde{\mathfrak{K}}$, а множество $\{e_\iota f_\varkappa \mid \iota \in \mathfrak{I},\ \varkappa \in \tilde{\mathfrak{K}}\}$ служит базой алгебры A (см. [31], с. 156, предложение 2).

Представлением ассоциативной алгебры A над полем Φ называется ее гомоморфизм в алгебру линейных преобразований конечномерного линейного пространства над полем Φ или, что то же самое, в алгебру матриц над полем Φ. *Точным* называется представление, являющееся вложением. Всякая конечномерная алгебра A с единицей имеет точное представление, ибо умножение справа на элемент $a \in A$ является линейным преобразованием $\Gamma(a)$ линейного пространства A. При этом $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$ для любых a, $b \in A$. Классические аспекты теории представлений отражены в [56] и [76], § 55. Современной теории представлений с широким использованием колчанов посвящена монография [245]. В обзорных статьях [109] и [243] рассматриваются представления конечномерных алгебр конечного типа, т. е. таких, что множество неизоморфных неразложимых модулей над ними конечно. Обстоятельный обзор теории представлений артиновых алгебр дан в [241]. Представлениям колец матрицами над телом посвящена монография [251].

Натуральное число n называется *характеристикой кольца* R, если $na = 0$ для всех $a \in R$ и $kb \neq 0$, при $0 \neq b \in R$, $0 \neq k \in \mathbf{Z}$ и $k < n$. Если $na \neq 0$ всякий раз, когда $0 \neq a \in R$ и $0 \neq n \in \mathbf{Z}$, то говорят, что *характеристика кольца R равна нулю.* Кольцо может не иметь характеристики. Например, ее нет у внешней

прямой суммы кольца вычетов по модулю 2 и кольца вычетов по модулю 3. Если же характеристика есть, то она равна нулю или простому числу. Характеристика алгебры над полем совпадает с характеристикой поля.

1.2. Идеалы. Подмножество I кольца [Ф-алгебры] R называется *двусторонним идеалом* (часто просто *идеалом*), если $0 \in I$, а $a, b \in I$ влечет $a-b \in I$ и $ar, ra \in I$ для любого $r \in R$ [а также $\lambda a \in I$ для любого $\lambda \in \Phi$]. Запись $I \lhd R$ обычно означает, что I — двусторонний идеал кольца [Ф-алгебры] R. Ясно, что идеал кольца R является его подкольцом и служит идеалом любого подкольца кольца R, в котором он содержится. Аналогично, идеал Ф-алгебры R является ее подалгеброй и служит идеалом любой подалгебры алгебры R, в которой он содержится.

Само кольцо R и множество $\{0\}$ являются идеалами. Совокупность всех четных чисел является идеалом кольца целых чисел, а множество всех многочленов без свободного члена — идеал в кольце многочленов. В кольце и Ф-алгебре с нулевым умножением идеалами служат любые подгруппы аддитивной группы и любые подмодули [подпространства] соответственно. Отсюда видно, что идеал алгебры, рассматриваемой как кольцо, может не быть идеалом алгебры. Однако, если R есть Ф-алгебра с единицей 1, то множество $\{\lambda 1 \mid \lambda \in \Phi\}$ оказывается подалгеброй алгебры R, изоморфной кольцу Ф. Поэтому в этом случае можно считать, что $\Phi \subseteq R$. Отсюда вытекает, что при наличии единицы любой идеал кольца R оказывается идеалом Ф-алгебры R.

Если $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец [Ф-алгебр], то множество $\operatorname{Ker} \varphi = \{x \mid x \in R,\ \varphi(x) = 0\}$ оказывается идеалом кольца [Ф-алгебры] R. Этот идеал называется *ядром гомоморфизма* φ. Гомоморфизм φ оказывается изоморфизмом в том и только том случае, когда $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

В случае гомоморфизма φ, указанного в примере 1) на с. 296, $\operatorname{Ker} \varphi = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$.

Идеал I кольца или алгебры R называется *характеристическим* [*вполне характеристическим*], если $\varphi(x) \in I$ для любого $x \in I$ и любого автоморфизма [эндоморфизма] кольца или алгебры R.

Пересечение любого множества идеалов кольца [алгебры] снова является идеалом этого кольца [алгебры]. В частности, идеалом оказывается пересечение всех идеалов кольца [алгебры] R, содержащих данное подмножество $X \subseteq R$. Про этот идеал говорят, что он *порождается множеством* X. Отметим, что этот идеал является наименьшим идеалом, содержащим множество X. Разумеется, всякий идеал является подкольцом. Однако подкольцо, порожденное множеством X, как правило меньше идеала, порожденного этим множеством. Идеал, порожденный одним элементом $a \in R$, называется *главным* и часто обозначается через (a). Если R — ассоциативное кольцо [Ф-алгебра], то имеем

$$(a) = \left\{ \sum_i x_i a y_i + \sum_j u_j a + \sum_k a v_k + \lambda a \,|\, x_i, y_i, u_j, v_k \in R,\ \lambda \in \mathbf{Z}\,[\lambda \in \Phi] \right\},$$

а при наличии в кольце R единицы —

$$(a) = \left\{ \sum_i x_i a y_i \,|\, x_i y_i \in R \right\}.$$

Идеал M кольца [алгебры] R называется *минимальным*, если $M \neq 0$ и не содержит идеалов кольца [алгебры] R, отличных от $\{0\}$ и M, и *максимальным*, если $M \neq R$ и не содержится ни в каком идеале кольца [алгебры] R, отличном от M и R.

Каждый минимальный идеал является главным. В кольце или алгебре R с левой [правой] единицей всякий идеал, отличный от R, вкладывается в некоторый максимальный идеал. Однако R может не содержать минимальных идеалов. Их, например, нет в кольце целых чисел. Кольцо R называется *простым*, если R не является кольцом с нулевым умножением и не содержит идеалов, отличных от $\{0\}$ и R. В таком кольце $\{0\}$ является максимальным идеалом, а R минимальным. В кольце целых чисел $\mathbf{Z}$ максимальными являются главные идеалы $\mathbf{Z}p$, где p — простое число. Среди ассоциативно-коммутативных колец с единицей простыми кольцами являются поля и только они. К числу простых относятся и все кольца матриц над телами (и, в частности, над полями). Более того, простым оказывается кольцо матриц над любым простым ассоциативным кольцом. Отметим, что любая абелева

группа R простого порядка, рассматриваемая как кольцо с нулевым умножением, не содержит идеалов, отличных от $\{0\}$ и R, но простым кольцом не является.

Поскольку любой идеал I кольца [Ф-алгебры] R является подгруппой аддитивной группы и последняя коммутативна, то можно рассмотреть факторгруппу R/I. Эта факторгруппа становится кольцом [Ф-алгеброй], если для любых смежных классов $a+I$ и $b+I$, где $a, b \in R$, положить $(a+I)(b+I) = ab+I$ [и $\lambda(a+I) = \lambda a + I$ для любого $\lambda \in \Phi$]. Построенное таким образом кольцо [Ф-алгебра] называется *факторкольцом кольца R* [*факторалгеброй алгебры R*] *по идеалу I*. Отображение π: $R \to R/I$, где $\pi(x) = x+I$ для всех $x \in R$, оказывается гомоморфным наложением или, что то же самое, сюръективным гомоморфизмом, который называется *естественным* или *каноническим*. Идеалы кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ исчерпываются множествами вида $\mathbf{Z}n$. Факторкольцо $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$ называется *кольцом вычетов по модулю n*.

Факторкольцо ассоциативного [коммутативного] кольца ассоциативно [коммутативно]. Если кольцо R содержит единицу 1, то класс $1+I$ служит единицей факторкольца. Способ построения такого кольца R, что для данных колец S и T имеет $S \simeq I \lhd R$ и $R/I \simeq T$ описан в [240], § 52. Имеет место *теорема о гомоморфизме*: если φ: $R \to S$ — гомоморфное наложение колец [Ф-алгебр], то факторкольцо [факторалгебра] R/I изоморфно кольцу [Ф-алгебре] S. При этом изоморфизм χ: $S \to R/\mathrm{Ker}\,\varphi$ может быть выбран так, что для всех $x \in R$ имеем $\chi(\varphi(x)) = \pi(x)$, где π — естественный гомоморфизм R на $R/\mathrm{Ker}\,\varphi$. Другими словами, диаграмма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & S \arrow[d, "\chi"] \\ & R/\mathrm{Ker}\,\varphi \end{tikzcd}$$

оказывается коммутативной.

Между идеалами факторкольца [факторалгебры] R/I и идеалами кольца [алгебры] R, содержащими идеал I, существует взаимно однозначное соответ-

ствие Г, сохраняющее порядок (см. п. I.2.1). Оно определяется условием

$$\Gamma(H)=\{h+I\mid h\in H\},$$

где $I\subseteq H\lhd R$. Отсюда вытекает, что факторкольцо [факторалгебра] оказывается простым тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал.

Пусть $\varphi\colon R\to S$ — гомоморфизм колец [алгебр]. Если I — идеал в R, то $\varphi(I)$ — идеал в $\operatorname{Im}\varphi$, а если φ — наложение, то и в S. Если I и J — идеалы в R и $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq I$, то $\varphi(I\cap J)=\varphi(I)\cap\varphi(J)$. Последнее остается справедливым и в случае, когда I и J — подкольца [подалгебры]. Если $\bar I$ — подкольцо [подалгебра] или идеал в S, то множество $\varphi^{-1}(\bar I)$ оказывается подкольцом [подалгеброй] или идеалом в R соответственно. При этом $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq\varphi^{-1}(\bar I)$ и $\varphi^{-1}(\bar I)/\operatorname{Ker}\varphi\simeq\bar I$.

Если I, J — идеалы кольца [алгебры] R, то множество $I+J=\{x+y\mid x\in I,\ y\in J\}$ оказывается идеалом, который называется *суммой* идеалов I и J. Этот идеал порождается объединением $I\cup J$. Для любого множества идеалов $\{I_\iota\mid\iota\in\mathfrak{J}\}$ назовем их *суммой* идеал I, порожденный объединением $\bigcup\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}I_\iota$. Этот идеал I состоит из всех элементов x, представимых в виде $x=x_1+\ldots+x_m$, где $x_k\in I_{\iota_k}$ для некоторых $\iota_k\in\mathfrak{J}$ и обозначается через $I=\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}I_\iota$, а в случае, когда $\mathfrak{J}=\{1,\ldots,n\}$, — через $I=I_1+\ldots+I_n$. Сумма I называется *прямой* (в этом случае пишут $I=\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}I_\iota$, а для конечного множества слагаемых $I=I_1\oplus\ldots\oplus I_n$), если выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных между собой условий:

(1) в представлении $a=a_1+\ldots+a_m$, где $0\neq a_k\in I_{\iota_k}$ и $\iota_1,\ldots,\iota_m$ различны, существующем по определению суммы идеалов, элементы a_i определяются однозначно;

(2) $I_\iota\cap\sum\limits_{\iota\neq\varkappa\in\mathfrak{J}}I_\varkappa=0$ для любого $\iota\in\mathfrak{J}$;

(3) если $x_1+\ldots+x_m=0$, где $x_k\in I_{\iota_k}$ и $\iota_1,\ldots,\iota_m$ различны, то $x_1=\ldots=x_m=0$.

Если $I=\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}I_\iota$ — прямая сумма идеалов, то $I_\iota I_\varkappa=0$ для любых различных ι и $\varkappa$ из $\mathfrak{J}$. Поэтому если кольцо [алгебра] R совпадает с прямой суммой

$\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} I_\iota$ своих идеалов, то оно изоморфно внешней прямой сумме этих идеалов, а если $\mathfrak{J}$ конечно, то — и их прямому произведению. Наоборот, если $R = \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} R_\iota$ — прямое произведение и $\varkappa \in \mathfrak{J}$, то множество $R'_\varkappa$ всех таких строк a из R, что $\pi_\iota(a) = 0$ при всех $\iota \neq \varkappa$ оказывается идеалом в R, который как кольцо [алгебра] изоморфен $R_\varkappa$. Прямая сумма этих идеалов совпадает с внешней прямой суммой колец [алгебр] R_ι.

Если I — идеал кольца [алгебры] R, то даже для ассоциативно-коммутативного случая идеал кольца [алгебры] I может не быть идеалом в R. Однако если $R = I \oplus J$, то любой идеал кольца [алгебры] I оказывается идеалом в R.

Пусть I и J — идеалы кольца [алгебры] R. Тогда $(I + J)/I \cap J \simeq (I/I \cap J) \oplus (J/I \cap J)$ и $I + J/I \simeq J/I \cap J$. В частности, $I \oplus J/I \simeq J$. Если, кроме того, $I \subseteq J$, то $R/J \simeq (R/I)/(J/I)$. Если, наконец, φ: $R \to S$ — гомоморфизм колец [алгебр], то

$$\varphi(I + J) = \varphi(I) + \varphi(J).$$

1.3. Алгебры умножений и дифференцирований. Пусть A — алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей. В частности, A может быть кольцом, т. е. алгеброй над кольцом $\mathbf{Z}$. Если $a \in A$, то через L_a и R_a обозначим отображения алгебры A в себя, определяемые как $L_a(x) = ax$ и $R_a(x) = xa$ для любого $a \in A$ соответственно. Эти отображения называются соответственно *операторами левого и правого умножения* на элемент a. Подалгебры алгебры $\mathrm{End}_\Phi A$ эндоморфизмов Φ-модуля A (при $\Phi = \mathbf{Z}$ рассматриваем A как абелеву группу), порожденные множествами $\{L_a \mid a \in A\}$ и $\{R_a \mid a \in A\}$, называются соответственно *алгеброй левых* и *правых умножений* алгебры A (в обозначениях $L(A)$ и $R(A)$). Подалгебра, порожденная объединением $L(A) \cup R(A)$ называется *алгеброй умножений* алгебры A и обозначается через $M(A)$. Если A — ассоциативная алгебра и в качестве умножения в $\mathrm{End}_\Phi A$ принято $\varphi \circ \psi$ (см. п. I. 1.4), то алгебра A изоморфна $L(A)$ и антиизоморфна $R(A)$ причем изоморфизм [антиизоморфизм] Γ определяется равенством $\Gamma(a) = L_a$ [$\Gamma(a) = R_a$] для всех $a \in A$.

Если B — подалгебра алгебры A, то через $M^A(B)$ обозначается подалгебра алгебры $M(A)$, порожденная всеми операторами L_b и R_b, где $b \in B$.

Рассматривается также *лиева алгебра умножений алгебры* A, определяемая как подалгебра алгебры Ли $(\mathrm{End}_\Phi A)^{(-)}$, порождаемая всеми операторами L_a и R_a, где $a \in A$, и обозначаемая через $\mathrm{Lie}\, A$. Ясно, что $\mathrm{Lie}\, A \subseteq M(A)^{(-)}$.

Свойства алгебры A, разумеется, связаны со свойствами ее алгебры умножений. Например, алгебра A *нильпотентна* (т. е. найдется такое натуральное n, что произведение любых n элементов из A с любым распределением скобок равно нулю) тогда и только тогда, когда нильпотентна ассоциативная алгебра $M(A)$. Если конечномерная алгебра A над полем Φ является прямым произведением простых, то такой же оказывается и алгебра $M(A)$.

Отображение d кольца A в себя называется *дифференцированием*, если $d(x+y) = d(x) + d(y)$ и $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для любых $x, y \in A$. Если A — алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей, то дополнительно требуется, чтобы $d(\lambda x) = \lambda d(x)$ для любых $\lambda \in \Phi$ и $x \in A$. Каждому элементу a из A отвечает дифференцирование $\bar{a}$, определяемое равенством $\bar{a}(x) = ax - xa$ для всех $x \in A$. Такие дифференцирования называются *внутренними*. Совокупность дифференцирований на любом кольце A образует кольцо Ли относительно операции $[d', d''] = d' \circ d'' - d'' \circ d'$. Это кольцо называется *кольцом дифференцирований* кольца R и обозначается через $\mathrm{Der}\, A$. Если $d \in \mathrm{Der}\, A$ и $a \in A$, то $[d, \bar{a}] = \overline{d(a)}$ и, следовательно, внутренние дифференцирования образуют идеал кольца $\mathrm{Der}\, A$. Если A есть Φ-алгебра, то кольцо $\mathrm{Der}\, A$ становится Φ-алгеброй, если для любых $\lambda \in \Phi$, $d \in \mathrm{Der}\, A$ и $x \in A$ положить $(\lambda d)(x) = d(\lambda x)$. При этом $\lambda \bar{a} = \overline{\lambda a}$ для любых $\lambda \in \Phi$ и $a \in A$, т. е. внутренние дифференцирования образуют идеал алгебры дифференцирований.

Если $d \in \mathrm{Der}\, A$, то справедлива формула Лейбница:

$$d^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^i(x)\, d^{n-i}(y)$$

для любых $x, y \in A$.

Если A есть Φ-алгебра и $\varphi \in \mathrm{End}_\Phi A$, то равносильны следующие условия: (1) $\varphi \in \mathrm{Der}\, A$; (2) $L_{\varphi(a)} = \varphi \circ L_a - L_a \circ \varphi$ для любого $a \in A$; (3) $R_{\varphi(a)} = \varphi \circ R_a - R_a \circ \varphi$ для любого $a \in A$.

Если A — ассоциативная алгебра и $a \in A$, то, очевидно, $\bar{a} = L_a - R_a$. Если A — алгебра Ли и a, $b \in A$, то $L_a = -R_a$ и $R_{ab} = R_b \circ R_a - R_a \circ R_b$.

Каждое дифференцирование конечномерной алгебры A над полем характеристики нуль оказывается внутренним, если A является прямым произведением простых алгебр и или ассоциативна, или является алгеброй Мальцева (в частности, алгеброй Ли), или содержит одностороннюю единицу. То же самое верно для любой центральной простой конечномерной ассоциативной алгебры над произвольным полем. Размерность алгебры дифференцирований n-мерной ассоциативной алгебры над полем, не являющейся алгеброй с нулевым умножением, не превосходит $n^2 - n$. Если A — простое ассоциативное кольцо с инволюцией, его размерность над центром не менее 5 и $2A = A$, то дифференцированием оказывается всякое такое отображение δ кольца A в себя, что $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$ и $\delta(xx^*) = \delta(x)x^* + x\delta(x^*)$ для любых $x, y \in A$. Если в ассоциативном кольце A справедлива импликация $((2x = 0) \Rightarrow (x = 0))$ и существует такое дифференцирование d, что для любого $x \in A$ элемент $d(x)$ обратим или равен нулю, то A или тело, или кольцо матриц второго порядка над телом ([68], с. 69, 71; [31], с. 224, теорема 2; [172], теорема 4.1.3; [96], с. 99, следствие; см. также [55], § 10, и [90], пп. 7.27—7.30, 7.37—7.40).

Если d — *нильпотентное дифференцирование* алгебры A над полем (т. е. $d^n = 0$ для некоторого n), то отображение

$$\exp d = 1 + d + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \ldots + \frac{d^{n-1}}{(n-1)!}$$

оказывается автоморфизмом алгебры A.

О дифференцированиях первичных и полупервичных ассоциативных колец см. [68], с. 69; [93], теорема 21; [31], § IV. 14, а о дифференцированиях колец многочленов и степенных рядов — [23], п. IV. 5.8—IV. 5.10.

1.4. Радикалы. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебр над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ, содержащий вместе с любой алгеброй все ее идеалы и гомоморфные образы. В частности, если $\Phi = \mathbf{Z}$, то $\mathfrak{K}$ является классом колец. *Радикалом* на классе $\mathfrak{K}$ называется отображение $\mathfrak{r}$ класса $\mathfrak{K}$ в себя, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathfrak{r}(R)$ — идеал алгебры R; 2) $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(R)) = \mathfrak{r}(R)$; 3) если $\varphi\colon R \to R'$ — гомоморфное наложение алгебр, то $\varphi(\mathfrak{r}(R)) \subseteq \mathfrak{r}(R')$; 4) $\mathfrak{r}(R/\mathfrak{r}(R)) = \{0\}$.

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал. Алгебра R называется $\mathfrak{r}$-*радикальной*, если $\mathfrak{r}(R) = R$, и $\mathfrak{r}$-*полупростой*, если $\mathfrak{r}(R) = \{0\}$. Идеал $\mathfrak{r}(R)$ называют $\mathfrak{r}$-*радикалом* алгебры R. Идеал I алгебры R называется $\mathfrak{r}$-*радикальным*, если $\mathfrak{r}(I) = I$.

Грубо говоря, каждый радикал $\mathfrak{r}$ сводит изучение класса всех алгебр из $\mathfrak{K}$ к изучению двух меньших классов колец $\mathfrak{r}$-полупростых и $\mathfrak{r}$-радикальных. Правда, на практике изучению, как правило, поддается лишь один из этих классов.

Тривиальными примерами радикалов служат отображения $\mathfrak{r}(R) = \{0\}$ и $\mathfrak{r}(R) = R$ для всех $R \in \mathfrak{K}$. В первом случае все алгебры оказываются $\mathfrak{r}$-полупростыми, а $\{0\}$ — единственной $\mathfrak{r}$-радикальной алгеброй. Прямо противоположная ситуация наблюдается во втором случае. Менее тривиальный пример доставляет определение:

$$\mathfrak{r}(R) = \{x \mid x \in R,\ nx = 0 \text{ для некоторого } n \in \mathbf{Z}\}$$

В этом случае $\mathfrak{r}$-радикальными оказываются алгебры с периодической аддитивной группой, а $\mathfrak{r}$-полупростыми — алгебры с аддитивной группой без кручения. Примером $\mathfrak{r}$-полупростого кольца может служить поле действительных чисел, а примером $\mathfrak{r}$-радикального — любое кольцо вычетов.

Если $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — радикалы на классе $\mathfrak{K}$, то полагаем $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{s}$, если $\mathfrak{r}(R) \subseteq \mathfrak{s}(R)$ для любой алгебры $R \in \mathfrak{K}$. Эквивалентны следующие утверждения о радикалах $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$: (1) $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{s}$; (2) всякая $\mathfrak{r}$-радикальная алгебра из $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{s}$-радикальна; (3) всякая $\mathfrak{s}$-полупростая алгебра из $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{r}$-полупроста.

Если $\mathfrak{r}$ — радикал на классе $\mathfrak{K}$ и $R \in \mathfrak{K}$, то: 1) $\mathfrak{r}(R) = R$ тогда и только тогда, когда R не имеет ненулевых $\mathfrak{r}$-полупростых гомоморфных образов; 2) $\mathfrak{r}(R) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда R не содержит ненулевых $\mathfrak{r}$-радикальных идеалов; 2) сумма любого множества $\mathfrak{r}$-радикальных идеалов алгебры R является $\mathfrak{r}$-радикальным идеалом: 4) $\mathfrak{r}(R)$ — наибольший $\mathfrak{r}$-радикальный идеал алгебры R; 5) $\mathfrak{r}(R) = \sum \{T \mid T$ —

$\mathfrak{r}$-радикальный идеал в $R\}$; 6) пересечение любого множества таких идеалов I из R, что $\mathfrak{r}(R/I)=\{0\}$, удовлетворяет этому условию; 7) $\mathfrak{r}(R)=\bigcap\{P\,|\,P$—идеал в R и $\mathfrak{r}(R/P)=\{0\}\}$; 8) $\mathfrak{r}(R)$ — единственный $\mathfrak{r}$-радикальный идеал алгебры R, факторалгебра по которому $\mathfrak{r}$-полупроста ([1], с. 91—93).

Радикал $\mathfrak{r}$ называется *идеально наследственным*, если $\mathfrak{r}(I)=\mathfrak{r}(R)\cap I$ для любой алгебры R и ее идеала I, и *наследственным*, если все идеалы $\mathfrak{r}$-радикального кольца $\mathfrak{r}$-радикальны. Если $\mathfrak{r}$ — наследственный радикал и любой идеал $\mathfrak{r}$-полупростой алгебры $\mathfrak{r}$-полупрост, то $\mathfrak{r}$ оказывается идеально наследственным. В классе ассоциативных (и даже альтернативных) алгебр наследственность и идеальная наследственность — равносильные свойства.

Если $\mathfrak{M}$ — подкласс класса $\mathfrak{K}$, то радикал $\mathfrak{r}_{\mathfrak{M}}$ называется *нижним радикалом*, *определяемым классом* $\mathfrak{M}$, если для любой алгебры R из $\mathfrak{K}$ имеет место

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{M}}(R)=\bigcap\{\mathfrak{r}(R)\,|\,\mathfrak{r}\text{ — такой радикал, что все алгебры из }\mathfrak{M}\ \mathfrak{r}\text{-радикальны}\}.$$

Если класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно гомоморфных образов и $R\in\mathfrak{K}$, то $R=\mathfrak{r}_{\mathfrak{M}}(R)$ тогда и только тогда, когда существует цепочка подалгебр

$$0\subseteq R_1\subseteq\ldots\subseteq R_\alpha\subseteq R_{\alpha+1}\subseteq\ldots\subseteq R_\gamma=R$$

такая, что R_α — идеал алгебры $R_{\alpha+1}$, $R_{\alpha+1}/R_\alpha\in\mathfrak{M}$ и $R_\alpha=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}R_\beta$ — идеал алгебры R, если α — предельный трансфинит ([1], с. 116, предложение 5).

Если $\mathfrak{M}$ — подкласс класса $\mathfrak{K}$, то радикал $\mathfrak{r}^{\mathfrak{M}}$ называется *верхним радикалом*, *определяемым классом* $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{r}^{\mathfrak{M}}$ — наибольший из всех таких радикалов $\mathfrak{r}$, что все алгебры из класса $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{r}$-полупросты. Если $\mathfrak{K}$ состоит из ассоциативных алгебр, то верхний радикал $\mathfrak{r}^{\mathfrak{M}}$ существует для любого *абстрактного класса* $\mathfrak{M}$ (последнее означает, что вместе с каждой алгеброй класс $\mathfrak{M}$ содержит все алгебры, изоморфные ей). В общем случае это, вообще говоря, не так. Однако если любой ненулевой идеал любой алгебры из $\mathfrak{M}$ имеет ненулевые гомоморфные образы, принадлежащие $\mathfrak{M}$, то радикал $\mathfrak{r}^{\mathfrak{M}}$ существует и для любой алгебры R из

$\mathfrak{K}$ имеет место

$$\mathfrak{r}^{\mathfrak{M}}(R) = \sum \{I \mid I \text{ — идеал в } R, \text{ не имеющий ненулевых гомоморфных образов, принадлежащих } \mathfrak{M}\}.$$

Любой радикал совпадает с некоторым верхним радикалом для подходящего подкласса $\mathfrak{M}$ (см. [1], с. 99, следствие 2; с. 100, следствие 3).

Если класс всех простых алгебр из $\mathfrak{K}$ разбить на два непересекающихся подкласса $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$, то существуют такие радикалы $\mathfrak{r}$, что все алгебры из $\mathfrak{P}'$ $\mathfrak{r}$-радикальны, а все алгебры из $\mathfrak{P}''$ $\mathfrak{r}$-полупросты. Именно, можно положить $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{P}'}$ или $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{\mathfrak{P}''}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — подкласс класса $\mathfrak{K}$, замкнутый относительно гомоморфных образов. Положим

$$\mathfrak{M}^{-1} = \{R \mid R \in \mathfrak{K}, \text{ ненулевые идеалы алгебры } R \text{ не принадлежат } \mathfrak{M}\},$$

$$^{-1}\mathfrak{M} = \{R \mid R \in \mathfrak{K}, \text{ ненулевые гомоморфные образы алгебры } R \text{ не принадлежат } \mathfrak{M}\},$$

$$\mathfrak{M}^{(1)} = {}^{-1}(\mathfrak{M}^{-1}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}^{(\alpha)} = \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{M}^{(\beta)}\Big)^{(1)}.$$

Возникающая таким образом возрастающая цепочка классов алгебр называется *цепью Куроша*. Алгебра R оказывается $\mathfrak{r}_{\mathfrak{M}}$-радикальной тогда и только тогда, когда $R \in \mathfrak{M}^{(\alpha)}$ для некоторого трансфинита α. Если $\mathfrak{K}$ — класс всех алгебр над полем Φ, а класс $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}^{(1)}$ вместе со всякой алгеброй содержит все ее идеалы, то $\mathfrak{M}^{(\alpha)} \neq \mathfrak{M}^{(\alpha+1)}$ для любого трансфинита α. Напротив, если все алгебры из $\mathfrak{K}$ ассоциативны, то $\mathfrak{M}^{(\omega)} = \mathfrak{M}^{(\omega+\alpha)}$ для любого α (см. [1], с. 113, предложение 3; предложение 5; теорема 1).

Подкласс $\mathfrak{S}$ класса $\mathfrak{K}$ называется *радикальным* [*полупростым*], если существует такой радикал $\mathfrak{r}$, что $\mathfrak{S}$ совпадает с классом всех $\mathfrak{r}$-радикальных [$\mathfrak{r}$-полупростых] алгебр из $\mathfrak{K}$. Эквивалентны следующие свойства подкласса $\mathfrak{R}$ класса $\mathfrak{K}$: (1) $\mathfrak{R}$ радикален; (2) $\mathfrak{R}$ обладает следующими свойствами: а) $\mathfrak{R}$ замкнут относительно гомоморфных образов; б) в любой алгебре $\mathfrak{R}$ из $\mathfrak{K}$ сумма любого множества идеалов, являющихся алгебрами из $\mathfrak{R}$, сама принадлежит $\mathfrak{R}$; в) если T — сумма всех идеалов алгебры R из $\mathfrak{K}$, являющихся

алгебрами из $\mathfrak{K}$, то R/T не содержит ненулевых идеалов, являющихся алгебрами из $\mathfrak{R}$; г) в любой алгебре R из $\mathfrak{K}$ объединение любой цепи идеалов, являющихся алгебрами из $\mathfrak{R}$, само принадлежит $\mathfrak{R}$; д) если I — такой идеал алгебры R из $\mathfrak{K}$, что $I \in \mathfrak{R}$ и $R/I \in \mathfrak{R}$, то и $R \in \mathfrak{R}$; (3) $\mathfrak{R}$ обладает свойствами а), б) и в); (4) обладает свойствами а), б) и д); (5) $\mathfrak{R}$ обладает свойствами а), г) и д); (6) алгебра $R \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathfrak{R}$. Для подкласса $\mathfrak{P}$ класса $\mathfrak{K}$ равносильны следующие условия: (1) $\mathfrak{P}$ полупрост; (2) $\mathfrak{P}$ обладает следующими свойствами: а) любой ненулевой идеал любой алгебры R из $\mathfrak{P}$ имеет ненулевые гомоморфные образы, принадлежащие $\mathfrak{P}$; б) если идеалы I_ι, $\iota \in \mathfrak{I}$, алгебры $R \in \mathfrak{K}$ таковы, что $R/I_\iota \in \mathfrak{P}$ для всех $\iota \in \mathfrak{I}$, то $R\Big/\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} I_\iota \in \mathfrak{K}$; в) класс $\mathfrak{P}$ замкнут относительно подпрямых произведений; г) если идеалы I_ι, $\iota \in \mathfrak{I}$, алгебры R из $\mathfrak{K}$ образуют цепь по включению и $R/I_\iota \in \mathfrak{P}$ для всех $\iota \in \mathfrak{I}$, то $R\Big/\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} I_\iota \in \mathfrak{P}$; д) если P — пересечение всех таких идеалов I алгебры $R \in \mathfrak{K}$, что $R/I \in \mathfrak{K}$, то P не имеет ненулевых гомоморфных образов, принадлежащих $\mathfrak{P}$; е) если I — такой идеал алгебры R из $\mathfrak{K}$, что $I \in \mathfrak{P}$ и $R/I \in \mathfrak{P}$, то и $R \in \mathfrak{P}$; (3) $\mathfrak{P}$ обладает свойствами а), б) и в); (4) $\mathfrak{P}$ обладает свойством а) и если любой ненулевой идеал алгебры R из $\mathfrak{K}$ имеет ненулевые гомоморфные образы, принадлежащие классу $\mathfrak{P}$, то $R \in \mathfrak{P}$. Заметим, что идеалы алгебры, принадлежащей полупростому классу, могут ему не принадлежать ([1], с. 94, теорема 1; с. 97, теорема 2, теорема 3; с. 101—102, следствие 4).

§ 2. Ассоциативные кольца

На протяжении этого параграфа под кольцом всегда понимается ассоциативное кольцо. В частности, коммутативное кольцо — это всегда ассоциативно-коммутативное кольцо.

2.1. Специфические элементы. Если X, Y — подмножества кольца R, то через XY обозначается совокупность всевозможных сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, где $x_i \in X$,

$y_i \in Y$ *). Для любых $X, Y, Z \subseteq R$ имеет место $(XY)Z = X(YZ)$ и, следовательно, произведение $X_1 \ldots X_m$, где $X_i \subseteq R$, не зависит от расстановки скобок. Если X и Y содержат 0, то справедливы и равенства $(X + Y)Z = XZ + YZ$ и $Z(X + Y) = ZX + ZY$, где $Z \subseteq R$ и $X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Если X и Y — подкольца [подалгебры], то для коммутативного кольца [алгебры] R подмножество XY оказывается подкольцом [подалгеброй]. Однако в общем случае это не так.

Элемент a кольца R называется *левым* [*правым*] *делителем нуля*, если существует такой ненулевой элемент $b \in R$, что $ab = 0$ [$ba = 0$]. Кольцо, в котором нет делителей нуля, отличных от 0, называется *кольцом без делителей нуля*, а при наличии единицы, отличной от 0, — *областью целостности* (иногда просто *областью*) или *целостным кольцом*.

Примером области целостности служит кольцо целых чисел. В кольце матриц второго порядка над полем делителем нуля является, например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ибо $A^2 = 0$.

Элемент a кольца R называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого натурального n. Если при этом $a^{n-1} \neq 0$, то n называется *индексом нильпотентности* элемента a. Конечно, всякий нильпотентный элемент является делителем нуля. Указанная выше матрица A является нильпотентным элементом индекса 2. Элемент a называется *строго нильпотентным*, если в любой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, где $a_0 = a$ и $a_{i+1} \in a_i R a_i$ для некоторого номера n имеем $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Всякий строго нильпотентный элемент нильтотентен. Для коммутативных колец верно и обратное.

Элемент a кольца R с единицей называется *обратимым справа* [*слева*], если $ab = 1$ [$ba = 1$] для некоторого $b \in R$. Элемент, обратимый справа и слева, называется *обратимым*. Обратимый справа [слева] элемент не может быть правым [левым] делителем нуля. Каждый обратимый элемент обладает единственным левым и единственным правым обратным, причем эти обратные совпадают между собой. Этот

---

*) Иногда под XY понимают множество $\{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Но, как правило, в этом случае делается специальная оговорка.

единственный элемент обозначается через a^{-1} и называется *обратным* для a. Для обратимых элементов a и b справедливо равенство $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. Отсюда вытекает, что обратимые элементы кольца с единицей образуют группу, называемую *группой обратимых элементов* и обозначаемую через $U(R)$. Заметим, что $U(\mathbf{Z})=\{1,-1\}$, а $U(M_n(\Phi))$, где Φ — поле, состоит из всех невырожденных матриц. Подчеркнем, что односторонне обратимый элемент может иметь несколько соответствующих обратных. Если a — нильпотентный элемент индекса n в кольце R с единицей, то $1-a$ — обратимый элемент, ибо

$$(1-a)(1+a+a^2+\ \ldots\ +a^{n-1})=1=$$
$$=(1+a+a^2+\ \ldots\ +a^{n-1})(1-a).$$

Разумеется, обратим и элемент $1+a$.

Элемент z кольца R называется *центральным*, если $az=za$ для любого $a\in R$. Совокупность всех центральных элементов кольца R является подкольцом, которое называется *центром кольца* R и обозначается через $\mathfrak{Z}(R)$. Если R — кольцо [Φ-алгебра] с единицей, то $n1\in(R)$ для любого целого числа n [$\lambda 1\in(R)$ для любого $\lambda\in\Phi$].

Если X — подмножество кольца R, то множество

$$\operatorname{Cent}(X)=\{r\mid r\in R,\ xr=rx \quad \text{для всех} \quad x\in X\}$$

оказывается подкольцом, которое называется *централизатором множества* X. Централизатор самого кольца R совпадает с его центром. Если R — алгебра, то централизаторы ее подмножеств и, в частности, центр оказываются подалгебрами. Если R — Φ-алгебра с единицей 1, то $\Phi 1\in\mathfrak{Z}(R)$. Если $\Phi 1=\mathfrak{Z}(R)$, то алгебра R называется *центральной*. Размерность центральной простой алгебры над полем всегда является точным квадратом (см. [96], с. 91, следствие). Централизатор элемента a из кольца или Φ-алгебры R, очевидно, содержит все элементы вида $\sum_{i=1}^{n} z_i a^i$, где $z_i\in\mathfrak{Z}(R)$. В некоторых случаях верно и обратное. Так, если F — свободная алгебра с единицей над Φ и $a\in F\setminus\Phi 1$, то $\operatorname{Cent}\{a\}=\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a^i \mid \lambda_i\in\Phi,\ 0\leqslant n\in\mathbf{Z}\right\}$ (см. [49], с. 306, теорема 8.5). Если $R=M_n(\Phi)$, где

Φ — поле и $A \in R$, то

$$\mathrm{Cent}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i A^i \mid \lambda_i \in \Phi,\ 0 \leqslant m \leqslant \mathbf{Z} \right\}$$

в том и только том случае, когда элементарные делители характеристической матрицы $A - tE$ взаимно просты (см. [26], с. 184, следствие 1). При тех же обозначениях

$$\mathrm{Cent}(\mathrm{Cent}\{A\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i A^i \mid \lambda_i \in \Phi,\ 0 \leqslant m \in \mathbf{Z} \right\}$$

для любой матрицы A [63], с. 195, теорема 4). Если S — простая подалгебра алгебры $M_n(\Phi)$ и $E \in S$, то $\mathrm{Cent}(\mathrm{Cent}(S)) = S$ (см. [30], с. 197—198, теорема 19).

Элемент e кольца R называется *идемпотентом* или *идемпотентным элементом*, если $e^2 = e$. Как 0, так и 1 являются идемпотентами. Если e — идемпотент кольца R, то eRe — кольцо с единицей e. Если R — кольцо с единицей и e — идемпотент, то $1 - e$ также оказывается идемпотентом. В кольце с единицей каждый идемпотент, отличный от 0 и 1, является как левым, так и правым делителем нуля, ибо $e(1-e) = 0 = (1-e)e$. Если e и f — идемпотенты и $ef = fe$, то ef — идемпотент. В общем случае это не так. Идемпотенты e и f называются *ортогональными*, если $ef = 0 = fe$. Ортогональны, в частности, идемпотенты e и $1 - e$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные идемпотенты и $e = e_1 + \ldots + e_n$, то $e^2 = e$ и $ee_i = e_ie = e_i$ для любого i.

Если e и f — идемпотенты кольца R (возможно, без единицы), а J — его радикал Джекобсона, то оказываются эквивалентными следующие утверждения: (1) eR и fR изоморфны как правые R-модули; (2) Re и Rf изоморфны как левые R-модули; (3) $(e+J)(R/J)$ и $(f+J)(R/J)$ $[(R/J)(e+J)$ и $(R/J)(f+J)]$ изоморфны как правые [левые] (R/J)-модули; (4) существуют такие элементы $u, v \in R$, что $euf = u$, $fve = v$, $uv = e$ и $vu = f$ (см. [31], § III. 7, III. 8).

Если e — идемпотент кольца R, то даже при отсутствии в кольце R единицы полагают по определению

$$R(1-e) = \{x - xe \mid x \in R\},$$

$$(1-e)R = \{x - ex \mid x \in R\}$$

и

$$(1-e)R(1-e)=\{x-ex-xe+exe \mid x\in R\}.$$

Все эти множества являются подкольцами (а первые два даже левым и правым идеалом соответственно). При наличии в кольце R единицы они совпадают с множествами $R(1-e)$, $(1-e)R$ и $(1-e)R(1-e)$ соответственно. Аддитивная группа кольца R разлагается в прямые суммы

$$R=Re\oplus R(1-e),$$
$$R=eR\oplus(1-e)R$$

и

$$R=eRe\oplus eR(1-e)\oplus(1-e)Re+(1-e)R(1-e).$$

Эти разложения называются *левым*, *правым* и *двусторонним пирсовским разложением* соответственно. Таким образом, при двустороннем пирсовском разложении каждый элемент $x\in R$ представляется в виде

$$x=exe+(ex-exe)+(xe-exe)+(x-ex-xe+exe),$$

при левом — в виде

$$x=xe+(x-xe),$$

и при правом — в виде

$$x=ex+(x-ex).$$

Рассматривается также *пирсовское разложение относительно системы* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *попарно ортогональных идемпотентов*, где $e_1+\ldots+e_n=1$, являющееся разложением в прямую сумму аддитивной группы кольца R, а именно,

$$R=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_iRe_j.$$

Это позволяет представить каждый элемент кольца R в виде $n\times n$-матрицы A, на (i,j)-м месте которой стоит элемент из группы e_iRe_j. При этом произведение элементов вычисляется по правилам обычного умножения матриц. Если идемпоненты e_i *центральны*, т. е. $e_i\in\mathfrak{Z}(R)$, то $e_iRe_j=0$ при $i\neq j$ и $R=Re_1\oplus\ldots$ $\ldots\oplus Re_n$. При этом Re_i оказываются двусторонними идеалами кольца R, а само R изоморфно внешней прямой сумме колец $R_1\oplus\ldots\oplus R_n$. Отметим, что

каждое из колец Re_i обладает единицей e_i. Идемпотент e называется *неразложимым* или *примитивным*, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых ортогональных идемпотентов. В кольце матриц второго порядка над телом неразложимым оказывается, например, идемпотент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Элемент a кольца R называется *регулярным*, если уравнение $axa = a$ разрешимо в R. В этом случае элементы ax и xa оказываются идемпотентами. Более того, $a \in Ra = Rxa$ и $a \in aR = axR$. Регулярность элемента a равносильна равенству $Ra \cap aR = aRa$ (см. [256], с. 71). К числу регулярных принадлежат все обратимые и идемпотентные элементы.

Элемент a' кольца R называется *правым* [*левым*] *квазиобратным* для $a \in R$, если $a + a' - aa' = 0$ [$a + a' - a'a = 0$]. Элемент, обладающий как правым, так и левым квазиобратным, называется *квазирегулярным*. Квазирегулярный элемент α обладает единственным квазиобратным элементом a', определяемым равенствами $a + a' - aa' = 0 = a + a' - a'a$. При этом любой правый [левый] квазиобратный для a совпадает с этим элементом a'. Если R — кольцо с единицей, то элемент a обладает правым [левым] квазиобратным тогда и только тогда, когда элемент $1 - a$ обладает правым [левым] обратным. При этом, если c — правый [левый] обратный для $1 - a$, то $1 - c$ — правый [левый] квазиобратный для a. К числу квазирегулярных относятся все нильпотентные элементы. Если на кольце R определить *присоединенное умножение* $\circ$, положив $a \circ b = a + b - ab$, то это умножение оказывается ассоциативным. Другими словами $(R, \circ)$ оказывается полугруппой. Единицей этой полугруппы служит 0, а обратимыми элементами — квазирегулярные элементы и только они. Для любых $a, b, c \in R$ имеем $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c$ и $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c - a$. Иногда под присоединенным умножением понимают операцию $a * b = a + b + ab$.

2.2. Идеалы. Подмножество I кольца R называется *левым* [*правым*] *идеалом*, если $0 \in I$, $a - b \in I$ и $ra \in I$ [$ar \in I$] для любых $a, b \in I$ и $r \in R$. Для определения *левого* или *правого идеала* I Ф-алгебры R дополнительно требуется, чтобы $\lambda a \in I$ для

любых $\lambda \in \Phi$ и $a \in I$. Другими словами, левый [правый] идеал Ф-алгебры R — это левый [правый] идеал кольца R, являющийся подмодулем Ф-модуля R, а в случае, когда Ф — поле, — подпространством. Если Ф-алгебра R содержит левую [правую] единицу, то это дополнительное требование автоматически выполняется для любого левого [правого] идеала кольца R. Двусторонний идеал, очевидно, является как левым, так и правым идеалом. Запись $I \triangleleft_l R$ [$I \triangleleft_r R$] означает, что I — левый [правый] идеал кольца или алгебры R. В коммутативном кольце понятия левого, правого и двустороннего идеала совпадают. Ясно, что как каждый левый, так и каждый правый идеал кольца [алгебры] является подкольцом [подалгеброй]. Примером левого [правого] идеала в кольца $M_2(\mathbf{R})$ служит множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\text{вида } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

Если $K \triangleleft_l I \triangleleft_l R$, то, как правило, K не является левым идеалом в R. Аналогичное положение имеет место для правых и двусторонних идеалов. Однако, если I — двусторонний идеал в R, K — двусторонний идеал в I и H — двусторонний идеал в R, порожденный множеством K, то $H^3 \subseteq K \subseteq H \subseteq I$ (*лемма Андрунакиевича* — см. [1], с. 33, лемма 5).

Правый [левый] идеал I кольца R называется *существенным*, если $I \cap H \neq 0$ для любого ненулевого правого [левого] идеала H кольца R.

Кольцо называется *инвариантным слева* [*справа*] или *левым* [*правым*] *дуокольцом*, если все его левые [правые] идеалы являются двусторонними. Кольцо R с единицей инвариантно слева [справа] тогда и только тогда, когда $aR \subseteq Ra$ [$Ra \subseteq aR$] для любого $a \in R$.

Левый [правый] идеал I кольца R называется *модулярным*, если существует $e \in R$ такой, что $x - xe \in I$ [$x - ex \in I$] для всех $x \in I$. Если R содержит правую [левую] единицу, то всякий левый [правый] идеал модулярен.

Пересечение любого множества левых [правых] идеалов кольца или Ф-алгебры R является левым [правым] идеалом в R. В частности, левым [правым] идеалом оказывается пересечение всех левых [правых] идеалов, содержащих данное подмножество $X \subseteq R$. Про

этот левый [правый] идеал говорят, что он *порожден множеством* X. Элемент a кольца или Ф-алгебры R принадлежит левому [правому, двустороннему] идеалу, порожденному множеством X, тогда и только тогда, когда представим в виде $a = r_1x_1 + \ldots + r_mx_m + \lambda_1y_1 + \ldots + \lambda_ny_n$ $[a = x_1r_1 + \ldots + x_mr_m + \lambda_1y_1 + \ldots + \lambda_ny_n,$ $a = r_1x_1s_1 + \ldots + r_mx_ms_m + u_1x_1' + \ldots + u_px_p' + x_1''v_1 + \ldots + x_q''v_q + \lambda_1y_1 + \ldots + \lambda_ny_n]$, где $r_i, s_j, u_k, v_l \in R$, $x_i, x_j', x_k'', y_l \in X$, а $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ или Φ в зависимости от того, об идеале кольца или Ф-алгебры идет речь. Если в кольце R есть единица, то приведенные выше формулы упрощаются до $a = r_1x_1 + \ldots + r_ms_m$, $a = x_1r_1 + \ldots + x_mr_m$ и $a = r_1x_1s_1 + \ldots + r_mx_ms_m$ соответственно. Про левый [правый, двусторонний] идеал, порожденный конечным множеством, говорят, что он *конечно порожден*. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то левый [правый, двусторонний] идеал I, порожденный множеством X, называется *n-порожденным*. В этом случае $I = Rx_1 + \ldots + Rx_n + \mathbf{Z}x_1 + \ldots + \mathbf{Z}x_n$ $[I = x_1R + \ldots + x_nR + \mathbf{Z}x_1 + \ldots + \mathbf{Z}x_n,$ $I = Rx_1R + \ldots + Rx_nR + Rx_1 + \ldots + Rx_n + x_1R + \ldots + x_nR + \mathbf{Z}x_1 + \ldots + \mathbf{Z}x_n]$, если речь идет об идеале кольца, и $I = Rx_1 + \ldots + Rx_n + \Phi x_1 + \ldots + \Phi x_n$ $[I = x_1R + \ldots + x_nR + \Phi x_1 + \ldots + \Phi x_n,$ $I = Rx_1R + \ldots + Rx_nR + Rx_1 + \ldots + Rx_n + x_1R + \ldots + x_nR + \Phi x_1 + \ldots + \Phi x_n]$, если речь идет об идеале Ф-алгебры. При наличии в кольце R единицы как для идеала кольца, так и для идеала алгебры имеем

$$I = Rx_1 + \ldots + Rx_n = \{r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \mid r_1, \ldots, r_n \in R\},$$

$$I = x_1R + \ldots + x_nR = \{x_1r_1 + \ldots + x_nr_n \mid r_1, \ldots, r_n \in R\}$$

и

$$I = Rx_1R + \ldots + Rx_nR$$

соответственно. Левый [правый, двусторонний] идеал I кольца R, порожденный одним элементом a, называется *главным*. При этом без предположения о существовании в кольце R единицы приведенные выше формулы приобретают вид $I = Ra + \Phi a = \{ra + \lambda a \mid r \in R,$

$\lambda\in\Phi\}$, $I=aR+\Phi a=\{ar+\lambda a\,|\,r\in R,\ \lambda\in\Phi\}$ и $I=RaR+$ $+\Phi a=\left\{\sum_i r_ias_i+ra+as+\lambda a\,|\,r,\ s,\ r_i,\ s_i\in R,\ \lambda\in\Phi\right\}$ соответственно, где $\Phi=\mathbf{Z}$, если имеется в виду идеал кольца. В этом случае нельзя, однако, утверждать, что $a\in Ra\cup aR\cup RaR$. При наличии единицы левый, правый и двусторонний идеалы, порожденные элементом a, равны Ra, aR и RaR соответственно. Если a — идемпотент, то то же самое верно и при отсутствии единицы. Заметим еще, что если $e^2=e\in R$, то $x\in Re$ $[x\in eR]$ тогда и только тогда, когда $x=xe$ $[x=ex]$.

Идемпотенты e и f кольца R с радикалом Джекобсона J называются *эквивалентными*, если выполнено одно из следующих равносильных друг другу условий: (1) $eR\simeq fR$ как правые R-модули; (2) $Re\simeq Rf$ как левые R-модули; (3) $eR/eJ\simeq fR/fJ$ как правые R/J-модули; (4) $Re/Je\simeq Rf/Jf$ как левые R/J-модули; (5) существуют $u,v\in R$ такие, что $euf=u$, $fve=v$, $uv=e$ и $vu=f$ (см. [31] §§ III.7, III.8).

Суммой левых [правых] идеалов I_ι, $\iota\in\mathfrak{J}$, кольца или алгебры R называется совокупность всех конечных сумм вида $x_{\iota_1}+\ldots+x_{\iota_n}$, где $x_{\iota_k}\in I_{\iota_k}$. Эта сумма совпадает с левым [правым] идеалом, порожденным объединением $\bigcup_{\iota\in\mathfrak{J}} I_\iota$ и обозначается через $\sum_{\iota\in\mathfrak{J}} I_\iota$. Если $\mathfrak{J}=\{1,\ldots,n\}$, то пишут $I_1+\ldots+I_n$. Сумма левых [правых] идеалов называется *прямой*, если каждое слагаемое имеет нулевое пересечение с суммой остальных. В случае конечного числа слагаемых это означает, что $(I_1+\ldots+I_{i-1}+I_{i+1}+\ldots$ $\ldots+I_n)\cap I_i=0$ для каждого i. Чтобы указать, что сумма прямая, вместо $\sum_{\iota\in\mathfrak{J}} I_\iota$ и $I_1+\ldots+I_n$ обычно пишут $\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus} I_\iota$ и $I_1\oplus\ldots\oplus I_n$ соответственно. Для суммы $I_1+\ldots+I_n$ равносильны следующие утверждения: (1) $I_1\oplus\ldots\oplus I_n$; (2) $(I_1+\ldots+I_{i-1})\cap I_i=0$ для каждого i; (3) если $x_1+\ldots+x_n=x_1'+\ldots$ $\ldots+x_n'$, где $x_i,\ x_i'\in I_i$, то $x_i=x_i'$ для каждого i, (4) если $x_1+\ldots+x_n=0$, где $x_i\in I_i$, то $x_i=0$ для всех i. Отметим, что [прямая] сумма односторонних идеалов совпадает с их [прямой] суммой как подгрупп аддитивной группы кольца.

Если e — идемпотент кольца [алгебры] R, то равносильны следующие утверждения: (1) $e=e_1+\ldots+e_n$, где e_i — попарно ортогональные идемпотенты; (2) $Re=Re_1\oplus\ldots\oplus Re_n$; (3) $eR=e_1R\oplus\ldots\oplus e_nR$. Кроме того, если $eR=I_1\oplus\ldots\oplus I_n$ $[Re=L_1\oplus\ldots\oplus L_n]$ — прямая сумма правых [левых] идеалов, то $e=e_1+\ldots$ $\ldots+e_n$, где e_i — попарно ортогональные идемпотенты и $I_i=e_iR$ $[L_i=Re_i]$. Если R обладает единицей 1, $1=e_1+\ldots+e_n$, где e_i — попарно ортогональные идемпотенты, и e_iRe_i — локальные кольца, то говорят, что R *обладает диаграммой Адзумаи*. Это имеет место тогда и только тогда, когда R — полулокальное SBI-кольцо. Если R обладает диаграммой Адзумаи и $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\}$ — максимальная система попарно неэквивалентных идемпотентов, входящих в эту диаграмму, то $(e_{i_1}+\ldots+e_{i_m})R(e_{i_1}+\ldots+e_{i_m})$ называется *базисным кольцом* [*алгеброй*] кольца [алгебры] R. Любые два базисных кольца [алгебры] R изоморфны, причем изоморфизм может быть выбран продолжаемым до внутреннего автоморфизма кольца [алгебры] R. Полулокальное *SBI*-кольцо [алгебра] называется *самобазисным*, если R является своим собственным базисным кольцом [алгеброй]. Это равносильно разложимости факторкольца [факторалгебры] R по его радикалу Джекобсона в прямое произведение конечного множества тел ([90], пп. 18.23—18.28).

Следующие свойства идемпотента e кольца или алгебры R равносильны: (1) e — примитивный идемпотент; (2) если $eR=I_1\oplus I_2$ — прямая сумма правых идеалов, то $I_1=0$ или $I_2=0$; (3) если $Re=L_1\oplus L_2$ — прямая сумма левых идеалов, то $L_1=0$ или $L_2=0$. Другими словами, неразложимость идемпотента e означает, что неразложимы правый R-модуль eR и левый R-модуль Re. Эти модули называются *главными правым* и *левым неразложимыми* модулями соответственно. Если идемпотенты можно поднимать по модулю радикала Джекобсона J кольца R, а факторкольцо R/J классически полупросто, то идемпотент e из R оказывается неразложимым тогда и только тогда, когда неприводим правый [левый] (R/J) модуль eR/eJ $[Re/Je]$ (см. [76], § 6.3, лемма).

Левый [правый, двусторонний] идеал I называется *нильпотентным*, если $I^n = 0$ для некоторого n. Последнее означает, что произведение любых n элементов из I равно нулю. Если при этом $I^{n-1} \neq 0$, то n называется *индексом нильпотентности* идеала I. Идеал индекса 2 называется *идеалом с нулевым умножением*. Кольцо R называется *нильпотентным*, если $R^n = 0$ для некоторого n. Нильпотентным кольцам посвящена монография [198]. Если I — ненулевой нильпотентный левый [правый] идеал кольца или алгебры R, то $IR + I$ [$RI + I$] — ненулевой нильпотентный двусторонний идеал кольца или алгебры R соответственно. Если R содержит правую [левую] единицу, то $IR + I = IR$ [$RI + I = RI$]. Таким образом, любое кольцо [алгебра], содержащее односторонние ненулевые нильпотентные идеалы, содержит и ненулевой двусторонний нильпотентный идеал. Если I — двусторонний нильпотентный идеал кольца R и факторкольцо R/I нильпотентно, то оказывается нильпотентным и само кольцо R. Сумма конечного числа нильпотентных левых [правых, двусторонних] идеалов нильпотентна ([45], следствие 9.3.7(в)).

Левый, правый или двусторонний идеал I называется *T-нильпотентным справа* [*слева*], если для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ элементов из I найдется такой номер n, что $a_1 \ldots a_n = 0$ [$a_n a_{n-1} \ldots \ldots a_1 = 0$]. Ясно, что каждый нильпотентный идеал T-нильпотентен как справа, так и слева.

Левый [правый, двусторонний] идеал называется левым [правым, двусторонним] *ниль-идеалом*, если он состоит из нильпотентных элементов. К числу ниль-идеалов принадлежат все нильпотентные и даже все T-нильпотентные справа или слева идеалы. Кольцо [алгебра], являющееся ниль-идеалом, называется *ниль-кольцом* [*ниль-алгеброй*]. В коммутативном кольце совокупность всех нильпотентных элементов образует ниль-идеал. В общем случае это не так: кольцо матриц над полем не содержит ненулевых идеалов, отличных от самого кольца, хотя в ней есть ненулевые нильпотентные элементы. Если кольцо R содержит двусторонний ниль-идеал I и факторкольцо R/I является ниль-кольцом, то ниль-кольцом оказывается и само кольцо R. То же самое верно и для алгебр. Если R — ниль-алгебра над несчетным полем,

то нильалгеброй оказывается и алгебра матриц над R (см. [31], с. 39, следствие 2). С ниль-идеалами связаны две не решенные до сих пор проблемы: 1) Будет ли правым ниль-идеалом сумма двух правых ниль-идеалов? (*проблема Кёте*); 2) Существуют ли простые нилькольца? Отметим, что примеры простых колец, совпадающих со своим радикалом Джекобсона, построены ([13], ч. I, § 8).

Кольцо называется *локально нильпотентным*, если всякое его конечно порожденное подкольцо нильпотентно. Всякое локально нильпотентное кольцо, очевидно, является ниль-кольцом. Если Ф-алгебра является локально нильпотентным кольцом, то нильпотентна всякая ее конечно порожденная подалгебра. Если кольцо R содержит локально нильпотентный двусторонний идеал I и факторкольцо R/I локально нильпотентно, то локально нильпотентно и само кольцо R. То же самое верно и для алгебр ([31], с. 285, лемма). Подалгебра конечномерной алгебры над полем, обладающая базой, состоящей из нильпотентных элементов, нильпотентна ([76], § 4.6; [90], п. 13.28). В частности, конечномерная ниль-алгебра над полем всегда нильпотентна. Однако бесконечномерная ниль-алгебра может не быть даже локально нильпотентной (*пример Голода*, см. [96], гл. 8). Тем не менее, алгебраическая ниль-алгебра ограниченной степени над полем оказывается локально нильпотентной ([96], теорема 6.4.4).

Левый [правый] идеал M кольца или алгебры R называется *максимальным*, если $M \neq R$, но всякий отличный от R левый [правый] идеал, содержащий M, равен M. Другими словами, максимальный левый [правый] идеал — это максимальный элемент частично упорядоченного множества левых [правых] идеалов кольца R отличных от R. Левый [правый] идеал M кольца или алгебры R называется *минимальным*, если $M \neq 0$, но всякий ненулевой левый [правый] идеал кольца R, лежащий в M, совпадает с M. Другими словами, минимальный левый [правый] идеал — это минимальный элемент частично упорядоченного множества ненулевых левых [правых] идеалов кольца или алгебры R. В кольце $M_2(\mathbf{R})$ левый идеал $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$ является как минимальным,

так и максимальным. То же самое можно сказать о правом идеале этого кольца $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$. В любом кольце [алгебре] содержащем левую [правую] единицу, существуют максимальные левые [правые] идеалы. Однако, например, в кольце целых чисел минимальных идеалов нет. Если M — минимальный левый [правый] идеал кольца R, то или $M^2 = 0$, или $M = Re$ $[M = eR]$, где $0 \neq e^2 = e \in R$. При этом если $M^2 \neq 0$, то подкольцо eRe кольца R оказывается телом. Отметим, что $0 \neq a \in M$ влечет $M = Ra$ $[M = aR]$. Всякая сумма минимальных левых [правых] идеалов равна прямой сумме минимальных левых [правых] идеалов. Правда, эти прямые слагаемые не всегда можно выбрать из уже имеющихся слагаемых. При наличии в кольце R единицы все сказанное является частным случаем утверждений, касающихся R-модулей (см. п. 3.1).

Сумма всех минимальных левых [правых] идеалов кольца или алгебры R оказывается двусторонним идеалом и называется *левым* [*правым*] *цоколем* кольца или алгебры R. Если в кольце нет минимальных правых [левых] идеалов, то его правый [левый] цоколь считается равным нулю. *Однородной компонентой* правого [левого] цоколя кольца R называется сумма всех минимальных правых [левых] идеалов, изоморфных как правый [левый] R-модуль фиксированному правому [левому] идеалу. Цоколь равен прямой сумме своих однородных компонент ([31], гл. IV, § 2). Если кольцо [алгебра] не содержит ненулевых односторонних нильпотентных идеалов, то его [ее] правый и левый цоколи совпадают. Более того, однородные компоненты этих цоколей совпадают и являются простыми кольцами ([31], с. 101, теорема 1).

С каждым подмножеством Y кольца R связываются его *левый* и *правый аннуляторы*, обозначаемые, соответственно, через $\mathrm{Ann}_l Y$ и $\mathrm{Ann}_r Y$ и определяемые равенствами

$$\mathrm{Ann}_l Y = \{x \mid x \in R,\ xy = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in Y\}$$

и

$$\mathrm{Ann}_r Y = \{x \mid x \in R,\ yx = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in Y\}.$$

Эти аннуляторы оказываются левым и правым идеалом соответственно. Левый [правый] идеал кольца R

называется *аннуляторным*, если он совпадает с левым [правым] аннулятором некоторого подмножества $Y \subseteq R$. Если R — алгебра, то всякий аннуляторный левый [правый] идеал кольца R является левым [правым] идеалом алгебры.

Если H — правый идеал, порожденный множеством Y, то $\mathrm{Ann}_l Y = \mathrm{Ann}_l H$. Для левого идеала L, порожденного множеством Y, справедливо равенство $\mathrm{Ann}_r Y = \mathrm{Ann}_r L$. Очевидно, что $Y_1 \subseteq Y_2$ влечет $\mathrm{Ann}_l Y_1 \supseteq \mathrm{Ann}_l Y_2$ и $\mathrm{Ann}_r Y_1 \supseteq \mathrm{Ann}_r Y_2$. Справедливы также соотношения

$$\mathrm{Ann}_l (\mathrm{Ann}_r (\mathrm{Ann}_l Y)) = \mathrm{Ann}_l Y$$

и

$$\mathrm{Ann}_r (\mathrm{Ann}_l (\mathrm{Ann}_r Y)) = \mathrm{Ann}_r Y.$$

Равенство $\mathrm{Ann}_r a = \mathrm{Ann}_l a = \{0\}$ для любого ненулевого элемента a из кольца R, очевидно, означает, что R — кольцо без делителей нуля.

Если R — кольцо с единицей и $e^2 = e \in R$, то $\mathrm{Ann}_l (eR) = R(1-e)$ и $\mathrm{Ann}_r (Re) = (1-e)R$. Левый [правый] аннулятор левого [правого] идеала оказывается двусторонним идеалом. Если I — двусторонний идеал, то идеал $\mathrm{Ann}\, I = \mathrm{Ann}_l I \cap \mathrm{Ann}_r I$ называется *аннулятором* идеала I. Имеет место равенство

$$\mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, I)) = \mathrm{Ann}\, I,$$

а $I \subseteq J$ влечет $\mathrm{Ann}\, I \supseteq \mathrm{Ann}\, J$. Двусторонний идеал называется *аннуляторным*, если он является аннулятором некоторого двустороннего идеала. Если I — аннуляторный идеал, то $\mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, I) = I$.

Кольцо R называется *первичным*, если $IJ \neq \{0\}$ для любых его ненулевых двусторонних идеалов I и J. Первичность кольца R равносильна каждому из следующих свойств: (1) $\mathrm{Ann}_l L = \{0\}$ для любого ненулевого левого идеала L; (2) $\mathrm{Ann}_r H = \{0\}$ для любого ненулевого правого идеала H; (3) если $0 \neq a$, $b \in R$, то $aRb \neq \{0\}$ (см. [96], лемма 2.1.1). Первичность группового кольца RG равносильна первичности кольца R и отсутствию в G конечных нормальных подгрупп ([12], с. 23, теорема 21).

К числу первичных относится всякое простое кольцо. Простым кольцом является всякое тело, а также кольцо матриц над телом. Простое кольцо R

с единицей, содержащее минимальный левый [правый] идеал L, изоморфно кольцу матриц над некоторым телом D (см. [87], с. 112, теорема 1; [90], т. 1, с. 407, теорема 7.7). При этом D изоморфно eRe, где $L = Re$ (см. п. 2.1). При отсутствии единицы R оказывается изоморфным плотному кольцу линейных преобразований конечного ранга над некоторым телом, содержащему хотя бы одно ненулевое преобразование конечного ранга ([30], с. 115; [55], с. 250). Центр простого кольца с единицей оказывается полем. Если A — центральная простая алгебра над полем Φ, а Ψ — расширение поля Φ, то тензорное произведение $\Psi \otimes_\Phi A$ оказывается центральной простой Ψ-алгеброй ([90], п. 13.9). Тензорное произведение двух центральных простых алгебр над полем Φ также оказывается центральной простой Φ-алгеброй ([96], теорема 4.1.1). Тензорное произведение простой алгебры с единицей над полем Φ и центральной простой алгебры над тем же полем — простая Φ алгебра ([87], с. 115, теорема 2). О конечномерных центральных простых алгебрах см. п. 2.5.

Кольцо, не содержащее ненулевых двусторонних (или, что то же самое, левых или правых) нильпотентных идеалов, называется *полупервичным*. Конечно, всякое первичное кольцо полупервично. Двусторонний идеал P кольца R называется [*полу*]*первичным*, если R/I — [полу]первичное кольцо. Первичность идеала P равносильна тому, что для любых двусторонних идеалов I и J включение $IJ \subseteq P$ влечет $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$. Коммутативные первичные кольца — это в точности кольца без делителей нуля. Ясно, что первичность кольца означает первичность его нулевого идеала. Первичным, очевидно, является всякий максимальный двусторонний идеал. Двусторонний идеал полупервичен тогда и только тогда, когда он совпадает с пересечением всех содержащих его первичных идеалов. Это равносильно разложимости любого полупервичного кольца в подпрямое произведение первичных. Все сказанное остается в силе и для алгебр. Если Φ — поле характеристики 0, то групповая алгебра ΦG полупервична. Если Φ — поле характеристики $p > 0$, то ΦG полупервична тогда и только тогда, когда единица группы является единственным элементом конечного порядка, кратного p, индекс централизатора

которого конечен. Для первичности алгебры ΦG необходимо и достаточно, чтобы единица группы G была единственным элементом, индекс централизатора которого конечен ([90], п. 26.10; [233], § 5).

Двусторонний идеал I кольца [алгебры] R называется *вполне простым*, если для любых $a, b \in R$ включение $a, b \in I$ влечет за собой $a \in I$ или $b \in I$. Двусторонний идеал I кольца R оказывается вполне простым тогда и только тогда, когда в факторкольце R/I нет делителей нуля. Для коммутативного кольца понятия первичного и вполне простого идеала совпадают и соответствующий идеал называется *простым*. Элемент коммутативного кольца R нильпотентен тогда и только тогда, когда он принадлежит пересечению всех простых идеалов этого кольца ([60], с. 173, следствие 1).

Полупервичное кольцо R представляется в виде несократимого подпрямого произведения первичных колец тогда и только тогда, когда частично упорядоченное множество ненулевых аннуляторных двусторонних идеалов кольца R атомно или, что равносильно, коатомно. Сомножители могут быть выбраны имеющими ненулевой цоколь в том и только том случае, когда любой ненулевой двусторонний идеал кольца R содержит минимальный правый левый идеал ([1], с. 268, теорема 1; с. 276, теорема 5). Если R — полупервичное кольцо и $e^2 = e \in R$, то минимальность правого идеала eR равносильна минимальности левого идеала Re. Отсюда вытекает, что левый и правый цоколи полупервичного кольца совпадают. Все сказанное верно и для алгебр над любым коммутативным кольцом с единицей ([31], с. 100, следствие; [57], с. 105, предложение 4). Групповое кольцо RG оказывается полупервичным тогда и только тогда, когда кольцо R полупервично и порядки нормальных подгрупп группы G не являются делителями нуля в R (см. [57], с. 250, предложение 8; [39], с. 67, теорема 13.2).

К числу полупервичных относится всякое кольцо, не содержащее ненулевых нильпотентных элементов. Для того чтобы кольцо обладало этим свойством необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде подпрямого произведения колец без делителей нуля. Это подпрямое произведение может быть выбрано несократимым в том и только том случае, когда

каждый ненулевой двусторонний идеал кольца R содержит двусторонний идеал кольца R, являющийся кольцом без делителей нуля или, что равносильно, частично упорядоченное множество ненулевых аннуляторных двусторонних идеалов кольца R атомно или коатомно. Ненулевое кольцо разлагается в прямую сумму простых колец тогда и только тогда, когда оно полупервично и все его двусторонние идеалы аннуляторные. Ненулевое кольцо R без ненулевых нильпотентных элементов разлагается в прямую сумму простых областей целостности тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию минимальности для главных двусторонних идеалов и каждый ненулевой [каждый минимальный] двусторонний идеал кольца R содержит идемпотент. Все сказанное остается справедливым и для алгебр ([1], с. 288, теорема 1; с. 291, теорема 2; с. 277, теорема 6; с. 371, теорема 2; с. 247—248, теорема 4 (а)).

Кольцо R называется *примитивным справа*, если оно содержит такой максимальный модулярный правый идеал M, что $\{x \mid x \in R,\ Rx \subseteq M\} = \{0\}$. Если R содержит единицу, то это равносильно существованию точного неприводимого унитарного правого R-модуля. Примитивное слева кольцо определяется аналогично. Примитивное справа кольцо может не быть примитивным слева (Irving R. S.//Math. Ann. — 1979. — Bd 242, № 2. — S. 177—192). Двусторонний идеал примитивного справа [слева] кольца является примитивным справа [слева] кольцом ([31], § II. 4). Любое примитивное справа [слева] кольцо первично ([31], § IV. 9; [96], лемма 2.1.2). Коммутативными примитивными кольцами являются поля и только они. Если R — примитивное справа кольцо и $e^2 = e \in R$, то кольцо eRe также примитивно справа ([31], § III. 7). Всякое простое кольцо с ненулевым правым [левым] цоколем примитивно справа [слева].

Двусторонний идеал I кольца R называется *примитивным справа* [*слева*], если примитивно справа [слева] факторкольцо R/I. Для правой [левой] примитивности двустороннего идеала кольца R с единицей необходимо и достаточно, чтобы он являлся аннулятором некоторого неприводимого унитарного правого [левого] R-модуля ([90], п. 26.12).

Примитивные справа кольца с ненулевым правым

цоколем и только они изоморфны плотному кольцу линейных преобразований линейного пространства над телом, содержащему хотя бы одно ненулевое преобразование конечного ранга. При этом умножение преобразований определяется равенством $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$. Кольцо с единицей примитивно справа тогда и только тогда, когда оно изоморфно плотному кольцу линейных преобразований линейного пространства над телом. Оба утверждения остаются справедливыми и для примитивных слева колец, если иметь в виду умножение, определяемое равенством $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ ([31], § 1.2—1.4, IV. 8, VI. 9; [90], пп. 19.22, 19.23А; [96], § 2.1). Примитивная алгебраическая алгебра над полем Ф, индексы нильпотентности элементов которой ограничены в совокупности, изоморфна кольцу матриц над алгебраической Ф-алгеброй с делением ([31], с. 342, теорема 2).

Левый [правый, двусторонний] идеал I называется *идемпотентным*, если $I^2 = I$. Любой левый [правый, двусторонний] идеал, содержащий ненулевой идемпотент, идемпотентен. Кольцо [алгебра] R называется *наследственно идемпотентным*, если все его главные двусторонние идеалы идемпотентны, и *вполне идемпотентным*, если для любого $a \in R$ главные двусторонние идеалы, порожденные элементами a и a^2, совпадают. Следующие свойства кольца или алгебры R эквивалентны: (1) R вполне идемпотентно; (2) ни один из гомоморфных образов кольца [алгебры] R не содержит ненулевых нильпотентных элементов; (3) любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ кольца [алгебры] R является кольцом [алгеброй] без делителей нуля; (4) если $a, b \in R$, то $(a) \cap (b) = (ab)$, где (u) — главный двусторонний идеал, порожденный элементом u. Эквивалентны между собой и следующие утверждения: (1) R — наследственно идемпотентное кольцо [алгебра]; (2) любой гомоморфный образ кольца [алгебры] R полупервичен; (3) все двусторонние идеалы кольца [алгебры] R полупервичны; (4) любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ кольца [алгебры] R первичен; (5) сердцевина любого подпрямо неразложимого гомоморфного образа кольца [алгебры] R является простым кольцом [простой алгеброй]; (6) если $I_1, I_2 \lhd R$, то $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$; (7) для любого $a \in R$ найдутся такие

элементы $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \in R$, что $a = \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i a z_i$ (см. [1], с. 352—355).

Если I — двусторонний идеал кольца R, то говорят, что *идемпотенты можно поднимать по модулю идеала* I, если для всякого идемпотента $\bar{e} \in R/I$ найдется такой идемпотент $e \in R$, что $\bar{e} = e + I$. Идемпотенты можно поднимать по модулю любого ниль-идеала. Если двусторонний идеал I кольца R *квазирегулярен* (т. е. все его элементы квазирегулярны — ср. п. 2.6) и идемпотенты можно поднимать по модулю идеала I, то, каково бы ни было конечное или счетное множество $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots\}$ попарно ортогональных идемпотентов факторкольца R/I, кольцо R содержит такое соответственно конечное или счетное множество $\{e_1, e_2, \ldots\}$ попарно ортогональных идемпотентов, что $\bar{e}_i = e_i + I$ для каждого i. Для несчетного множества идемпотентов этот результат теряет силу. Заметим еще, что всякий односторонний нильидеал квазирегулярен ([90], пп. 22.14, 22.18). Если идемпотенты можно поднимать по модулю радикала Джекобсона кольца R, то R называется SBI-*кольцом*.

В заключение приведем *китайскую теорему об остатках*: если $I_1, \ldots, I_n$ — двусторонние идеалы кольца R, то отображение $\varphi\colon R\Big/\bigcap_{i=1}^{n} I_i \to (R/I_1) \oplus \ldots \oplus (R/I_n)$, где $\varphi\left(a + \bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) = (a + I_1, \ldots, a + I_n)$, является изоморфизмом колец в том и только том случае, когда $I_i + I_j = R$ для любых различных i и j (см. [90], п. 18.30).

Подгруппа Q аддитивной группы кольца R называется *квазиидеалом*, если $RQ \cap QR \subseteq Q$. В качестве примера квазиидеала, не являющегося идеалом, укажем на множество матриц, у которых вне фиксированного места стоят нули. Квазиидеалам посвящена монография [256].

2.3. Групповые и полугрупповые кольца, кольца степенных рядов. Если R — кольцо с единицей 1 и G — группа с единицей e, то обозначим через $R^{(G)}$ абелеву группу, элементами которой служат всевозможные формальные суммы вида $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, где $\lambda_g \in R$ и почти

все λ_g равны нулю, а сложение определяется равенством

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g.$$

Групповым кольцом группы G над кольцом R (оно обозначается через RG) называется группа $R^{(G)}$ с умножением, определяемая равенством

$$\Big(\sum_{g \in G} \lambda_g g\Big)\Big(\sum_{h \in G} \mu_h h\Big) = \sum_{k \in G} \Big(\sum_{\substack{x,\, y \in G \\ xy = k}} \lambda_x \mu_y\Big) k.$$

Это определение означает, что произведение двух формальных сумм вычисляется по обычным правилам умножения многочленов с последующим приведением подобных членов. В случае, когда R — поле, говорят о *групповой алгебре* над полем R. Если кольцо R коммутативно, то на RG можно смотреть как на кольцо функций из группы G в кольцо R, принимающих ненулевые значения лишь в конечном числе точек, со сверткой в качестве операции умножения.

Каждый элемент g группы G отождествляется с элементом $1g$, а каждый элемент $\lambda \in R$ — с элементом λe. В частности, единицу кольца RG можно рассматривать и как единицу кольца R и как единицу группы G. Кроме того, при принятом соглашении имеем $\lambda g = g\lambda$ для любых $\in R$ и $g \in G$. Отсюда, в частности, вытекает, что коммутативность группового кольца RG равносильна коммутативности кольца R и группы G.

Сказанное выше можно трактовать как существование гомоморфизма φ кольца R в кольцо RG и гомоморфизма ψ группы G в мультипликативную полугруппу кольца RG, причем $\varphi(\lambda)\psi(g) = \psi(g)\varphi(\lambda)$ для любых $\lambda \in R$ и $g \in G$. Более того, если Φ — гомоморфизм кольца R в кольцо S, Ψ — гомоморфизм группы G в мультипликативную полугруппу кольца S, причем $\Phi(\lambda)\Psi(g) = \Psi(g)\Phi(\lambda)$ для любых $\lambda \in R$ и $g \in G$, то существует такой гомоморфизм χ кольца RG в кольцо S, что $\chi(\varphi(\lambda)) = \Phi(\lambda)$ для всех $\lambda \in R$ и $\chi(\psi(g)) = \Psi(g)$ для всех $g \in G$. Это свойство может быть принято в качестве определения группового кольца. Подчеркнем, что изоморфизм колец RG и RH вообще говоря, не влечет за собой изоморфизм групп G и H (см. [230], с. 661, теорема 2.2).

Если $a = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ — элемент из RG, то множество

$$\operatorname{Supp} a = \{g \mid g \in G,\ \lambda_g \neq 0\}$$

называется *носителем элемента* a, а элемент $\operatorname{tr} a = \lambda_1$, где 1 — единица группы G, его *следом*. Если Φ — поле, характеристика которого или равна 0, или не делит порядки элементов группы G, принадлежащие носителю идемпотента $e \in \Phi G$, то $\operatorname{tr} a = 0$. Если Φ — поле и $e^2 = e \in \Phi G$, то $\operatorname{tr} e$ принадлежит простому подполю поля Φ. Более того, если $e \neq 0, 1$ и Φ — поле характеристики 0, то $0 < \operatorname{tr} e < 1$ (см. [39], пп. 2.20, 2.21).

Носитель любого идемпотента порождает конечную подгруппу группы G в том и только том случае, когда или все конечно порожденные подгруппы группы G конечны, или все идемпотенты кольца RG центральны. Если e — центральный идемпотент кольца ΦG, где Φ — поле, то $\operatorname{Supp} e$ — конечная нормальная подгруппа группы. Если при этом G конечна, то $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ лежит в центре кольца ΦG тогда и только тогда, когда $\lambda_g = \lambda_{h^{-1}gh}$ для любого $h \in G$ (см. [12], с. 31, теоремы 27 и 28; [16], с. 96, теорема 6; [88], с. 193, теорема 8; [230], с. 136—137, теоремы 3.8 и 3.9).

Если H — подгруппа группы G, то через ωH обозначим правый идеал кольца RG, порожденный множеством $\{1 - h \mid h \in H\}$. Если множество X порождает подгруппу H, то ωH порождается множеством $\{1 - x \mid x \in X\}$. Идеал ωH оказывается двусторонним в том и только том случае, когда подгруппа H нормальна. При этом ωH совпадает с ядром гомоморфизма $\varphi\colon RG \to R(G/H)$, где $\varphi\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g (g + H)$. Двусторонний идеал ωG называется *фундаментальным идеалом* кольца RG. Он служит ядром гомоморфизма $\varepsilon\colon RG \to R$, где $\varepsilon\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g$, и, следовательно, $\omega G = \left\{\sum_{g \in G} \lambda_g g \,\middle|\, \sum_{g \in G} \lambda_g = 0\right\}$. Гомоморфизм ε называется *тривиализацией кольца* RG (см. [39], пп. 1.6—1.10).

Для любой бесконечной подгруппы H группы G имеем $\operatorname{Ann}_l(\omega H) = \{0\}$. Если же подгруппа H конечна,

то $\operatorname{Ann}_l(\omega H) = RG\left(\sum_{h \in H} h\right)$. В частности, конечность порядка элемента $g \in G$ равносильна тому, что $1-g$ оказывается левым [правым, двусторонним] делителем нуля в RG (см. [39], пп. 1.12, 1.16).

Если Φ — поле, а G или сверхразрешимая группа без кручения, или расширение полициклической группы без кручения с помощью конечной, то групповая алгебра ΦG не содержит делителей нуля (см. [233], теоремы 37.3 и 37.5).

Если R — кольцо характеристики 0 не содержащее ненулевых нильпотентных элементов, и $a = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ — нильпотентный элемент группового кольца RG, то $\lambda_1 = 0$. Более того, носитель элемента a не содержит центральных элементов группы G. Последнее утверждение остается справедливым и в случае, когда характеристика кольца R равна p, но G не содержит элементов порядка p (см. [39], с. 19, предложение 2.14; с. 20, следствие 2.15).

Систематическое изложение теории групповых колец можно найти в [12], [39] и [230]. Условия принадлежности группового кольца тому или иному классу колец даны при рассмотрении этих классов. По этому поводу см. также обзор [155]. О радикалах групповых колец см. п. 2.6, а также [184]. Коммутативным групповым алгебрам посвящена монография [183]. С групповыми кольцами конечных групп связана монография [201], а с целочисленными групповыми кольцами — [260].

Если в определении группового кольца взять в качестве G полугруппу, то приходим к определению *полугруппового кольца полугруппы G над кольцом R*. Если полугруппа G содержит нуль 0, то множество $R0 = \{r0 \mid r \in R\}$ оказывается двусторонним идеалом кольца RG и факторкольцо $RG/R0$ называется *сжатым полугрупповым кольцом.*

Кольцо $M_n(R)$ всех матриц порядка n над кольцом R можно рассматривать как полугрупповое кольцо RG, где

$$G = \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant n\} \cup \{0\}$$

и

$$e_{ik}e_{lj} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если} \quad k = l, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq l. \end{cases}$$

Коммутативным полугрупповым кольцам посвящена монография [154]. См. также обзор [77].

Обобщением кольца матриц служит *кольцо инцидентности*: его элементами являются функции $f: G \times G \to R$, где R — данное кольцо, G — квазиупорядоченное множество, в котором для любых $a, b \in G$, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant b$, интервал

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

конечен, а кольцевые операции определяются равенствами

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

и

$$(fg)(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\, g(z, y), & \text{если} \quad x \leqslant y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Формальные степенные ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i$, где λ_i принадлежит некоторому кольцу R с единицей, при естественном определении операций в предположении, что $\lambda x = x\lambda$ для всех $\lambda \in R$, образуют кольцо, которое называется *кольцом степенных рядов* и обозначается через $R[[x]]$. Если R — тело, то обратимыми оказываются ряды с ненулевым свободным членом и только они, а каждый левый [правый] идеал кольца $R[[x]]$ оказывается двусторонним и порождается элементом x^m для некоторого натурального m. Рассматриваются и кольца степенных рядов от нескольких переменных, а также *кольцо рядов Лорана*, состоящее из формальных рядов с конечным числом отрицательных степеней. Если R — тело, то кольцо рядов Лорана также оказывается телом. О степенных рядах над коммутативными кольцами см. [120].

Если R — кольцо, G — полугруппа, σ — отображение полугруппы G в множество эндоморфизмов кольца R и $\rho = \{\rho_{g,h} \mid g, h \in G\}$ — некоторое множество обратимых элементов кольца R, то группу $R^{(G)}$ можно превратить в кольцо (не обязательно ассоциативное), если положить

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \cdot \sum_{h \in G} \mu_h h = \sum_{w \in G} \sum_{xy = w} \lambda_x \mu_y^{\sigma(x)} \rho_{x,y} w,$$

где через $\mu_y^{\sigma(x)}$ обозначается образ элемента $\mu_y \in R$ при эндоморфизме $\sigma(x)$. Получившееся кольцо оказывается ассоциативным, если

$$\rho_{hk}^{\sigma(g)}\rho_{g,\,hk} = \rho_{g,\,h}\rho_{gh,\,k}$$

и

$$\left(\lambda^{\sigma(h)}\right)^{\sigma(g)} = \rho_{g,\,h}\lambda^{\sigma(gh)}\rho_{g,\,h}^{-1}$$

для любых $g, h, k \in G$ и $\lambda \in R$ и называется в этом случае *скрещенным произведением полугруппы G и кольца R с системой факторов ρ при дефекте* σ, а обозначается через (G, R, ρ, σ). Если $\lambda, \mu \in R$ и $g, h \in G$, то $\lambda g \cdot \mu h = \lambda\mu^{\sigma(g)}\rho_{g,\,h}(gh)$. Если 0 — нуль полугруппы G, то, как и выше, $R0$ оказывается двусторонним идеалом кольца (G, R, ρ, σ). Факторкольцо $(G, R, \rho, \sigma)/R0$ называется *сжатым скрещенным произведением*. Если G — моноид (в частности, группа), то $\rho_{g,\,1} = \rho_{1,\,1}^{\sigma(g)}$ и $\rho_{1,\,g}^{\sigma(1)} = \rho_{1,\,1}$ для любых $g \in G$. Кроме того, если $1^{\sigma(g)} = 1$ при любом $g \in G$ (в частности, если G — группа или $\sigma(g) \in \operatorname{Aut} R$ при всех $g \in G$), то $\rho_{1,\,1}^{-1} \cdot 1$ оказывается правой единицей кольца (G, R, ρ, σ). Этот элемент оказывается двусторонней единицей, если $\rho_{1,\,1}^{-1}\lambda^{\sigma(1)}\rho_{1,\,g} = \lambda$ и, в частности, если $\lambda^{\sigma(1)} = \lambda$ для всех $\lambda \in R$. Отметим, что полугруппа G является подполугруппой мультипликативной полугруппы кольца (G, R, ρ, σ) лишь при условии, что $\rho_{g,\,h} = 1$ для любых $g, h \in G$, ибо $g \cdot h = \rho_{g,\,h}gh$.

Скрещенным или *скрученным полугрупповым кольцом* называется кольцо (G, R, ρ, σ), где G — моноид и $1^{\sigma(g)} = \rho_{g,\,h} = 1$ для любых $g, h \in G$. Это кольцо обозначается через (G, R, σ). При этом для любых $\lambda, \mu \in R$ и $g, h \in G$ имеем

$$\lambda g \cdot \mu h = \lambda\mu^{\sigma(g)}(gh)$$

и

$$\left(\lambda^{\sigma(h)}\right)^{\sigma(g)} = \lambda^{\sigma(gh)},$$

т. е. σ оказывается антигомоморфизмом моноида G в полугруппу $\operatorname{End} R$ эндоморфизмов кольца R. Заметим, что σ становится гомоморфизмом, если в качестве умножения в $\operatorname{End} R$ принять $\circ$ (см. п. I. 1.4). Скрученное полугрупповое кольцо становится обычным полугрупповым кольцом, если $\lambda^{\sigma(g)} = \lambda$ для всех $\lambda \in R$.

Для определения кольца (G, R, σ), где $G = \{x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, достаточно выбрать элемент $\sigma(x) \in \operatorname{End} R$. Возникающее таким образом кольцо называется *скрученным кольцом многочленов*. Аналогичным образом можно определить *скрученное кольцо степенных рядов* и *скрученное кольцо рядов Лорана*. Если R — тело и $\sigma(x)$ — его гомоморфное вложение в себя, то скрученное кольцо рядов Лорана оказывается телом, которое называется *телом Гильберта*. Если R — поле рациональных функций от y над полем Φ и $\sigma\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right) = \frac{f(y+1)}{g(y+1)}$, то центр соответствующего тела Гильберта совпадает с Φ. Тем самым построен пример тела, бесконечномерного над своим центром.

Ряд свойств скрученных произведений, в особенности связанных с первичностью и полупервичностью, можно найти в [233]. В частности, если H — подгруппа конечной группы G, то полупервичность кольца (R, G, ρ, σ) влечет полупервичность кольца (R, H, ρ, σ) (см. [233], теорема 18.9).

Особенно важно *скрещенное произведение кольца с его группой автоморфизмов* (не обязательно всех), определяемое как (G, R, σ), где G — группа автоморфизмов кольца R и $\sigma(g) = g$ для всех $g \in G$, и обозначаемое через $R*G$. Если группа G конечна, кольно R полупервично и $|G|\lambda = 0$, где $\lambda \in R$, влечет $\lambda = 0$, то кольцо $R*G$ также оказывается полупервичным. Если G — конечная группа, R просто и $R*G$ полупервично, то $R*G$ разлагается в прямое произведение простых колец, причем число слагаемых не превосходит $|G|$. Кольцо $R*G$ оказывается простым, если R — простое кольцо с единицей и G не содержит внутренних автоморфизмов кольца R, отличных от тождественного. Если G — конечная группа автоморфизмов поля Φ, то их скрещенное произведение оказывается центральной простой алгеброй над полем

$$F = \{\xi \mid \xi \in \Phi,\ \xi^{\sigma(g)} = \xi \text{ для всех } g \in G\}$$

([216], теоремы 7.4, 7.13, 2.3; [101], § V.5). О первичных и полупервичных скрещенных произведениях см. [185]. Ряд результатов о кольцах $\Phi*G$, где Φ — поле, можно найти в [116]. См. также [231].

Если R — кольцо с единицей, α — его эндоморфизм и δ — *α-дифференцирование* (т. е. $\delta(\lambda+\mu)=\delta(\lambda)+\delta(\mu)$ и $\delta(\lambda\mu)=\delta(\lambda)\mu+\alpha(\lambda)\delta(\mu)$ для всех $\lambda, \mu \in R$, то на множестве $R[x]$ многочленов над R определим произведение

$$x \cdot \lambda = \alpha(\lambda)x + \delta(\lambda),$$

где $\lambda \in R$, которое естественным образом распространяется на любые элементы из $R[x]$. Возникающее таким образом ассоциативное кольцо называется *кольцом косых многочленов* или *кольцом дифференциальных многочленов* и обозначается через $R[x, \alpha, \delta]$. Алгебра Вейля $A_1(\Phi)$ над полем Φ изоморфна $\Phi[y][x, 1_R, ']$, где $'$ — обычное дифференцирование в кольце $\Phi[y]$. Если α — тождественный автоморфизм, то кольцо косых многочленов оказывается нётеровым слева, если нётерово слева кольцо R, и простым, если R — простое кольцо с аддитивной группой, не содержащей ненулевых периодических элементов. Если R — тело, то $R[x, \alpha, \delta]$ не содержит делителей нуля и является кольцом главных левых и главных правых идеалов ([16], пп. 1.9—1.12, 2.3; [90], пп. 7.27—7.30).

2.4. Тела, локальные кольца, регулярные кольца. *Телом* называется кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим. Впрочем, достаточно, чтобы каждый ненулевой элемент обладал левым [правым] обратным ([87], с. 113, лемма 2). *Поле* — это, по определению, коммутативное тело. Всякое конечное тело коммутативно, т. е. является полем ([87], с. 207, теорема 2; [31], с. 266, теорема 1; [51], с. 468, теорема 1; [76], с. 307; [96], теорема 3.1.1). Простейший пример тела, не являющегося полем, — это *тело кватернионов*, которое можно получить, рассмотрев множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ над полем комплексных чисел с обычными операциями ([88], с. 101). В качестве другого примера укажем кольцо косых рядов Лорана над полем ([76], § 19.7). Кольцо R с единицей оказывается телом тогда и только тогда, когда в нем нет левых [правых] идеалов, отличных от $\{0\}$ и R, а также тогда и только тогда, когда в нем нет отличных от $\{0\}$ и R квазиидеалов. Пример группы вычетов по простому модулю с нулевым умножением показывает, что наличие единицы существенно. Всякое

счетное тело вкладывается в тело, порожденное двумя элементами ([14], теорема 13).

Всякое тело является алгеброй над своим центром, который всегда оказывается полем. В частности, тело кватернионов — алгебра над полем действительных чисел. Тело кватернионов содержит и поле комплексных чисел, но алгеброй над ним не является.

Если тело является алгеброй над коммутативным кольцом Ф с единицей, то Ф оказывается полем. Тело, являющееся алгеброй над полем Ф, часто называют алгеброй с делением. Конечномерная алгебра над полем, не содержащая делителей нуля, является телом ([31], с. 231—232). Любая алгебра с делением над конечным полем коммутативна ([31], с. 267, теорема 2). Алгебраическая алгебра с делением над алгебраически замкнутым полем Ф совпадает с Ф (см. [90], п. 13.4). Всякая конечномерная алгебра с делением над полем действительных чисел изоморфна или полю действительных чисел, или полю комплексных чисел, или телу кватернионов (*теорема Фробениуса* — см. [87], с. 202, теорема 1; [55], гл. V, § 8; [96], с. 101).

Если K — подтело тела D, то D можно считать как правым, так и левым линейным пространством над K. Заметим, что размерности этих линейных пространств могут оказаться различными. Однако они совпадают, если K принадлежит центру $\mathfrak{Z}(D)$ тела D, или если D конечномерно над $\mathfrak{Z}(D)$. В этих случаях условимся обозначать эту общую размерность через $[D:K]$ (см. [31], с. 256, теорема 1). Если $[D:\mathfrak{Z}(D)]<\infty$ и P — максимальное подполе тела D, то $\mathfrak{Z}(D)\subseteq P$, $D\otimes_{\mathfrak{Z}(D)}P\simeq M_n(P)$, где $n=[D:P]$ и $[D:\mathfrak{Z}(D)]=$ $=[D:P]^2=[P:\mathfrak{Z}(D)]^2$ (см. [31], с. 263, предложение 1; [96], с. 95, следствие, теорема 4.2.2).

Если K — подтело тела D и $u^{-1}Ku\subseteq K$ для любого ненулевого $u\in K$, то или $K=D$, или $K\subseteq\mathfrak{Z}(D)$ (*теорема Картана—Брауэра—Хуа* — см. [31], с. 271, следствие; [76], с. 306).

Конечномерная алгебра с делением D над полем Ф называется *циклической*, если D содержит такое циклическое расширение P поля Ф (т. е. $\{\varphi\mid\varphi\in\operatorname{Aut}P,$ $\varphi(\xi)=\xi$ для всех $\xi\in\Phi\}$ — циклическая группа), что $[P:\Phi]^2=[D:\Phi]$ (см. [76], гл. 15).

Телам посвящены монографии [136], [140] и [249]. О кватернионах см. [125] и [269], а о конечных по-

лях — [61]. Отметим также обзоры [104], [128] и [132]. Строение конечномерных алгебр с делением детально обсуждается в [174].

Кольцо R называется *локальным* или *вполне примарным*, если оно содержит такой двусторонний идеал I, что R/I является телом. Это означает, что I — наибольший левый [правый] идеал кольца R, отличный от R. Заметим, что I совпадает с радикалом Джекобсона кольца R. Для кольца R с единицей равносильны следующие свойства: (1) R локально; (2) все необратимые элементы кольца R содержатся в отличном от R двустороннем идеале; (3) необратимые элементы кольца R образуют отличный от R двусторонний идеал; (4) если $a \in R$, то a или $1-a$ — обратимый элемент; (5) если $a \in R$, то или a, или $1-a$ — обратимый слева [справа] элемент; (6) сумма двух необратимых элементов необратима ([57], с. 123, предложение 1; [90], п. 18.10А). Простейшим примером локального кольца, не являющегося телом, служит подкольцо кольца $\mathbf{Q}$, состоящее из всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на фиксированное простое число. Другим важным примером являются кольца степенных рядов от одной переменной над полем. Из локальности группового кольца RG вытекает, что R — локальное кольцо, тело $R/J(R)$ имеет характеристику p, а порядок любого элемента из G является степенью числа p (т. е. G является p-группой). Обратное верно, если группа G локально конечна ([39], с. 73, теорема 16.2).

Кольцо R называется *регулярным*, если уравнение $axa = a$ разрешимо для любого $a \in R$, т. е. если регулярны все элементы кольца R. В частности, регулярным кольцом оказывается любое тело. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) P регулярно, т. е. уравнение $axa = a$ разрешимо для любого $a \in R$; (2) каждый главный левый [правый] идеал кольца R порождается идемпотентом; (3) каждый конечно порожденный левый [правый] идеал кольца R порождается идемпотентом; (4) каждый главный левый [правый] идеал кольца R выделяется прямым слагаемым; (5) каждый конечно порожденный левый [правый] идеал кольца R выделяется прямым слагаемым; (6) как сумма, так и пересечение двух главных левых [правых] идеалов кольца R являются главными

левыми [правыми] идеалами, и если I и J — главные левые [правые] идеалы кольца R, причем $I \subseteq J$, то $J = I \oplus K$ для некоторого главного левого [правого] идеала K кольца R; (7) если H — правый, а L — левый идеалы кольца R, то $HL = H \cap L$; (8) $QRQ = Q$ для любого квазиидеала Q кольца R; (9) если $H^2 = H$ — правый, а $L^2 = L$ — левый идеал кольца R, то HL — квазиидеал кольца R (см. [87], с. 93, теорема 1; [256], с. 69, теорема 9.3).

Условие (6) показывает, что главные левые [правые] идеалы регулярного кольца образуют дедекиндову решетку с относительными дополнениями. Из условия (2) нетрудно вывести, что радикал Джекобсона регулярного кольца равен нулю. Теоретико-модульная характеризация регулярных колец дана в п. 4.6.

В регулярном кольце всякий левый делитель нуля оказывается правым делителем нуля и наоборот, а всякий неделитель нуля обратим. Если R — регулярное кольцо, то решетки его главных левых и главных правых идеалов антиизоморфны, причем антиизоморфизм Φ определяется равенством $\Phi(L) = \mathrm{Ann}_r L$ (см. [161], с. 15, теорема 2.5). Регулярное кольцо, не содержащее бесконечного множества попарно ортогональных идемпотентов, классически полупросто.

Регулярным оказывается кольцо матриц над любым регулярным кольцом и, в частности, над телом ([87], с. 96, теорема 2), а также кольцо всех эндоморфизмов любого линейного пространства над телом. Более того, регулярное кольцо изоморфно такому кольцу в том и только том случае, когда оно первично, самоинъективно справа и обладает ненулевым правым цоколем ([161], с. 100, теорема 9.12). Этому кольцу уделено много внимания в монографии [234]. Отметим также обзор [274] о подкольцах кольца линейных преобразований векторного пространства над телом, сконцентрированный вокруг теоремы плотности и теоремы Голди.

Всякая алгебраическая алгебра без нильпотентных элементов регулярна. Если R есть PI-кольцо, то эквивалентны следующие утверждения: (1) R регулярно; (2) $I^2 = I$ для всякого двустороннего идеала I кольца R; (3) каждый левый идеал кольца R равен пересечению некоторого множества максимальных левых

идеалов; (4) R является V-кольцом, т. е. все простые левые R-модули инъективны.

Если R — регулярное кольцо и $e^2 = e \in R$, то кольцо eRe также регулярно. Регулярны прямое произведение и прямая сумма регулярных колец, факторкольцо и двусторонний идеал регулярного кольца и кольцо матриц над регулярным кольцом ([87], с. 96, теорема 2). Групповое кольцо RG регулярно тогда и только тогда, когда R — регулярное кольцо, каждая конечно порожденная подгруппа группы G конечна и порядок любой конечной подгруппы группы G обратим в кольце R (см. [57], с. 238, предложение 2; [39], с. 64, теорема 10.4; [12], с. 43, теорема 39).

Важный подкласс класса регулярных колец образует *строго регулярные* или *абелевы регулярные* кольца, в которых, по определению, разрешимо уравнение $a^2x = a$. Равносильны следующие свойства регулярного кольца R: (1) R строго регулярно; (2) R не содержит ненулевых нильпотентных элементов; (3) каждый левый [правый] идеал кольца R является двусторонним; (4) все идемпотенты кольца R центральны; (5) для каждого $a \in R$ уравнение $axa = a$ имеет единственное решение; (6) для всякого первичного двустороннего идеала P кольца R факторкольцо R/P оказывается телом ([161], с. 26, теорема 3.2). К числу строго регулярных относятся *булевы кольца*, определяемые как кольца с единицей, в которых $a^2 = a$ для любого a. Все булевы кольца коммутативны и удовлетворяют тождеству $a + a = 0$. Они тесно связаны с булевыми алгебрами (см. п. V. 4.4). Булевы кольца оказываются 2-кольцами, если под *p-кольцом*, где p — простое число, понимать такое кольцо R, что $a^p = a$ и $pa = 0$ для любого $a \in R$. О булевых кольцах см. [100].

Другой подкласс класса регулярных колец образуют *u-регулярные кольца*, в которых уравнение $axa = a$ имеет в качестве решения обратимый элемент. К числу u-регулярных принадлежат строго регулярные кольца ([161], с. 38, следствие 4.2), кольца матриц над u-регулярными кольцами ([161], с. 40, следствие 4.7), регулярные кольца, у которых индексы нильпотентности нильпотентных элементов ограничены в совокупности ([161], с. 75, следствие 7.11) и непрерывные слева или справа регулярные кольца.

Регулярное кольцо R называется *непрерывным* [*$\aleph_0$-непрерывным*] *слева*, если решетка $\mathscr{L}$ его главных левых идеалов полна [$\aleph_0$-полна сверху] и для любого главного левого идеала $L \subseteq R$ и любой [счетной] возрастающей цепочки $\{L_\iota \mid \iota \in J\}$ главных левых идеалов из R имеет место

$$L \cap \{\sup_{\mathscr{L}} L_\iota \mid \iota \in J\} = \sup_{\mathscr{L}} \{L \cap L_\iota \mid \iota \in J\}.$$

Регулярное кольцо непрерывно [$\aleph_0$-непрерывно] слева в том и только том случае, если каждый его [счетно порожденный] левый идеал является существенным подмодулем в некотором его главном левом идеале. Если R — непрерывное [$\aleph_0$-непрерывное] слева регулярное кольцо и $e^2 = e \in R$, то кольцо eRe также непрерывно [$\aleph_0$-непрерывно] слева. Непрерывным [$\aleph_0$-непрерывным] слева оказывается и прямое произведение непрерывных слева регулярных колец.

Регулярное кольцо, непрерывное как слева, так и справа, называется *непрерывным*. Непрерывное регулярное слева кольцо R оказывается непрерывным тогда и только тогда, когда для любого главного левого идеала $L \subseteq R$ и любой убывающей цепочки $\{L_\iota \mid \iota \in J\}$ его главных левых идеалов справедливо равенство

$$L + \inf_{\mathscr{L}} \{L_\iota \mid \iota \in J\} = \inf_{\mathscr{L}} \{L + L_\iota \mid \iota \in J\}.$$

Любой ненулевой двусторонний идеал непрерывного регулярного кольца содержит центральный идемпотент. Отсюда вытекает простота любого непрерывного регулярного кольца, не разложимого в прямую сумму. Любое непрерывное регулярное кольцо представимо как подпрямое произведение простых *и*-регулярных самоинъективных слева и справа колец ([161], следствия 13.4, 13.24, 13.26, 13.28 и 14.4, предложения 13.6, 13.7 и 14.5).

Двусторонним аналогом регулярности служит бирегулярность: кольцо называется *бирегулярным*, если каждый его главный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом. Бирегулярным является, в частности, всякое простое кольцо с единицей. Каждый двусторонний идеал бирегулярного кольца является пересечением его максимальных двусторонних идеалов. Всякое бирегулярное кольцо с единицей изоморфно кольцу глобальных сечений с бикомпактными

носителями пучка простых колец с единицей над бикомпактным вполне несвязным хаусдорфовым пространством и всякое такое кольцо сечений бирегулярно ([29], с. 11—12, теорема I). В коммутативном случае классы регулярных, строго регулярных и бирегулярных колец совпадают, а простые кольца в последней теореме заменяются полями. Приведем более алгебраический вариант этого результата: если R — бирегулярная алгебра с единицей над полем Φ и все ее примитивные факторалгебры изоморфны одной и той же конечномерной алгебре K над Φ, то R изоморфна алгебре всех непрерывных функций на некотором вполне несвязном компактном пространстве со значениями в алгебре K (см. [31], с. 312, теорема 2). Групповое кольцо RG, где R коммутативно, оказывается бирегулярным в том и только том случае, когда R бирегулярно, каждый элемент группы G лежит в конечной нормальной подгруппе и порядок любого элемента из G обратим в R (см. [12], с. 44, теорема 40).

Кольцо R называется *π-регулярным*, если для любого $a \in R$ найдутся натуральное число n и элемент $x \in R$ такие, что $a^n x a^n = a^n$. Каждый левый [правый] идеал π-регулярного кольца или содержит ненулевой идемпотент или является ниль-идеалом, а π-регулярное кольцо, не содержащее ненулевых нильпотентных элементов, оказывается бирегулярным ([30], с. 304, предложение 3).

Близки к регулярным *бэровские кольца*, определяемые тем условием, что каждый левый (или, что при наличии единицы равносильно, каждый правый) аннулятор порождается идемпотентом. Примерами бэровских колец служат кольца эндоморфизмов линейных пространств над телами и кольцо ограниченных операторов гильбертова пространства. Бэровское кольцо называется *абелевым*, если все его идемпотенты центральны, и *конечным по Дедекинду*, если $xy = 1$ влечет за собой $yx = 1$. Идемпотент e бэровского кольца R называется *абелевым* [*конечным*], если бэрово кольцо eRe абелево [конечно по Дедекинду]. Различаются следующие типы бэровских колец: I_{sing} — конечные по Дедекинду кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; I_{inf} — бесконечные по Дедекинду (т. е. не содержащие ненулевых конечных

центральных идемпотентов) кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$ (или II_1) — конечные по Дедекинду кольца без ненулевых абелевых идемпотентов, содержащие конечный идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{inf}}$ — бесконечные по Дедекинду кольца с условием, указанным при определении $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$; III — кольца без ненулевых конечных идемпотентов. Каждое бэровское кольцо единственным способом разлагается в прямую сумму колец перечисленных типов ([182], с. 12, теорема 12).

Левым риккартовым (или *левым PP-кольцом*, см п. 4.6) называется кольцо, в котором левый аннулятор любого элемента порождается идемпотентом. К числу риккартовых относятся все регулярные и бэровские кольца. О теоретико-модульной характеризации риккартовых колец см. п. 4.6. Левое риккартово кольцо не обязано быть правым риккартовым. Может не быть риккартовым и кольцо матриц над риккартовым кольцом.

Полурегулярным называется SBI-кольцо, фактор-кольцо которого по его радикалу Джекобсона регулярно. Полурегулярность кольца R с единицей равносильна тому, что для каждого его конечно порожденного правого идеала I найдется такой идемпотент $e \in R$, что $eR \subseteq I$ и равенство $(1-e)R \cap I + K = I$, где K — правый идеал кольца R, влечет $K = I$ (другими словами, $(1-e)R \cap I$ — малый подмодуль правого R-модуля I). Левосторонний вариант этого условия также эквивалентен полурегулярности кольца (Nicholson W. K.//Canad. J. Math. — 1976. — V. 28, № 5. — P. 1105—1120).

Информацию о $*$-регулярных кольцах см. п. 5.4.

Кольцо называется *дистрибутивным* [*цепным*] *слева*, если решетка его левых идеалов дистрибутивна [является цепью] (напомним, что в общем случае эта решетка лишь модулярна). Если R — кольцо и $A, B \subseteq R$, то положим

$$(A : B) = \{x \mid x \in R,\ Bx \subseteq A\}.$$

Нётерово слева кольцо R дистрибутивно слева тогда и только тогда, когда оно инвариантно слева и

$R=(A:B)+(B:A)$ для любых левых идеалов A и B кольца R или $B=(B:A)A$ для любых левых идеалов $B\subseteq A$ кольца R. Левая дистрибутивность нётерова слева кольца равносильна тому, что каждый его левый идеал равен произведению первичных двусторонних идеалов. Нётерово справа и слева кольцо дистрибутивно слева тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению цепных слева артиновых колец и инвариантных слева наследственных слева нётеровых слева областей целостности. Левое кольцо Безу дистрибутивно в том и только том случае, когда все его максимальные левые идеалы являются двусторонними. Полулокальное кольцо дистрибутивно слева тогда и только тогда, когда оно является левым кольцом Безу, а его факторкольцо по радикалу Джекобсона разлагается в прямое произведение конечного множества тел. Дистрибутивное слева кольцо разлагается в прямую сумму конечного числа областей Оре в том и только том случае, когда оно антисингулярно и удовлетворяет условию максимальности или для левых аннуляторов, или для прямых сумм левых идеалов. Кольцо многочленов $R[x]$ дистрибутивно слева тогда и только тогда, когда R — коммутативное регулярное кольцо. Левая дистрибутивность кольца $R[[x]]$ степенных рядов равносильно тому, что R — строго регулярное счётно инъективное кольцо. Описаны дистрибутивные слева групповые кольца с коммутативными кольцами коэффициентов. Если все нильпотентные элементы кольца R центральны или R удовлетворяет условию минимальности для левых аннуляторов, то R оказывается дистрибутивным слева тогда и только тогда, когда все его максимальные левые идеалы являются вполне простыми идеалами и соответствующие левые кольца частных существуют и оказываются цепными слева кольцами ([9], II.

Кольцо, решетка двусторонних идеалов которого дистрибутивна, называется *арифметическим*. Арифметичность кольца равносильна справедливости в нем китайской теоремы об остатках. Коммутативное нётерово кольцо арифметично тогда и только тогда, когда каждый его ненулевой идеал равен произведению максимальных идеалов. Об арифметических кольцах см. [110], §§ IX. 2, IX. 3.

2.5. Условия обрыва цепей. Как правило, удовлетворительное описание того или иного класса колец *) удается получить лишь при условии, что те или иные цепочки односторонних или двусторонних идеалов соответствующих колец обрываются. Точнее, говорят, что возрастающая [убывающая] цепочка $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ $[X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots]$ подмножеств кольца R *обрывается* или *стабилизируется*, если найдется такой номер n, что $X_n = X_{n+i}$ для любого i. Если в кольце R обрываются возрастающие [убывающие] цепочки подмножеств, удовлетворяющих тому или иному условию, то говорят, что кольцо R *удовлетворяет условию максимальности* [*минимальности*] для этих подмножеств. Например, R удовлетворяет *условию максимальности для двусторонних идеалов*, если обрывается всякая возрастающая цепочка двусторонних идеалов.

Кольцо называется *артиновым* [*нётеровым*] слева, если обрывается любая убывающая [возрастающая] цепочка его левых идеалов.

Артиново [нётерово] слева кольцо не обязано быть артиновым [нётеровым] справа. В самом деле, кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & r \end{pmatrix}$, где α и β – произвольные действительные числа, а r любое рациональное число, нётерово и артиново слева, но ни нётерово, ни артиново справа. Однако если кольцо артиново слева и нётерово справа, то оно артиново справа ([126], с. 55, теорема 4.1).

Всякое артиново слева кольцо R, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп (в частности, если R содержит левую или правую единицу), оказывается нётеровым слева ([187], с. 232, теорема 10.10; [76], § 4.5). На несправедливость обратной импликации указывает пример кольца целых чисел. Тем не менее, если кольцо R нётерово слева и справа, а его левый цоколь имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым левым [правым] идеалом, то R артиново слева и справа ([126], с. 58, теорема 4.6).

---

*) Все сказанное в этом пункте о кольцах, если только не оговорено противное, остается справедливым для любых Ф-алгебр, а также при одновременной замене прилагательного «левый» на «правый» и наоборот. Подчеркнем еще, что в случае алгебр под правым, левым или двусторонним идеалом следует понимать соответствующий идеал алгебры (см. пп. 1.2 и 2.2)

Прямая сумма конечного множества артиновых [нётеровых] слева колец артинова [нётерова] слева Факторкольцо артинова [нётерова] слева кольца, а также кольцо матриц над ним артиново [нётерово] слева. Если кольцо R артиново [нётерово] слева и $e^2 = e \in R$, то артиново [нётерово] слева и кольцо eRe. Более того, кольцо R с единицей оказывается артиновым [нётеровым] слева тогда и только тогда, когда $1 = e + f$, где $e^2 = e \in R$, $f^2 = f \in R$, $ef = 0 = fe$, кольца eRe и fRf артиновы [нётеровы] слева, eRf — конечно порожденный левый eRe-модуль и fRe — конечно порожденный левый fRf-модуль ([47] теорема 10.5; [76], с. 122, следствие b). Групповое кольцо RG оказывается артиновым слева тогда и только тогда, когда кольцо R артиново слева, а группа G конечна ([39], с. 69, следствие 14.7; [12], с. 33, теорема 30). Критерий левой нётеровости группового кольца пока не найден. Артиново слева кольцо вкладывается в артиново слева кольцо с единицей в том и только том случае, когда его аддитивная группа не содержит квазициклических подгрупп ([187], с. 240, теорема 10.27). Существование единицы у коммутативного артинова кольца R равносильно отсутствию полного аннулятора, т. е. $\operatorname{Ann} R = \{0\}$ (см. [187], с. 237, теорема 10.21). Аддитивная группа нильпотентного артинова кольца разлагается в прямую сумму конечного числа p-групп ([187], с. 229, теорема 10.7). Кольцо, в котором обрывается всякая убывающая цепочка подколец, оказывается счетным, а всякое его конечное подмножество порождает конечное подкольцо (Шнейдмюллер В. И.//Мат. сб. — 1950. — Т. 27.— С. 219—228).

Кольцо R нётерово слева тогда и только тогда, когда каждый его левый идеал конечно порожден. При наличии в кольце левой единицы это означает, что для каждого его левого идеала L найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, что $L = Ra_1 + \ldots + Ra_n$. Любой односторонний ниль-идеал нётерова слева кольца нильпотентен ([57], с. 115, предложение 6; [90], п. 9.15). То же самое верно для колец, в которых обрываются возрастающие цепочки односторонних аннуляторных идеалов ([180], с. 24, следствие 3.3; [96], теорема 7.3.3). Кольцо многочленов над нётеровым слева кольцом нётерово слева (*теорема Гильберта*

о базисе — [87], с. 103, теорема 1). То же самое верно и для кольца степенных рядов. Если $R \subseteq S \subseteq M_n(R)$, то S нётерово справа тогда и только тогда, когда R нётерово справа. Нётерово справа и слева кольцо R с первичным радикалом N разлагается в прямую сумму полупервичных и артиновых справа и слева колец в том и только том случае, когда $N = cN = Nc$ для любого c из R такого, что $c + N$ не является делителем нуля в R/N. Центр $\mathfrak{Z}(R)$ полупервичного кольца R нётеров тогда и только тогда, когда R нётерово справа и является конечно порожденным $\mathfrak{Z}(R)$-модулем ([208], пп. 1.1.4, 4.1.9, 13.6.14). Существуют простые нётеровы справа кольца с делителями нуля, но без идемпотентов, отличных от нуля и единицы (Залесский А. Е., Нерославский О. М.// Commun. Algebra. — 1975. — V. 5, № 3. — P. 231—244). Некоммутативным нётеровым кольцам посвящена монография [205], а конечным кольцам — монографии [36] и [211].

Для нильпотентного кольца равносильны условия обрыва возрастающих цепей подгрупп аддитивной группы, подколец, правых, левых и двусторонних идеалов. Подкольца конечно порожденного нильпотентного кольца конечно порождены ([198], § III. 4).

О конечных нильпотентных кольцах см. [198], гл. V.

Важным частным случаем нётерова слева кольца является *кольцо главных левых идеалов*, в котором, по определению, каждый левый идеал является главным. Приведенный выше пример показывает, что кольцо главных левых идеалов не обязано быть даже нётеровым справа. Нётерово справа кольцо главных левых идеалов разлагается в прямую сумму первичных колец и примарных артиновых слева колец ([90], п. 20.97). Артиново слева кольцо главных левых идеалов с единицей разлагается в прямую сумму примарных колец главных левых идеалов ([90], п. 19.45). Первичное кольцо главных левых идеалов изоморфно кольцу матриц над областью, удовлетворяющей левому условию Оре ([90], предложение 10.21). Кольцо главных левых идеалов удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей нильпотентных правых идеалов в том и только том случае, когда оно разлагается в прямую сумму конечного числа первичных колец

главных левых идеалов и артиновых справа и слева примарных колец ([180], с. 88, теорема 8.1). Полупервичные кольца главных левых идеалов и только они разлагаются в конечную прямую сумму первичных колец главных левых идеалов (Johnson R. E.//Canad. J. Math. — 1963. — V. 15, № 2. — P. 297—301). Кольцо матриц над кольцами главных левых и главных правых идеалов обладает тем же свойством ([30], с. 148, теорема 40).

Коммутативное кольцо главных идеалов является прямой суммой областей главных идеалов и кольца главных идеалов с единственным простым идеалом, причем этот идеал нильпотентен ([40], ч. I, с. 282, теорема 33). Для любых двух элементов a и b из области главных правых и главных левых идеалов R существуют наибольший общий левый делитель (a, b) и наименьшее левое кратное $[a, b]$, определяемые однозначно с точностью до обратимого правого и левого множителя соответственно. При этом $Ra + Rb = R(a, b)$ и $Ra \cap Rb = R[a, b]$ (см. [30], с. 54, теорема 2). Справедлива и теорема о разложении на неприводимые множители ([30], с. 70, теорема 5).

Эквивалентны следующие свойства кольца R с единицей: (1) R удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных правых идеалов; (2) R удовлетворяет условию минимальности для аннуляторных левых идеалов; (3) для всякого правого идеала I кольца R найдется такой конечно порожденный правый идеал $I' \subseteq I$, что $\mathrm{Ann}_l I = \mathrm{Ann}_l I'$. Любое подкольцо кольца, удовлетворяющего условию максимальности [минимальности] для аннуляторных правых идеалов, само удовлетворяет этому условию. Ниль-кольцо, удовлетворяющее условиям максимальности как для левых, так и для правых аннуляторных идеалов, нильпотентно ([90], пп. 7.23.2, 7.23.3, 20.23, т. I, с. 488, упр. 2).

Кольцо R называется *правым кольцом Голди*, если оно удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных правых идеалов и прямых сумм правых идеалов. Ниль-кольцо Голди нильпотентно ([90], т. I, с. 488, упр. 2). Полупервичное кольцо оказывается правым кольцом Голди тогда и только тогда, когда оно антисингулярно справа и удовлетворяет условию

максимальности для прямых сумм правых идеалов ([90], п. 9.13).

Кольцо называется *классически полупростым*, если оно изоморфно прямой сумме конечного числа полных матричных колец над телами. Для кольца R с единицей эквивалентны следующие утверждения: (1) R классически полупросто; (2) R — артиново слева [справа] кольцо, не содержащее ненулевых нильпотентных двусторонних (а значит и односторонних) идеалов; (3) R артиново слева [справа] и его радикал Джекобсона равен нулю; (4) R разлагается в прямую сумму своих минимальных левых [правых] идеалов (т. е. R вполне приводимо слева [справа]); (5) R совпадает со своим левым [правым] цоколем; (6) каждый левый [правый] идеал кольца R порождается идемпотентом; (7) для каждого левого [правого] идеала H кольца R найдется такой левый [правый] идеал H', что $R = H \oplus H'$; (8) R — артиново слева [справа] регулярное кольцо; (9) R — нётерово слева [справа] регулярное кольцо; (10) R — регулярное кольцо главных правых [левых] идеалов; (11) R не содержит ненулевых нильпотентных двусторонних идеалов и совпадает с суммой своих минимальных квазиидеалов (*теорема Веддербарна—Артина* — см. [87], с. 122, теорема 2; [76], § 3.5; [31], § III. 3; [256], с. 56, теорема 8.1). Теоретико-модульная характеризация классически полупростых колец дана в п. 4.6.

Из теоремы Веддербарна—Артина нетрудно вывести, что кольцо разлагается в конечную прямую сумму тел тогда и только тогда, когда оно артиново слева или справа и не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Каждое из условий (1)—(4) влечет существование единицы ([96], с. 34, следствие 2). Из определения классически полупростого кольца видно, что оно разлагается в прямую сумму простых колец. Оказывается, что такое разложение единственно ([31], с. 69, теорема 2). Каждый двусторонний идеал классически полупростого кольца порождается центральным идемпотентом ([87], с. 125, лемма 3).

Групповое кольцо RG классически полупросто, тогда и только тогда, когда кольцо R классически полупросто, а G — конечная группа, порядок которой обратим в R (см. [39], с. 67, теорема 12.2). В частно-

сти, групповая алгебра конечной группы над полем Φ классически полупроста тогда и только тогда, когда характеристика поля не делит порядок группы (*теорема Машке* — см. [87], с. 204, теорема 16; [51], с. 365, теорема 2).

К числу классически полупростых колец относятся, разумеется, все конечномерные алгебры R над полем Φ, не содержащие ненулевых нильпотентных идеалов (односторонних или двусторонних). Если поле Φ алгебраически замкнуто (в частности, если Φ — поле комплексных чисел), то R разлагается в прямую сумму алгебр матриц над полем Φ. Порядок этих матриц равен размерности минимальных правых [левых] идеалов алгебры R. Если $n_1, \ldots, n_m$ — размерности всех таких, например, правых идеалов, попарно неизоморфных как правые R-модули, то $\dim_\Phi R = n_1^2 + \ldots + n_m^2$ и $\dim_\Phi \mathfrak{Z}(R) = m$ ($\dim_\Phi$ означает размерность над полем Φ). Если G — конечная группа, то $\dim_\Phi \mathfrak{Z}(\Phi G)$ равна числу классов сопряженности группы G (см. [88], с. 201, теорема 15, с. 205, теоремы 17 и 18; [90], п. 13.5).

Конечномерная алгебра A над полем Φ называется *сепарабельной*, если Ψ-алгебры $\Psi \otimes_\Phi A$ классически полупросты для всех расширений Ψ поля Φ. Это равносильно классической полупростоте Φ алгебры $\bar{\Phi} \otimes_\Phi A$ для некоторого алгебраически замкнутого расширения $\bar{\Phi}$ поля Φ (см. [90], п. 13.16). Если A — конечномерная алгебра над полем Φ, J — радикал Джекобсона алгебры A и A/J — сепарабельная Φ-алгебра, то аддитивная группа алгебры A разлагается в прямую сумму $A = B \oplus J$, где B — однозначно определенная подалгебра алгебры A, изоморфная A/J (*теорема Веддербарна—Мальцева* — см. [90], п. 13.18; [56], с. 450).

Сепарабельным алгебрам посвящена монография [137].

Скажем, что кольцо R удовлетворяет *правому условию Артина—Риса*, если для всякого его правого идеала H и любого двустороннего идеала I найдется такое натуральное число n, что $H \cap I^n \subseteq HI$. Всякое коммутативное нётерово кольцо удовлетворяет условию Артина—Риса ([126], следствие 11.8). Пусть теперь R — нётерово справа и слева кольцо, удовлетворяющее правому и левому условиям Артина—Риса, и

I — его полупервичный идеал. Тогда множество $\mathscr{C}_R(I)=\{x \mid x\in R,\ \ x+I$ — неделитель нуля в $R/I\}$ удовлетворяет правому и левому условиям Оре и для радикала Джекобсона соответствующего классического кольца частных $R_{\mathscr{C}_R(I)}$ равен $I_{\mathscr{C}_R(I)}$ (см. [208], п. 4.2.11).

Если A — конечномерная центральная простая алгебра над полем Φ, то $\Psi\otimes_\Phi A$ оказывается центральной простой Ψ-алгеброй для любого расширения Ψ поля Φ, а $A^0\otimes_\Phi A$, где A^0 — алгебра, инверсно изоморфная A, изоморфна алгебре $M_n(\Phi)$, где n — размерность алгебры A. Отсюда вытекает, что A — сепарабельная алгебра ([76], с. 282). Если подалгебра B конечномерной центральной простой алгебры A над полем Φ проста и φ — гомоморфизм алгебры B в A, то найдется такой обратимый элемент $u\in A$, что $\varphi(x)=u^{-1}xu$ для всех $x\in B$ (*теорема Нётер—Сколема*), а централизатор централизатора алгебры B в A совпадает с B (см. [76], §§ 12.6, 12.7). Для всякой конечномерной центральной простой алгебры A над полем Φ существует *поле расщепления* (или *разложения*), т. е. такое расширение Ψ поля Φ, что $\Psi\otimes_\Phi A$ изоморфна алгебре $M_n(\Phi)$ для некоторого n (см. [90], т. I, с. 587; [96], § 4.3).

Конечномерные центральные простые алгебры над полем Φ называются *подобными*, если $M_m(\Phi\otimes_\Phi A)=$ $=M_n(\Phi\otimes_\Phi B)$ для подходящих m и n. Это равносильно тому, что базисные алгебры алгебр A и B изоморфны, что, в свою очередь, равносильно эквивалентности алгебр A и B в смысле Мориты. Отношение подобия оказывается отношением эквивалентности. Если $[A]$ — класс этой эквивалентности, содержащий алгебру A, то определение $[A]\,[B]=[A\otimes_\Phi B]$ превращает множество классов в периодическую абелеву группу, которая называется *группой Брауэра* поля Φ (см. [76], § 12.5; [96], § 4.1, теорема 4.4.4; [31], § V. 13; [90], т. I, с. 587). Каждая конечномерная простая алгебра над полем Φ подобна некоторой алгебре с делением над полем Φ. Отсюда вытекает, что группа Брауэра алгебраически замкнутого поля одноэлементна ([76], с. 285). О связи группы Брауэра поля Φ со скрещенными произведениями расширений поля Φ и их группами Галуа см. [96], § 4.4, а о вычислении групп Брауэра — [76], гл. 15, 17, 18. О ко-

нечномерных алгебрах и их представлениях см. также [34], [56], [101] и [135]. Описание алгебр малой размерности приведено в [16], п. 2.2.

Кольцо R называется *полулокальным*, если его факторкольцо R/J по его радикалу Джекобсона J — классически полупростое кольцо. Если R — полулокальное кольцо, a, $b \in R$ и $Ra + Rb = R$, то $RaRb = RbRa$. Если же $Ra = bR$ — двусторонний идеал кольца R, то $aR = Ra = bR = Rb$ (см. [90], 19.43). Если полулокальное SBI-кольцо R содержит единицу, то $R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$, где e_i — неразложимые попарно ортогональные идемпотенты, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ и e_iRe_i — локальные кольца. При этом, если $R = f_1R \oplus \ldots \oplus f_mR$ — другое разложение с теми же свойствами, то $m = n$ и найдется такой обратимый элемент $u \in R$, что при подходящей нумерации $f_i = u^{-1}e_iu$ для всех i. Полулокальное кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона называется *полупримарным*. Полупримарное кольцо оказывается артиновым слева [справа] тогда и только тогда, когда оно нётерово слева [справа]. Подчеркнем, что всякое артиново слева или справа кольцо оказывается полупримарным SBI-кольцом ([31], с. 89, теорема 4, с. 91, теорема 2; [90], пп. 18.26, 18.32).

Кольцо R называется *примарным*, если факторкольцо R/J по его радикалу Джекобсона J изоморфно кольцу матриц над некоторым телом, т. е. просто и классически полупросто. Любое примарное SBI-кольцо (в частности, всякое артиново или нётерово слева или справа кольцо) изоморфно кольцу матриц над локальным кольцом. Если R и S — локальные кольца, $M_m(R) = M_n(S)$, а e_{ij} и f_{kl} — соответствующие матричные единицы, то найдется такой обратимый элемент $u \in M_m(R)$, что $S = u^{-1}Ru$ и при подходящей нумерации имеет место $f_{ij} = u^{-1}e_{ij}$ и для любых i и j (см. [31], с. 87, теорема 1, с. 92, теорема 3; [57], с. 128, предложение 4).

Назовем *правой размерностью Крулля* кольца R размерность Крулля правого R-модуля R. Таким образом, правая размерность Крулля артинова справа кольца равна нулю, а любое нётерово справа кольцо обладает размерностью Крулля. Отметим, что существуют нётеровы области с любой размерностью Крулля ([163], теорема 9.8). Для коммутативных колец

существование конечной размерности Крулля равносильно конечности длины частично упорядоченного множества простых идеалов ([163], предложение 7.8). Правая размерность Крулля кольца R (если она существует) совпадает с точной верхней гранью размерностей Крулля всех конечно порожденных правых R-модулей ([163], лемма 1.1), а также с правой размерностью Крулля факторкольца R/B, где B — нижний ниль-радикал кольца R ([163], следствие 5.8). Любое нильподкольцо кольца с правой размерностью Крулля нильпотентно ([163], теорема 5.1). Любое кольцо с правой размерностью Крулля удовлетворяет условию максимальности для первичных и полупервичных идеалов ([163], теоремы 7.1 и 7.6). Каждый полупервичный идеал кольца с правой размерностью Крулля равен пересечению конечного числа первичных ([163], предложение 7.3). Полупервичное кольцо с правой размерностью Крулля оказывается правым кольцом Голди ([163], следствие 3.4). Если R — простое нётерово справа и слева кольцо, имеющее правую и левую размерность Крулля, равную 1, и конечную глобальную размерность, то R эквивалентно в смысле Мориты некоторой области целостности. Однако не всякое простое нётерово справа и слева кольцо изоморфно даже кольцу матриц над областью целостности ([126], теорема 14.19). Отметим, что правая размерность Крулля нётерова справа кольца R равна 1, если для любого существенного правого идеала $\bar{I}$ кольца $\bar{R} = R/N$, где N — верхний ниль-радикал кольца R, $\bar{R}/\bar{I}$ оказывается артиновым правым $\bar{R}$-модулем ([163], следствие 5.8 и предложение 6.1), а также если R — коммутативная область целостности, все факторкольца которой, не являющиеся полями, артиновы. Единице равна и размерность целочисленного группового кольца конечной группы ([163], с. 72). К правой размерности Крулля близка *правая размерность Габриэля*, также определяемая как размерность Габриэля правого R-модуля R (см. [163], [221]).

Отметим еще *размерность Гельфанда—Кириллова*, определяемую для алгебры R с единицей над полем Φ и обозначаемую через $\mathrm{GK\text{-}dim}\, R$. Чтобы определить ее, обозначим через $\Phi[V]$ подалгебру алгебры R, порожденную ее линейным подпространством V. Далее по-

ложим

$$d_V(n) = \dim_\Phi (\Phi + V + V^2 + \ldots + V^n),$$

$$\text{GK-dim}(\Phi[V]) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log d_V(n)}{\log n}$$

и, наконец,

$$\text{GK-dim}\, R = \sup\{\text{GK-dim}\, \Phi[V] \mid \dim_\Phi V < \aleph_0\}$$

(см. [197] и [223], гл. 10).

Кольцо с R с единицей называется *конечным по Дедекинду*, если для любых $x, y \in R$ равенство $xy = 1$ влечет $yx = 1$. К числу колец, конечных по Дедекинду, относятся кольца, удовлетворяющие условию максимальности для аннуляторных правых идеалов или прямых сумм, кольца, удовлетворяющие условию минимальности для аннуляторных правых идеалов или прямых слагаемых, кольца, самоинъективные справа и слева. Кольцо R конечно по Дедекинду одновременно с его факторкольцом по радикалу Джекобсона. Линейное пространство над телом оказывается конечномерным тогда и только тогда, когда кольцо его линейных преобразований конечно по Дедекинду. Кольцо, не являющееся конечным по Дедекинду, содержит бесконечный набор *матричных единиц*, т. е. такое множество $\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2, \ldots\}$, что $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$ и $e_{ij}e_{kl} = 0$ при $j \neq k$ (см. [90], пп. 10.6.3, 10.6.4, 19.39, 19.40). Групповая алгебра над любым полем характеристики нуль конечна по Дедекинду ([39], с. 23, теорема 2.22).

Кольцо называется [*строго*] *ограниченным справа*, если всякий его ненулевой существенный правый идеал [всякий его ненулевой правый идеал] содержит ненулевой двусторонний идеал. Этим кольцам посвящена монография [174].

2.6. Радикалы. Зафиксируем коммутативное кольцо Φ с единицей и будем говорить о Φ-алгебрах. Напомним, что всякое кольцо является $\mathbf{Z}$-алгеброй, так что все сказанное о Φ-алгебрах остается справедливым и для колец, если только не указаны какие-либо ограничения на Φ. Определение радикала и его свойства, не являющиеся специфическими для ассоциативных колец, рассмотрены в п. 1.4. Для любого радикала $\mathfrak{r}$ в классе ассоциативных колец справедлива

		Обозначение	(A)	Характеризация радикальных алгебр
1	Радикал Бэра или нижний ниль-радикал, или первичный радикал	$\mathscr{B}$	Пересечение всех первичных идеалов алгебры A	Любая ненулевая фактор-алгебра содержит ненулевые нильпотентные двусторонние идеалы
2	Радикал Левицкого или локально нильпотентный радикал	$\mathscr{L}$	Сумма всех локально нильпотентных двусторонних идеалов алгебры A или пересечение всех таких ее первичных идеалов P, что A/P не содержит ненулевых локально нильпотентных двусторонних идеалов	Локально нильпотентные алгебры
3	Радикал Кете или верхний ниль-радикал	$\mathscr{K}$	Сумма всех ниль-идеалов алгебры A или пересечение всех таких ее первичных идеалов P, что A/P не содержит ненулевых двусторонних ниль-идеалов	Ниль-алгебры
4	Радикал Джекобсона или квазирегулярный радикал	$\mathscr{J}$	Наибольший двусторонний квазирегулярный идеал алгебры A, или сумма всех квазирегулярных правых [левых] идеалов алгебры A, или пересечение всех модулярных максимальных правых [левых] идеалов алгебры A, или пересечение всех примитивных справа [слева] идеалов алгебры A	а) Квазирегулярные алгебры; б) алгебры, не имеющие примитивных фактор-алгебр

Таблица 1

Характеризация τ-полупростых алгебр	Нижний или верхний радикал	Ссылки
Полупервичные алгебры	Нижний радикал, определяемый классом всех нильпотентных алгебр, а также верхний радикал, определяемый классом всех первичных алгебр	[1], § 1.1; [31], гл. VIII; [90], пп. 26.3, 26.11; [57], § 3.2
а) Не содержит ненулевых локально нильпотентных двусторонних идеалов; б) разлагается в подпрямое произведение первичных алгебр, не содержащих ненулевых локально нильпотентных двусторонних идеалов	Нижний радикал, определяемый классом всех локально нильпотентных алгебр	[1], § 1.2; [31], гл. VIII
а) Не содержит ненулевых двусторонних ниль-идеалов; б) разлагается в подпрямое произведение ее первичных алгебр, не содержащих ненулевых двусторонних ниль-идеалов	Нижний радикал, определяемый классом всех ниль-алгебр	[1], § 1.2
а) Не содержит ненулевых квазирегулярных правых [левых] двусторонних идеалов; б) различается в подпрямое произведение примитивных справа [слева] алгебр	Верхний радикал, определяемый классом всех примитивных справа [слева] алгебр	[1], § 1.3; [87], § IV.6; [31], §§ 1.2, 1.5—1.11; [57], § 3.2; [76], §§ 4.3, 4.4; [90], гл. 18, пп. 26.13—26.21; [96], гл. 1—2

		Обозначение	(A)	Характеризация радикальных алгебр
5	Радикал Брауна — Маккоя или присоединенно простой радикал	$\mathscr{T}$	Пересечение всех таких максимальных двусторонних идеалов M алгебры A, что A/M содержит единицу	а) Присоединенно простые алгебры; б) алгебры, не имеющие фактор-алгебр с левой [правой] двусторонней единицей
6	Обобщенный ниль-радикал или радикал Андрунакиевича	$\mathscr{A}$	Наименьший среди таких двусторонних идеалов I алгебры A, что A/I не содержит ненулевых нильпотентных элементов	Среди фактор-алгебр нет алгебр без делителей нуля

лемма Андерсона—Дивинского—Сулиньского: если $I \lhd R$, то $\mathfrak{r}(I) \lhd R$ (см. [258], теорема 1.7).

Радикал $\mathfrak{r}$ называется *наднильпотентным* [*подыдемпотентным*], если все нильпотентные алгебры $\mathfrak{r}$-радикальны [$\mathfrak{r}$-полупросты]. Для подыдемпотентности наследственного радикала необходимо и достаточно, чтобы все $\mathfrak{r}$-радикальные алгебры были идемпотентными. Если задан класс Π простых алгебр, то верхний радикал, определяемый классом всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной, принадлежащей Π [не принадлежащей Π], оказывается наднильпотентным [подыдемпотентным] наследственным радикалом ([1], с. 202, теорема 1). Для того чтобы любой наследственный радикал в классе всех Φ-алгебр был наднильпотентным или подыдемпотентным, необходимо и достаточно, чтобы Φ было локальным кольцом с нильпотентным максимальным идеалом. В частности, Φ может быть полем ([1], с. 224, теорема 9). Наследственный радикал называется *специальным*, если любая $\mathfrak{r}$-полупростая алгебра представляется как подпрямое произведение первичных $\mathfrak{r}$-полупростых алгебр. Всякий специальный радикал наднильпотентен.

Продолжение

Характеризация τ-полупростых алгебр	Нижний или верхний радикал	Ссылки
Подпрямое произведение простых алгебр с единицей	Верхний радикал, определяемый классом всех простых колец с единицей	[1], § 4.4
а) Не содержит ненулевых нильпотентных элементов; б) подпрямые произведения алгебр без делителей нуля	Верхний радикал, определяемый классом всех алгебр без делителей нуля	[1], § 4.2

Однако существуют неспециальные наднильпотентные радикалы.

Важнейшие наднильпотентные радикалы собраны в таблице 1. Дополнительно к сведениям, приведенным в этой таблице, отметим, что все эти радикалы специальны. Для любой алгебры A справедливы включения

$$\mathscr{B}(A) \subseteq \mathscr{L}(A) \subseteq \mathscr{K}(A) \subseteq \mathscr{J}(A) \subseteq \mathscr{T}(A),$$

и

$$\mathscr{K}(A) \subseteq \mathscr{A}(A).$$

Для каждого из этих включений найдется алгебра, для которой оно является строгим. Если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов, то $\mathscr{B}(A)$ — нильпотентный идеал ([1], с. 358, теорема 1). Если алгебра A артинова справа или слева, то $\mathscr{B}(A) = \mathscr{L}(A) = \mathscr{K}(A) = \mathscr{J}(A) = \mathscr{T}(A)$, причем этот идеал совпадает с наибольшим нильпотентным правым [левым, двусторонним] идеалом алгебры A (см. [1], с. 346, теорема 4). Если алгебра A дистрибутивна слева, то $\mathscr{B}(A)$ оказывается наибольшим ниль-идеалом алгебры A (см. [9], п. 4.2). Для

любой нётеровой справа или слева алгебры A имеем $\mathscr{L}(A)=\mathscr{K}(A)$, а для любой коммутативной алгебры K справедливо $\mathscr{L}(K)=\mathscr{K}(K)=\mathscr{A}(K)=\mathscr{B}(K)$ и $\mathscr{J}(K)=\mathscr{T}(K)$. Для любой алгебры A идеал $\mathscr{L}(A)$ содержит все односторонние локально нильпотентные идеалы, а $\mathscr{L}$-полупростые алгебры таких ненулевых односторонних идеалов не содержат.

Для описания элементов, принадлежащих идеалу $\mathscr{B}(A)$, назовем непустое подмножество X алгебры A *m-системой*, если для любых $x', x'' \in X$ найдется такой элемент $a \in A$, что $x'ax'' \in X$. Оказывается, что нижний ниль-радикал $\mathscr{B}(A)$ алгебры A состоит из тех и только тех элементов $x \in A$, что любая m-система, содержащая x, содержит нуль.

Присоединенно простой радикал $\mathscr{T}(A)$ алгебры A состоит из всех таких элементов a алгебры A, что

$$A=\left\{cx-x+yc-y+\sum_i (x_icy_i-x_iy_i)\,|\,x, y, x_i, y_i \in A\right\}$$

для любого элемента c, принадлежащего двустороннему идеалу алгебры A, порожденному элементом a.

Наиболее употребительным среди перечисленных радикалов являются радикалы Джекобсона и Бэра. Если A — алгебра с единицей, то $\mathscr{J}(A)$ равен пересечению всех максимальных правых [левых] идеалов алгебры A и совпадает с каждым из множеств $\{x\,|\,1+xy$ обратим для всех $y \in A\}$ и $\{y\,|\,1+xy$ обратим для всех $x \in A\}$. В частности, если $x \in \mathscr{J}(A)$, то $1+x$ и $1-x$ обратимы. Для любой алгебры A как равенство $xa=a$, так и равенство $ax=a$, где $x \in \mathscr{J}(A)$ и $a \in A$, влечет $a=0$. Если каждый правый [левый] идеал алгебры A, не являющийся ниль-идеалом, содержит ненулевой идемпотент, то $\mathscr{J}(A)$ оказывается ниль-идеалом ([31], § IX. 4). Для любой алгебры A справедливы равенства $\mathscr{J}(M_n(A))=M_n(\mathscr{J}(A))$ при любом n и $\mathscr{J}(eAe)=e\mathscr{J}(A)e$, если $e^2=e \in A$ (см. [31], с. 25, теорема 3; с. 77, предложение 1). Если алгебра A не содержит ненулевых двусторонних ниль-идеалов, то $\mathscr{J}(A[t])=0$ (см. [31], с. 27, теорема 4). Если A коммутативна и $\mathscr{J}(A)=0$, то A представляется как подпрямое произведение полей ([31], с. 32, теорема 2). Если A — алгебра над бесконечным полем Φ и размерность алгебры A над Φ меньше мощности поля Φ, то $\mathscr{J}(A)$ — ниль-идеал. В частности, это

имеет место для любой конечно порожденной алгебры A над несчетным полем ([31], с. 38, теорема 2, с. 39, следствие 1). Если A — алгебра над полем Φ, а Ψ — алгебраическое и сепарабельное расширение поля Φ, то $\mathcal{J}(\Psi \otimes_\Phi A) = \Psi \otimes_\Phi \mathcal{J}(A)$ (см. [90], п. 26.16). Если R — кольцо и $R + \mathbf{Z}1$ — кольцо, полученное из R стандартным присоединением единицы, то $\mathcal{J}(R + \mathbf{Z}1) = \mathcal{J}(R)$ ([31], с. 25, теорема 2). Если A есть $\mathcal{J}$-полупростая алгебра над полем Φ и Ψ — конечное расширение Галуа поля Φ, то $\Psi \otimes_\Phi A$ является $\mathcal{J}$-полупростой Ψ-алгеброй ([90], п. 26.15). Если A — конечномерная, а B — $\mathcal{J}$-радикальная алгебра над полем Φ, то алгебра $A \otimes_\Phi B$ $\mathcal{J}$-радикальна ([31], с. 182, теорема 1).

Для группового кольца RG равенство $\mathcal{J}(RG) = 0$ установлено в следующих случаях: 1) R — несчетное поле характеристики 0 ([90], п. 26.11); 2) R — поле, являющееся трансцендентным расширением поля рациональных чисел и, в частности, поле комплексных чисел ([39], с. 45, следствие 6.8); 3) G — разрешимая группа и порядки ее элементов обратимы в R (см. [39], с. 46, п. 6.14). Если G — разрешимая группа и Φ — поле, то $\mathcal{J}(\Phi G)$ локально нильпотентен и как двусторонний идеал порождается радикалом Джекобсона групповой алгебры некоторой локально конечной нормальной подгруппой группы G (см. [39], с. 50, теорема 6.27). Если H — нормальная подгруппа конечного индекса n в группе G и Φ — поле, то

$$(\mathcal{J}(\Phi G))^n \subseteq \mathcal{J}(\Phi H), \quad \Phi G \subseteq \mathcal{J}(\Phi G).$$

При этом $\mathcal{J}(\Phi G) = \mathcal{J}(\Phi H) \cdot \Phi G$, если n обратимо в Φ (см. [230], с. 278, теорема 2.7). Радикалу Джекобсона групповых колец посвящена монография Карпиловского [184]. См. также [39], § 6, и [230], гл. 7.

Если $\mathcal{K}(R) = 0$ и порядки элементов группы G не являются делителями нуля в R, то для группового кольца RG имеем $\mathcal{K}(RG) = 0$ (см. [12], с. 22, теорема 19).

Для любой ненулевой $\mathcal{T}$-полупростой алгебры A равносильны следующие утверждения: (1) A удовлетворяет условию минимальности для главных двусторонних идеалов; (2) любой главный двусторонний идеал алгебры A является алгеброй с условием

минимальности для двухсторонних идеалов; (3) любой ненулевой двусторонний идеал алгебры A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей; (4) A разлагается в прямую сумму алгебр с единицей. Для ненулевой $\mathcal{T}$-полупростой алгебры оказываются равносильными и следующие свойства: (1) A удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов; (2) A обладает единицей и удовлетворяет условию минимальности для главных двусторонних идеалов; (3) любой двусторонний идеал алгебры A является алгеброй с единицей; (4) A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей. Ненулевая алгебра классически полупроста тогда и только тогда, когда она $\mathcal{T}$-полупроста, удовлетворяет условию минимальности для модулярных главных двусторонних идеалов и любой из ее ненулевых двусторонних идеалов содержит минимальный правый [левый] идеал ([1], § 4.4).

Если $\mathfrak{r}$ — некоторый радикал на классе всех Ф-алгебр, то наибольший среди радикалов $\mathfrak{r}'$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{r}(A)\cap\mathfrak{r}'(A)=0$ для любой Ф-алгебры A, называется *дополнительным к радикалу* $\mathfrak{r}$ и обозначается через $\mathfrak{r}^*$. Если $\mathfrak{r}$ — наследственный радикал, то $\mathfrak{r}^*$ совпадает с верхним радикалом, определенным классом всех подпрямо неразложимых Ф алгебр с $\mathfrak{r}$-радикальной сердцевиной. Кроме того, оказываются эквивалентными следующие свойства произвольной Ф-алгебры A: (1) $\mathfrak{r}^*(A)=A$; (2) $\mathfrak{r}(A/I)=0$ для любого двустороннего идеала I алгебры A; (3) A/I разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{r}$-полупростой сердцевиной для любого двустороннего идеала I алгебры A (см. [1], с. 188—189, теорема 3).

В качестве примеров подыдемпотентных радикалов укажем радикалы $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{A}^*$, дополнительные к радикалам $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ соответственно. Радикал $\mathcal{B}^*$ называется *наследственно идемпотентным*, а $\mathcal{A}^*$ — *вполне идемпотентным*. Для любой алгебры A идеал $\mathcal{A}^*(A)$ является наибольшим вполне идемпотентным идеалом алгебры A, а $\mathcal{B}^*(A)$ состоит из всех таких элементов $r\in A$, что для любого a из двустороннего идеала алгебры A, порожденного элементом r, имеет место $a=\sum_i x_iay_iaz_i$ для подходящих $x_i, y_i, z_i\in A$. Если $\mathfrak{r}$ — подыдемпо-

тентный радикал, то $\mathfrak{r}(A) \subseteq \mathscr{B}^*(A)$ для любой алгебры A (см. [1], § 4.5).

Наконец, рассмотрим *антипростой радикал* $\mathscr{B}^{**}$, двойственный к радикалу $\mathscr{B}^*$. Этот радикал специален. Если наследственный радикал $\mathfrak{r}$ таков, что все простые алгебры $\mathfrak{r}$-полупросты, то $\mathfrak{r}(A) \subseteq \mathscr{B}^*(A)$ для любой алгебры A. Алгебра оказывается $\mathscr{B}^{**}$-радикальной тогда и только тогда, когда она *антипроста*, т. е. никакой из ее двусторонних идеалов не допускает гомоморфизма на простую алгебру. Если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных двусторонних идеалов, то $\mathscr{B}^{**}(A) = \mathscr{B}(A)$ (см. [1], с. 356—357, предложение 4, с. 358, теорема 1).

Радикалам посвящены монографии [1], [139] и [258].

2.7. Свободные алгебры, PI-алгебры, многообразия алгебр *). Пусть Φ — коммутативное кольцо с единицей и X — непустое множество. *Свободной Φ-алгеброй* [*с единицей*] *с системой свободных порождающих* X называется Φ-алгебра F [с единицей], порожденная множеством X [объединением $X \cup \{1\}$] такая, что для всякого отображения φ множества X в любую Φ-алгебру [с единицей] A существует такой гомоморфизм $\psi\colon F \to A$, что $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in X$. Если в приведенном определении считать, что F и A — коммутативные алгебры, то приходим к определению *коммутативной свободной алгебры* [*с единицей*] *с системой свободных порождающих* X. При $\Phi = \mathbf{Z}$ получаем определение *свободного кольца* [*с единицей*] и *свободного коммутативного кольца* [*с единицей*], — ср. п. VI. 3.1. Свободная Φ-алгебра [с единицей] с системой свободных порождающих X изоморфна полугрупповой алгебре ΦG, где G — свободная полугруппа [свободный моноид] с системой свободных порождающих X. Если при этом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то свободная коммутативная Φ-алгебра с единицей [свободная коммутативная Φ-алгебра] с системой свободных порождающих X изоморфна кольцу многочленов $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$ [без свободного члена]. Элементы свободной полугруппы [свободного моноида] G часто называют *одночленами*. *Полистепенью* одночлена $w = w(x_1, \ldots, x_m)$ назовем строку $(k_1, \ldots, k_m)$, где

---

*) Автор благодарен В. Н. Латышеву за помощь при написании настоящего пункта.

k_i — число вхождений элемента x_i в этот одночлен. Линейная комбинация одночленов одинаковой полистепени называется *полиоднородным многочленом*. Полиоднородный многочлен степени $(1, 1, \ldots, 1)$ называется *полилинейным*. Линейная комбинация одночленов, каждый из которых содержит все элементы фиксированного подмножества $X' \subseteq X$, называется *нормальным*. Каждый элемент из F можно представить как сумму однородных многочленов.

Каждая Ф-алгебра [с единицей] изоморфна факторалгебре F/K, где F — подходящая свободная Ф-алгебра [с единицей]. Более того, если алгебра порождается множеством X, то в качестве F можно взять свободную Ф-алгебру с системой свободных порождающих X. Таким образом, каждая Ф-алгебра A определяется множеством X и идеалом K. Если идеал K порождается множеством $\{f_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$, то говорят, что это множество является *системой определяющих соотношений алгебры A в системе порождающих X*. Следовательно, любую Ф-алгебру можно задать, указав систему порождающих и систему определяющих соотношений.

Определим несколько важных алгебр над полем Ф (напомним, что $[a, b] = ab - ba$):

Название	Обозначение	Система порождающих	Система определяющих соотношений
Алгебра Вейля или алгебра дифференциальных операторов	$A_n(\Phi)$	$x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$	$[x_i, y_j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$ $[y_i, y_j] = [x_i, x_j] = 0$
Алгебра Грассмана или внешняя алгебра	G_n	$x_1, \ldots, x_n$	$x_i^2 = 0$, $x_i x_j + x_j x_i = 0$
Алгебра Клиффорда квадратичной формы	$C(n, f)$	$e_1, \ldots, e_n$	$e_i e_j + e_j e_i - 2a_{ij} = 0$, где $f = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, причем $a_{ij} = a_{ji}$

Алгебра Вейля является нётеровой справа и слева областью целостности, а в случае, когда Φ — поле нулевой характеристики, еще и простой. В качестве базы алгебры Вейля можно выбрать множество

$$\left\{x_{i_1} \ldots x_{i_k} y_{j_1} \ldots y_{j_l} \,\middle|\, i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k,\ j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_l\right\}.$$

Элементы алгебры Вейля можно рассматривать и как линейные дифференциальные операторы

$$\sum_{\substack{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \\ j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_l}} a_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \partial^{j_1 \ldots j_l}$$
$$\left(a_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \in \Phi\left[x_1, \ldots, x_n\right]\right),$$

где $\partial^{j_1 \ldots j_l} = \dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{j_l}}$, действующие в алгебре многочленов $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$.

Базой алгебры Грассмана может служить множество

$$\left\{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \,\middle|\, i_1 < \ldots < i_k\right\}.$$

Умножение в G_n часто обозначается знаком $\wedge$. Если $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \in G_n$, то

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \det(a_{ij}) \cdot (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n).$$

Рассматривается и *бесконечная алгебра Грассмана* G_∞, определяемая порождающими $x_1, x_2, \ldots$ и теми же соотношениями, что обычная алгебра Грассмана. В алгебре G_∞ справедливо тождество $[[x, y], z] = 0$.

При рассмотрении алгебры Клиффорда обычно предполагается, что характеристика поля Φ отлична от 2. В качестве базы алгебры Клиффорда можно выбрать множество

$$\left\{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \,\middle|\, i_1 < \ldots < i_k\right\}.$$

Если $f = 0$, то $C(n, f) = G_n$ (см. [16], пп. 1.14—1.17; [208], п. 1.3.5).

Рассматривается и *обобщенная алгебра Вейля* $A_n(R)$, где R — произвольное кольцо. Она порождается множеством $R \cup \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, причем умножение для элементов из R остается прежним, $[x_i, r] = 0 = [y_j, r]$ для всех $r \in R$ и выполнены

соотношения, определяющие обычную алгебру Вейля. Если R нётерово справа или является областью целостности, то $A_n(R)$ обладает тем же свойством. Если R — тело характеристики 0, то кольцо $A_n(R)$ просто ([208], п. 1.3.8).

О свободных кольцах и алгебрах см. также [7], [49], [128]—[131]. Кольцам, определяемым порождающими и определяющими соотношениями посвящена монография [189]. Совокупность M счетных сумм однородных многочленов образует Ф-алгебру, которая называется *алгеброй Магнуса*. Множество $H = \{1 + f \mid f \in M, f$ не имеет свободного члена$\}$ оказывается группой, называемой *группой Магнуса*. Ее подгруппа $\{1 + x \mid x \in X\}$ оказывается свободной группой ([7], п. 4.2).

Если F — свободная алгебра над коммутативным кольцом Ф с единицей и с системой свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots$ и $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, то говорят, что Ф-алгебра A *удовлетворяет полиномиальному тождеству* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или что в алгебре A *выполняется* это *тождество*, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Укажем некоторые из наиболее важных тождеств: 1) *тождество коммутативности* —

$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0;$$

2) *стандартное тождество степени n* —

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\sigma (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} = 0,$$

где σ пробегает все подстановки на множестве $\{1, \ldots, n\}$, $(-1)^\sigma = 1$ или -1 для четной или нечетной подстановки соответственно; 3) *тождество Капелли степени n* —

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \sum_\sigma (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \ldots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1} = 0,$$

где σ — имеет тот же смысл, что и выше.

Если Ф — коммутативная алгебра над полем, то $M_n(\Phi)$ удовлетворяет стандартному тождеству $S_{2n}=0$ (см. [230], с. 175 теорема 1.9, [76], с. 500; [96], с. 148). Полупервичная алгебра над полем удовлетворяет некоторому тождеству степени n тогда и только

тогда, когда она удовлетворяет тождеству $S_n = 0$ (см. [230], с. 250, теорема 4.1). Если алгебра над полем удовлетворяет некоторому тождеству степени n, то для подходящего m она удовлетворяет тождеству $(S_n(x_1, \ldots, x_n))^m = 0$ (см. [230], с. 251, теорема 4.3).

Дополненная нулем совокупность левых частей всех тождеств, которым удовлетворяет фиксированная Ф-алгебра A, образует вполне характеристический двусторонний идеал свободной Ф-алгебры F, который называется *идеалом тождеств* или *T-идеалом* алгебры A. Каждый вполне характеристический идеал T алгебры F является идеалом тождеств факторалгебры F/T. Односторонний идеал свободной Ф-алгебры F оказывается T-идеалом (разумеется, двусторонним) тогда и только тогда, когда он замкнут относительно всех дифференцирований алгебры F (В. Н. Латышев).

Обозначим через $V_n(\Phi)$ идеал тождеств алгебры $M_n(\Phi)$. Если Φ — поле характеристики 0, то для любого T-идеала T найдется такой номер n, что $x \in T$ в том и только том случае, когда $x = u^{m(x)}$ для некоторого $u \in V_n(\Phi)$. Если T — некоторый идеал тождеств, то факторкольцо F/T не содержит делителей нуля тогда и только тогда, когда $T = V_n(\Phi)$ для некоторого n.

Тождество $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется *полиоднородным*, *полилинейным* или *нормальным*, если таковым является его левая часть. Системы тождеств

$$\mathfrak{S} = \{f_\iota(x_1, \ldots, x_{m_\iota}) = 0 \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$$

и

$$\mathfrak{T} = \{g_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n_\varkappa}) = 0 \mid \varkappa \in \mathfrak{K}\}$$

называются *равносильными*, если выполнение в некоторой алгебре всех тождеств одной из этих систем влечет выполнение в этой алгебр всех тождеств второй системы. Это равносильно тому, что наименьшие T-идеалы, содержащие, соответственно, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$, совпадают. Каждая система тождеств равносильна некоторой системе нормальных тождеств. Если Φ — бесконечное поле, то любая система тождеств равносильна системе полиоднородных тождеств. Если же Φ — поле характеристики 0, то каждое тождество равносильно полилинейному ([7], п. 3.1).

Алгебра, удовлетворяющая какому-либо тождеству, называется PI-*алгеброй*. Очевидно, к числу PI-алгебр относятся все коммутативные алгебры. Более того, выяснилось, что для PI-алгебр остаются справедливыми многие свойства коммутативных алгебр или хотя бы свойства, близкие к ним. Отметим, что упорядоченные PI-алгебры и PI-алгебры, изоморфные подалгебрам свободной алгебры, коммутативны. Тензорное произведение двух PI-алгебр оказывается PI-алгеброй. Если кольцо является конечно порожденным модулем над коммутативным кольцом, то оно также оказывается PI-кольцом. К числу PI-алгебр относится и всякая алгебраическая алгебра ограниченной степени над полем.

Во всякой PI-алгебре A над полем Φ, порожденной элементами $a_1, \ldots, a_n$, выполняется *условие ограниченности высот* (*теорема Ширшова о высоте*): существуют слова $v_1, \ldots, v_m$ в алфавите $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots \ldots, a_n\}$ и натуральное число h такие, что всякое слово u в алфавите $\mathfrak{a}$ представляется в виде линейной комбинации слов $v_{i_1}^{r_1} \ldots v_{i_d}^{r_d}$, где $d \leqslant h$, а каждое из слов v_{i_k} содержит лишь буквы, входящие в u. Всякий одночлен в алфавите $v_1, v_2, \ldots$ и слово u содержат одни и те же буквы в алфавите $\mathfrak{a}$. В коммутативном случае в качестве слов v_i можно взять сами буквы a_i (см. [37], с. 128). Отсюда вытекает, что всякая конечно порожденная алгебраическая PI-алгебра над полем конечномерна, а конечно порожденная ниль-PI-алгебра нильпотентна. Любая Φ-алгебра с тождеством $x^n = 0$ локально нильпотентна. Если Φ — поле, характеристика которого равна 0 или превышает n, то все Φ-алгебры, удовлетворяющие тождеству $x^n = 0$, нильпотентны, причем индекс нильпотентности не превышает $2^n - 1$ (*теорема Нагаты—Хигмана* — см. [37], с. 129, следствия 1 и 2; с. 153, следствие 1; [96], теоремы 6.4.3 и 6.4.4). Ю. П. Размыслов понизил эту границу до n^2 (см. [79], теорема 33.1).

Примитивная алгебра A над полем, удовлетворяющая тождеству степени d, изоморфна алгебре $M_n(D)$, где D — тело, причем размерность алгебры A над центром $\mathfrak{Z}(D)$ тела D не превосходит целой части от $(d/2)^2$. Отсюда вытекает, что любая PI-алгебра A над полем Φ с нулевым радикалом Джекобсона представ-

ляется как подпрямое произведение матриц над телами, причем как размерность матриц, так и размерности тел над их центрами ограничены в совокупности. Кроме того, идеал тождеств алгебры A совпадает с $V_n(\Phi)$ для некоторого n ([76], с. 510; [96], теорема 6.3.1; [13], ч. 2, с. 44—45).

Любой ненулевой двусторонний идеал полупервичной PI-алгебры над полем имеет ненулевое пересечение с ее центром, что в частности, указывает на нетривиальность центра такой алгебры ([230], с. 211, теорема 4.9). Первичная PI-алгебра A над полем обладает правым классическим кольцом частных Q относительно своего центра $\mathfrak{Z}(A)$. При этом Q изоморфна алгебре матриц над телом D, имеющим конечную размерность над своим центром, $Q = A \otimes \mathfrak{Z}(D)$, а идеалы тождеств алгебр A и Q совпадают ([13], ч. 2, с. 48, теорема 3).

Верхний ниль-радикал конечно порожденной PI-алгебры над нётеровым кольцом оказывается нильпотентным (Braun A.//J. Algebra. — 1984. — V. 89, № 2. — P. 375—396; Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порожденной PI-алгебры. Препринт № 63. — Ин-т мат. СО АН СССР, Новосибирск, 1984). Если P — первичный идеал наследственного справа PI-кольца R, то R/P — наследственное справа нётерово справа и слева кольцо (Armendariz E. P., Hajarnavis C. R.//J. Algebra. — 1988. — V. 116, № 2. — P. 502—505).

Групповая алгебра ΦG над полем характеристики 0 оказывается PI-алгеброй в том и только том случае, когда группа G содержит абелеву подгруппу конечного индекса. В случае поля характеристики p необходимо и достаточно, чтобы G содержала подгруппу конечного индекса, коммутант которой является конечной p-группой ([12], с. 28, теорема 25; [230], с. 196, следствие 3.8, с. 197, следствие 3.10).

Всякая PI-алгебра над полем, не содержащая ненулевых ниль-идеалов, вкладывается в алгебру матриц над коммутативным кольцом (даже над прямым произведением полей) и, в частности, удовлетворяет некоторому стандартному тождеству. Все алгебры многообразия $\mathfrak{V}$ алгебр над полем характеристики 0 вложимы в алгебры матриц над коммутативными кольцами тогда и только тогда, когда для всех

алгебр из $\mathfrak{V}$ справедливы тождества $[x_1, y_1] \ldots [x_n, y_n] = 0$ и $[x_1, \ldots, x_n] y_1 \ldots y_n [z_1, \ldots, z_n] = 0$, где $[a, b] = ab - ba$ и $[a_1, \ldots, a_{i+1}] = [[a_1, \ldots, a_i], a_{i+1}]$ (см. [96], теорема 6.3.2; [14], с. 105, теорема 9, с. 104, теорема 8).

В некоторых случаях алгебра оказывается PI-алгеброй, если некоторое полиномиальное тождество выполняется на какой-либо из ее подалгебр. Например, если G — конечная подгруппа группы автоморфизмов алгебры A над полем характеристики 0 и $\{x \mid x \in A, g(x) = x$ для всех $g \in G\}$ оказывается PI-алгеброй, то и сама A является PI-алгеброй ([93], с. 77, теорема 12). В качестве примера противоположной ситуации приведем такой результат: если A — подалгебра простой алгебры B, конечномерной над своим центром $\mathfrak{Z}(B)$ и идеалы тождеств алгебр A и B, рассматриваемых как алгебры над простым подполем поля $\mathfrak{Z}(B)$, совпадают, то $A = B$ (см. [96], теорема 6.3.3).

Тождествам посвящены обзор [7] и монографии [79], [176], [239], [248]. История исследования PI-алгебр рассмотрена в [101].

Элемент f свободной алгебры без единицы над полем Φ называется *центральным полиномом ранга n*, если $f(A) \in \mathfrak{Z}(M_n(\Phi)) = \{\lambda E \mid \lambda \in \Phi, E$ — единичная матрица$\}$ для любой $A \in M_n(\Phi)$ и $f(A_0) \neq 0$ для некоторой матрицы $A_0 \in M_n(\Phi)$. Центральные полиномы любого ранга n существуют для любого поля Φ. Центральным полиномом ранга 2 служит $f = xy - yz$ (см. [13], с. 45, с. 47, теорема 2; [76], с. 505, 506, 508—509). Детальное рассмотрение результатов, связанных с центральными полиномами можно найти в [248], Appendix A. См. также [7], п. 5.4.

Класс всех Φ-алгебр, удовлетворяющих некоторой системе тождеств, называется *многообразием*. Класс $\mathfrak{K}$ оказывается многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подалгебр, факторалгебр и прямых произведений. Алгебры из многообразия $\mathfrak{V}$ часто называют *$\mathfrak{V}$-алгебрами*. Алгебра G называется *свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{V}$ с системой свободных порождающих X*, если $G \in \mathfrak{V}$, X порождает G и для любого отображения φ множества X в любую алгебру A из $\mathfrak{V}$ найдется такой гомоморфизм ψ: $G \to A$, что $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in X$. Если F — свободная Φ-алгебра, многообразие $\mathfrak{V}$ определяется системой

тождеств $\mathfrak{T}$ и $T(\mathfrak{V})$ — наименьший T-идеал, содержащий все левые части тождеств из $\mathfrak{T}$, то $F/T(\mathfrak{V})$ оказывается свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{V}$. Всякая $\mathfrak{V}$-алгебра является гомоморфным образом подходящей свободной $\mathfrak{V}$-алгебры. Радикал Джекобсона любой свободной $\mathfrak{V}$-алгебры оказывается T-идеалом и совпадает с ее ниль-радикалом. Среди свойств $\mathfrak{V}$-свободной алгебры F над бесконечным полем отметим: 1) $\bigcap\limits_{1 \leqslant n < \infty} F^n = \{0\}$; 2) F аппроксимируется конечномерными нильпотентными алгебрами; 3) F хопфова ([248], пп. 2.4.3, 2.4.7; [7], п. 3.2).

Если $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие Φ-алгебр и G — свободная $\mathfrak{V}$-алгебра со счетным множеством свободных порождающих, то в качестве системы тождеств, определяющих многообразие $\mathfrak{V}$, можно взять любой набор Ξ элементов из свободной Φ-алгебры, порождающий ядро гомоморфизма F на G как T-идеал. Если набор Ξ может быть выбран конечным, то говорят, что $\mathfrak{V}$ *обладает конечным базисом тождеств* ([76], § 20.1). Оказывается, что конечным базисом тождеств обладает любое многообразие алгебр над полем характеристики 0 (Кемер А. Р.//Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 597—641). Для любого многообразия $\mathfrak{V}$ алгебр над коммутативным кольцом Φ характеристики 0 найдется такой номер n, что $M_n(\Phi) \in \mathfrak{V}$, но $M_{n+1}(\Phi) \notin \mathfrak{V}$ ([76], § 20.4).

Про наименьшее многообразие, содержащее данный класс Φ-алгебр, говорят, что оно *порождается этим классом.* В частности, можно говорить о многообразии, порожденном одной алгеброй A и обозначаемом как $\operatorname{Var} A$. Если алгебра A конечна, то многообразие $\operatorname{Var} A$ *конечно базируемо*, т. е. обладает конечным базисом тождеств (Львов И. В.//Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 3. — С. 269—297; Kruse R.// J. Algebra. — 1973. — V. 26, № 2. — P. 298—318). Базис тождеств многообразия $\operatorname{Var} A$ обычно называют *базисом тождеств алгебры A*. Например, базис тождеств алгебры $M_n(\Phi)$, где Φ — поле, состоит из $[[x, y]^2, z] = 0$ и стандартного тождества $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, а базис тождеств алгебры $T_n(\Phi)$ верхних треугольных матриц порядка n над произвольным полем Φ — из одного тождества $[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$ (см. [7], пп. 1.3, 5.3). Если A и B — простые конечно-

мерные алгебры над алгебраически замкнутым полем, то $\mathrm{Var}\, A = \mathrm{Var}\, B$ влечет $A \simeq B$ (см. [7], п. 5.4).

Алгебра A называется *критической*, если она не принадлежит многообразию $\mathrm{Var}(A_-)$, порожденному всеми факторалгебрами ее подалгебр, не изоморфными самой алгебре A. Всякая критическая алгебра подпрямо неразложима. Если A — критическая алгебра, то критической является и алгебра матриц над ней. Если A и B — критические алгебры и $\mathrm{Var}\, A = \mathrm{Var}\, B$, то $\mathrm{Var}(A\ \ ) = \mathrm{Var}(B\ \ )$ (см. [7], п. 4.3).

Если $\mathfrak{B}$ — многообразие алгебр над полем Ф характеристики 0, не совпадающее с многообразием всех Ф-алгебр, то в любой алгебре из $\mathfrak{B}$ выполняются все тождества алгебры $M_n(G)$ при подходящем n, где G — алгебра Грассмана (К е м е р А. Р.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042—1059). Для многообразия $\mathfrak{B}$ алгебр над бесконечным полем Ф эквивалентны следующие условия: (1) все конечно порожденные алгебры из $\mathfrak{B}$ представимы; (2) все конечно порожденные алгебры из $\mathfrak{B}$ финитно аппроксимируемы; (3) все конечно порожденные алгебры из $\mathfrak{B}$ хопфовы, т. е. всякий их сюръективный эндоморфизм оказывается автоморфизмом; (4) все конечно порожденные алгебры из $\mathfrak{B}$ удовлетворяют условию максимальности для двусторонних идеалов; (5) каждая конечно порожденная алгебра из $\mathfrak{B}$ удовлетворяет тождеству

$$[x_1, \ldots, x_n]\, y_1 \ldots y_n\, [x_1, \ldots, x_n] = 0,$$

где $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$; (6) в любой алгебре из $\mathfrak{B}$ справедливо тождество

$$[x, y, y, \ldots, y]\, y^n\, [x, y, \ldots, y] = 0;$$

(7) в любой алгебре из $\mathfrak{B}$ выполнено тождество вида

$$xy^nx = \sum_{i+j>0} \alpha_{ij} y^i x y^{n-i-j} x y^j \qquad (\alpha_{ij} \in \Phi);$$

(8) $\mathfrak{B}$ не содержит многообразия, определяемого тождеством $x[y, z]t = 0$. Если в многообразии $\mathfrak{B}$ алгебр над произвольным полем Ф выполнены тождества вида

$$[x_1, y_1] \ldots [x_n, y_n] = 0$$

и

$$[x_1, \ldots, x_n]\, y_1 \ldots y_n\, [z_1, \ldots, z_n] = 0,$$

то все алгебры из $\mathfrak{V}$ представимы. Если Φ — поле характеристики 0, то верно и обратное ([64], с. 98—116; [16], п. 4.9). Со свободными кольцами многообразий (иногда их называют *относительно свободными алгебрами*) связана некоммутативная теория инвариантов (см. [148]). В обзоре [146] обсуждается, когда кольцо инвариантов свободной $\mathfrak{V}$-алгебры относительно некоторой ее группы автоморфизмов конечно порождено или является относительно свободной алгеброй.

Очевидным образом определяется *пересечение многообразий*. *Объединением многообразий* считается многообразие, порожденное их теоретико-множественным объединением. Относительно этих операций совокупность всех многообразий Φ-алгебр образует полную модулярную решетку. Атомами этой решетки при $\Phi = \mathbf{Z}$ служат многообразия, задаваемые тождествами $px = 0$ и $xy = 0$ или $px = 0$ и $x^p = x$, где p — некоторое простое число. При $p = 2$ получаем многообразие булевых колец. Если $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие Φ-алгебр, то через $\mathfrak{L}(\mathfrak{V})$ обозначим подрешетку решетки всех многообразий, состоящую из всех многообразий, принадлежащих $\mathfrak{V}$. Решетка $\mathfrak{L}(\mathfrak{V})$ антиизоморфна решетке T-идеалов свободной $\mathfrak{V}$-алгебры. Многообразия с дистрибутивной решеткой $\mathfrak{L}(\mathfrak{V})$ — это многообразия с ненулевым тождеством вида $\alpha y[x, y] + \beta[x, y]y = 0$ для некоторых $\alpha, \beta \in \Phi$ (см. [7], п. 2.3). Если $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$, то класс алгебр $A \in \mathfrak{M}$ таких, что для некоторого идеала $I \lhd A$ имеем $I \in \mathfrak{V}$ и $A/I \in \mathfrak{W}$, оказывается подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}$, которое называется *произведением многообразий* $\mathfrak{V}$ *и* $\mathfrak{W}$ *внутри* $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\mathfrak{V} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{W}$ (см. [16], п. 5.4).

Пусть X — счетное множество. Рассмотрим символ $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)$, полученный из $x_1, \ldots, x_n \in X$ с помощью операций $+$, $-$, $\cdot$ и $^{-1}$. Говорят, что тело D *удовлетворяет рациональному тождеству* $\mathcal{R} = 0$, если для любых $d_1, \ldots, d_n \in D$ элемент $(d_1, \ldots, d_n)$ либо равен 0, либо не определен, т. е. на некотором шаге вычисления мы получаем 0^{-1}. Рациональное тождество называется *тривиальным*, если ему удовлетворяет любое тело. Примером такого тождества может служить

$$x - \left(x^{-1} - (y^{-1} - x)^{-1}\right)^{-1} - xyx = 0.$$

Нетривиальному тождеству

$$[[x, [y, x]\, x\, [y, x]^{-1}]^3, z] = 0$$

удовлетворяют тела, являющиеся алгебраической алгеброй степени 3 над своим центром. Если $(x_1, \ldots \ldots, x_n) = 0$ — нетривиальное рациональное тождество, то найдется такое натуральное число m, что для любого тела D с бесконечным центром $\mathfrak{Z}(D)$, удовлетворяющего этому тождеству, имеем $\dim_{\mathfrak{Z}(D)} D \leqslant m$ (см. [248], теорема 3.2.21, [16], п. 5.4).

Пусть $F = \Phi\langle x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots\rangle$ — свободная алгебра над полем Φ со свободными порождающими x_i и y_i, где $i, j = 1, 2, \ldots$. Если $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in F$, то говорят, что Φ-алгебра $R = M_r(\Phi)$ *удовлетворяет тождеству* $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$ *со следом*, если для любых матриц $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ из R имеет место

$$f(A_1, \ldots, A_m, \operatorname{Tr}(B_1)E, \ldots, \operatorname{Tr}(B_n)E) = 0,$$

где $\operatorname{Tr}(X)$ — след матрицы X. Любое тождество со следом, которому удовлетворяет алгебра R, является логическим следствием аксиом Φ-алгебры и тождества со следом

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^k g_k(\operatorname{Tr}(y), \ldots, \operatorname{Tr}(y^r))\, y^{r-k} = 0,$$

где $g_k(t_1, \ldots, t_r)$ — такой многочлен, что

$$g_k(z_1 + \ldots + z_r, z_1^2 + \ldots + z_r^2, \ldots, z_1^r + \ldots + z_r^r)$$

совпадает с элементарным симметрическим многочленом σ_k от $z_1, \ldots, z_r$. Заметим, что последнее тождество вытекает из известной теоремы Гамильтона—Кэли, утверждающей, что каждая матрица является корнем своего характеристического многочлена ([79], теорема 27.1).

О некоторых других обобщенных тождествах см. § 5.

Естественным обобщением PI-колец служат кольца, удовлетворяющие $\forall\exists$-предложениям (см. [248], Appendix B).

2.8. Вложение колец, кольца частных. При исследовании колец нередко оказывается полезным вло-

жить рассматриваемое кольцо в кольцо, обладающее теми или иными дополнительными свойствами. В первую очередь остановимся на вложении колец в тела. Разумеется, вкладываемое кольцо должно быть кольцом без делителей нуля. В коммутативном случае это условие оказывается и достаточным: всякое коммутативное кольцо без делителей нуля вкладывается в поле ([88], с. 96, теорема 8). Однако существуют кольца без делителей нуля, не вложимые в тело ([87], с. 88, теорема 1). Более того, существуют такие кольца, не вложимые в тело, что их мультипликативная полугруппа ненулевых элементов вложима в группу ([14], с. 93, теорема 1). Далее, назовем кольцо R *обратимым*, если для каждого ненулевого $a \in R$ найдется кольцо, содержащее R в качестве подкольца с той же самой единицей, в котором элемент a обратим. Обратимым оказывается всякое кольцо R с единицей, все правые [левые] идеалы которого, порожденные двумя элементами, свободны как правые [левые] R-модули. Этот результат позволяет установить существование обратимых колец, не вложимых в тело ([14], с. 95, теоремы 4 и 5).

Если S — *мультипликативно замкнутое подмножество* неделителей нуля кольца R (т. е. $x, y \in S$ влечет $xy \in S$), то кольцо Q называется *правым* [*левым*] *кольцом частных кольца R относительно S*, если R — подкольцо в Q, каждый элемент из S обратим в Q и для каждого $a \in Q$ найдутся такие $r \in R$ и $s \in S$, что $a = rs^{-1}$ [$a = s^{-1}r$]. Для существования такого кольца Q необходимо и достаточно выполнение *правого* [*левого*] *условия Оре*: если $r \in R$ и $s \in S$, то $rs' = sr'$ [$s'r = r's$] для подходящих $r' \in R$ и $s' \in S$. Если S совпадает с множеством всех неделителей нуля кольца R, то соответствующее правое [левое] кольцо частных называется *классическим правым* [*левым*] *кольцом частных кольца R*. Если кольцо Q является классическим правым [левым] кольцом частных кольца R, то говорят также, что R является правым [левым] порядком в кольце Q. Артиновым справа классическим правым кольцом частных обладает любое нётерово справа наследственное справа кольцо ([90], пп. 9.1, 16.9; [96], теорема 7; [57], § 4.6; [208] п. 5.4.2).

Если кольцо R не содержит делителей нуля и обладает классическим правым [левым] кольцом част-

ных, то последнее оказывается телом. Таким образом, для вложимости кольца R без делителей нуля в тело достаточно, чтобы для любых $a, b \in R$, где $b \neq 0$, существовали такие $u, v \in R$, что $0 \neq au = bv$ $[0 \neq \neq ua = vb]$. В частности, таким телом частных обладают любое PI-кольцо без делителей нуля и любая групповая алгебра ΦG, где Φ поле, а G — нильпотентная группа без кручения ([7], гл. 2, п. 1.1; [16], п. 5.2). В тело вкладываются также групповые алгебры упорядоченных групп, групповые алгебры групп без кручения с одним соотношением, кольца R, все конечно порожденные правые [левые] идеалы которых свободны как правые [левые] R-модули и, в частности, свободные ассоциативные алгебры ([14], с. 89, теорема 2, с. 99, теорема 7, с. 97, следствие 5). Известен критерий вложимости кольца R в тело, связанный с рассмотрением матриц над R (см. [49], с. 349). О гомоморфизмах в тело см. [14], § 3.

Кольцо R с единицей обладает классическим правым кольцом частных, являющимся классически полупростым [артиновым справа простым] кольцом, тогда и только тогда, когда R — полупервичное [первичное] правое кольцо Голди — *теорема Голди* ([90], пп. 9.13, 10.14; [96], теоремы 7.2.1—7.2.3). О существовании классического правого кольца частных, являющегося полулокальным кольцом см. [90], п. 18.47.

Любая алгебра над полем вложима в простую алгебру. Если исходная алгебра является алгеброй без делителей нуля, то и простая алгебра может быть выбрана такой же ([14], с. 103, теоремы 1 и 2).

Кольцо Q называется *обобщенным правым [левым] кольцом частных кольца R относительно мультипликативно замкнутой системы S* ненулевых элементов из R (подчеркнем, что S может содержать делители нуля), если существует гомоморфизм φ кольца R в Q, обладающий следующими свойствами: 1) если $r \in R$ и $\varphi(r) = 0$, то $rs = 0$ $[sr = 0]$ для некоторого $s \in S$; 2) если $s \in S$, то $\varphi(s)$ обратим в Q; 3) если $a \in Q$, то $a = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ $[a = \varphi(s)^{-1}\varphi(r)]$ для подходящих $r \in R$ и $s \in S$. Для существования обобщенного правого кольца частных необходимо и достаточно, чтобы для R и S выполнялось левое условие Оре и равенство $sr = 0$, где $s \in S$ и $r \in R$, влекло за собой $rs' = 0$ для некоторого $s' \in S$ ([90], п. 16.9).

Более детальные сведения о классических и обобщенных кольцах частных можно найти в обзоре [35]. Отметим также обзор [129], где, в частности, рассматривается аналог поля рациональных функций для свободной ассоциативной алгебры над полем.

Для обобщенного правого кольца частных Q кольца R относительно мультипликативно замкнутой системы S весьма полезна *конструкция Герасимова.* Именно, пусть $\mathcal{M}$ — множество квадратных матриц вида $a=\begin{pmatrix} a' & \tilde{a} \\ a^0 & 'a \end{pmatrix}$ над кольцом R, где a' — строка, $'a$ — столбец, $\tilde{a}\in R$, a^0 — верхняя треугольная матрица с элементами из S по диагонали (случай $a=(\tilde{a})$ не исключается). Матрицы a и b из $\mathcal{M}$ будем считать эквивалентными (в обозначениях: $a\sim b$), если от a к b можно перейти с помощью конечного числа следующих преобразований: 1) прибавление к стоке [столбцу] строки [столбца] с большим [меньшим] номером, умноженной слева [справа] на элемент из R; 2) вычеркивание строки [столбца], проходящей [проходящего] через матрицу a^0, все элементы которой [которого] нули, за исключением стоящего на диагонали матрицы a^0, с одновременным вычеркиванием столбца [строки], проходящего [проходящей] через этот же диагональный элемент матрицы a^0. На множестве $\mathcal{M}$ определим операции $\oplus$ и $\odot$, положив

$$a\oplus b=\begin{pmatrix} a' & b' & \tilde{a}+\tilde{b} \\ a^0 & 0 & 'a \\ 0 & b^0 & 'b \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a\odot b=\begin{pmatrix} a' & \tilde{a}b' & \tilde{a}\tilde{b} \\ a^0 & 'ab' & 'a\tilde{b} \\ 0 & b^0 & 'b \end{pmatrix}.$$

Если $a\sim c$ и $b\sim d$, то $a\oplus b\sim c\oplus d$ и $a\odot b\sim c\odot d$. Поэтому эти операции корректно определены на фактормножестве $M=\mathcal{M}/\sim$. Множество M превращается в кольцо, изоморфное Q. При этом изоморфизме элементы $r\in R$ переходят в (r), а элементы s^{-1}, где $s\in S$, — в $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$. Ядро гомоморфизма кольца R в Q состоит из всех таких $r\in R$, дл. которых существуют матрицы $u=\begin{pmatrix} u' & u'' \\ u^0 & u_1 \end{pmatrix}$ и $v=\begin{pmatrix} v_1 & 'v \\ v^0 & ''v \end{pmatrix}$, где u^0, v^0 — верхние треугольные матрицы с элементами из S на диагонали, u', u'' — строки, v', v'' — столбцы и $uv=\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (см. [14], п. 3.3; [16], п. 5.3).

Если $\mathfrak{t}$ — кручение на классе всех правых R-модулей и $\mathcal{E}$ — его радикальный фильтр (см. п. 3.5), то положим

$$R_{\mathcal{E}} = \lim_{I \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}_R(I,\ R/\mathfrak{t}(R)).$$

Если $a,\ b \in R_{\mathcal{E}}$, то можно считать, что $a \in \mathrm{Hom}_R(I,\ R/\mathfrak{t}(R))$ и $b \in \mathrm{Hom}_R(J,\ R/\mathfrak{t}(R))$, где $I,\ J \in \mathcal{E}$. Заметим, что любой гомоморфизм $a\colon I \to R/\mathfrak{t}(R)$ можно представить в виде произведения естественного отображения $I \to I/\mathfrak{t}(I)$ и гомоморфизма $\bar{a}\colon I/\mathfrak{t}(I) \to R/\mathfrak{t}(R)$. Определим гомоморфизм $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(I/\mathfrak{t}(I),\ R/\mathfrak{t}(R))$, положив $\sigma(x + \mathfrak{t}(I)) = x + \mathfrak{t}(R)$ для всех $x \in I$. Таким образом, получаем диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[r, "a"] \arrow[d] & R/\mathfrak{t}(R) \\
J' \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[d] & I/\mathfrak{t}(I) \arrow[ur, "\bar{a}"'] \arrow[d, "\sigma"] & \\
J \arrow[r, "b"'] & R/\mathfrak{t}(R) &
\end{tikzcd}$$

Если теперь $J' = \{x \mid x \in J,\ b(x) \in \mathrm{Im}\,\sigma\}$, то $J' \in \mathcal{E}$ и для любого $x \in J'$ можно положить $ab(x) = \bar{a}(\bar{b}(x))$, где $\bar{b}$ — ограничение гомоморфизма b на J'. Ясно, что $ab \in \mathrm{Hom}_R(J',\ R/\mathfrak{t}(R))$. Оказывается, что при таком определении умножения $R_{\mathcal{E}}$ становится кольцом, которое называется *кольцом частных кольца R относительно кручения* $\mathfrak{t}$. Если для любых $r,\ x \in R$ положить $\Phi(r)(x) = rx + \mathfrak{t}(R)$, то $\Phi(r) \in \mathrm{Hom}_R(R, R/\mathfrak{t}(R))$ и Φ оказывается гомоморфизмом кольца R в $R_{\mathcal{E}}$. Если $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_W$, где W — инъективный эндоциклический правый R-модуль, то $R_{\mathcal{E}}$ изоморфно кольцу $\mathrm{End}_{\mathrm{End}\, W} W$ (заметим, что такой модуль W существует для любого кручения). Естественный гомоморфизм кольца R в $R_{\mathcal{E}}$ оказывается локализацией правого R-модуля R относительно кручения $\mathfrak{t}$. Этот гомоморфизм является вложением, если W — точный модуль ([47], § II.2—II.4). О локализации нётеровых колец см. [181].

Если $\mathfrak{t}$ — кручение Ламбека, то в качестве W можно взять инъективную оболочку кольца R, рас-

сматриваемого как правый R-модуль. Кольцо частных $Q_{\max}(R)$ относительно этого кручения называется *максимальным* или *полным правым кольцом частных* кольца R. Если R антисингулярно как правый R-модуль, то R является подкольцом своего максимального правого кольца частных $Q_{\max}(R)$, которое в этом случае оказывается регулярным и самоинъективным справа кольцом. Кроме того, $Q_{\max}(R)$ оказывается инъективной оболочкой правого R-модуля R, а радикальный фильтр кручения Ламбека состоит из всех существенных правых идеалов кольца R. Если R — полупервичное правое кольцо Голди, то $Q_{\max}(R)$ совпадает с классическим правым кольцом частных кольца R (см. [90], пп. 16.12, 16.14; [57], § 4.3).

С понятием максимального кольца частных тесно связана конструкция ортогонального пополнения полупервичного кольца. *Ортогональным пополнением полупервичного кольца* A с полным правым кольцом частных $Q_{\max}(R)$ называется такое наименьшее подмножество $O(R)$ кольца $Q_{\max}(R)$, что для любого семейства попарно ортогональных центральных идемпотентов $\{e_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и любого семейства $\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq A$ существует элемент $a \in O(R)$ такой, что $e_\gamma a = e_\gamma a_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Кольцо $O(R)$ оказывается полупервичным. Если $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал центра C мартиндейловского кольца частных полупервичного кольца R, то факторкольцо $O(R)/\mathfrak{m}O(R)$ первично. Более того, если формулировка некоторой теоремы записана в виде хорновской формулы и множество идеалов, в которых верна эта теорема, всюду плотно в спектре кольца C, то эта теорема справедлива и в $O(R)$. Конструкция ортогонального пополнения оказывается полезной при переносе результатов о строении первичных колец на полупервичные кольца (см. [10], § 8).

О гомоморфизмах колец в полупростые алгебры см. [251].

Назовем Ф-алгебру R *представимой*, если для подходящего n она вложима в алгебру $M_n(C)$, где C — коммутативное кольцо. Если Ф — поле, то каждая конечно порожденная представимая алгебра финитно аппроксимируема. Если поле бесконечно, то размерности аппроксимирующих алгебр могут быть выбраны ограниченными в совокупности. Для любого поля Ф Ф-алгебра, аппроксимируемая алгебрами, размерности

которых ограничены в совокупности, представима ([64], с. 98—116; [16], п. 49).

Если R — полупервичное кольцо и $\mathfrak{f}$ — совокупность всех двусторонних идеалов кольца, аннуляторы которых равны нулю или, что то же самое, являющихся существенными подмодулями левого [правого] R-модуля R, то положим

$Q' = \{(I, f) \mid I \in \mathfrak{f},\ f \in \mathrm{Hom}_R(I, R)$
где I и R рассматриваются как левые R-модули$\}$.

На множестве Q' определим эквивалентность $\sim$, полагая $(I, f) \sim (J, g)$, если некоторого идеала $K \in \mathfrak{f}$ имеем $K \subseteq I \cap J$ и $f|_K = g|_K$. Фактормножество $Q = Q'/\sim$ становится полупервичным кольцом, если положить

$$[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g]$$

и

$$[I, f][J, g] = [JI, fg],$$

где $[I, f]$ — класс, содержащий пару (I, f). При этом R оказывается подкольцом кольца Q. Кольцо Q называется *левым мартиндейловским кольцом частных кольца* R. Центр кольца Q является регулярным самоинъективным кольцом и оказывается полем в том и только том случае, когда кольцо R первично. Заметим еще, что $\mathfrak{f}$ — фильтр и $Q = \varinjlim \{\mathrm{Hom}_R(I, R) \mid \mathfrak{f}\}$ (см. [172], гл. 3; [216], § 1.3).

Если R — первичное кольцо с единицей, то *симметрическое мартиндейловское кольцо частных* $Q_s(R)$ определяется любым из следующих эквивалентных друг другу условий:

(1) $Q_s(R) = \{q \mid q$ принадлежит левому мартиндейловскому кольцу частных и $qB \subseteq R$ для некоторого ненулевого двустороннего идеала B кольца $R\}$;

(2) $Q_s(R) = \{q \mid q$ принадлежит правому мартиндейловскому кольцу частных и $Aq \subseteq R$ для некоторого ненулевого двустороннего идеала A кольца $R\}$;

(3) (i) R — подкольцо в $Q_s(R)$ с той же самой единицей,

(ii) если $q \in Q_s(R)$, то существуют такие ненулевые двусторонние идеалы A, B кольца R, что Aq, $qB \subseteq R$,

(iii) если $q \in Q_s(R)$ и $0 \neq I \triangleleft R$, то как $Iq = 0$, так и $qI = 0$ влечет $q = 0$,

(iv) если $0 \neq A,\ B \lhd R$, $f\colon {}_RA \to {}_RR$ и $g\colon B_R \to R_R$ — гомоморфизмы модулей и $(af)b = a(gb)$, то существует $q \in Q_s(R)$, для которого $af = aq$, $gb = qb$ при любых $a \in A$, $b \in B$.

Мартиндейловские кольца частных полупервичны. Если исходное кольцо R не содержит делителей нуля, то то же самое верно и для Q. Подкольцо кольца Q, порожденное объединением его центра и кольца R, называется *центральным замыканием кольца* R (см. [233], § 10).

Локализациям колец посвящены монографии [123], [124], [157], [158], [220], [228], [257] и обзор [122]. Затронуты они в монографии [46] и обзоре [35]. Об инъективности колец частных см. [143]. Обзор результатов, связанных с локализацией нётерова кольца по первичному идеалу, дан в [122].

Контекстом Мориты, или *Морита-контекстом*, или *ситуацией предэквивалентности* называется пятерка

$$(R,\ {}_RM_S,\ {}_SN_R,\ \varphi,\ \psi),$$

где R и S — кольца, ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ — бимодули, а $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ — гомоморфизмы бимодулей, причем $\varphi(a' \otimes b)a'' = a'\psi(b \otimes a'')$ и $\psi(b' \otimes a)b'' = b'\varphi(a \otimes b'')$ для любых $a, a', a'' \in M$ и $b, b', b'' \in N$. Гомоморфизмы φ и ψ часто обозначаются $(-, -)$ и $[-, -]$ соответственно. Множества $(M, N) = \{\varphi(a, b) \mid a \in M,\ b \in N\}$ и $[M, N] = \{\psi(b, a) \mid a \in M,\ b \in N\}$ оказываются двусторонними идеалами колец R и S соответственно и называются *следами* контекста Мориты. Если $S = \mathrm{End}_R M$ и $N = \mathrm{Hom}_R(M, R)$, то контекст Мориты называется *стандартным*. Решетки кручений в категориях правых R- и S-модулей, где R и S входят в контекст Мориты, оказываются изоморфными. Если φ — наложение, то φ оказывается изоморфизмом, а M и N — образующими R-модулями и конечно порожденными проективными S-модулями. Кроме того, ψ индуцирует изоморфизм как бимодулей M и $\mathrm{Hom}_S(N, S)$, так и бимодулей N и $\mathrm{Hom}_S(N, S)$. Пусть, далее, $(R,\ {}_RM_S,\ {}_SN_R,\ S,\ \varphi,\ \psi)$ — *ситуация эквивалентности*, т. е. φ и ψ — изоморфизмы. Если M — проективный образующий правый S-модуль и $R = \mathrm{End}_S M$, то функторы $-\otimes_R M$ и $-\otimes_S N$ — взаимно обратные эквивалентности категорий правых R-

и S-модулей. Взаимно обратными эквивалентностями этих категорий оказываются и функторы $M\otimes_S -$ и $N\otimes_S -$. Как M, так и N являются проективными образующими R- и S-модулями. Отображения φ и ψ индуцируют изоморфизмы как бимодулей M, $\mathrm{Hom}_S(N,S)$ и $\mathrm{Hom}_R(N,R)$, так и бимодулей N, $\mathrm{Hom}_R(N,R)$ и $\mathrm{Hom}_S(N,S)$ (см. [46], § 10; [90], пп. 12.7, 12.10).

Если задан контекст Мориты, то множество $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ матриц $\begin{pmatrix} r & a \\ b & s \end{pmatrix}$, где $r\in R$, $s\in S$, $a\in M$ и $b\in N$, превращается в кольцо с единицей, если в качестве сложения взять обычное сложение матриц, а умножение определить равенством

$$\begin{pmatrix} r' & a' \\ b' & s' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'' & a'' \\ b'' & s'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r'r''+\varphi(a'\otimes b'') & r'a''+a's'' \\ b'r''+s'b'' & s's''+\psi(b'\otimes a'') \end{pmatrix}.$$

Если $N=0$, то кольцо $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ называется *тривиальным расширением* кольца R. Тривиальные расширения и их обобщения, так называемые полутривиальные расширения, рассматриваются в [149] и [151].

§ 3. Неассоциативные кольца и алгебры

3.1. Основные классы неассоциативных колец. Понятие кольца, введенное в § 1, является слишком общим для построения сколь-либо содержательной структурной теории произвольных колец. Для получения интересных структурных результатов нужно наложить некоторые дополнительные условия на операцию умножения. В зависимости от вида наложенных ограничений при этом получаются различные классы колец.

Одним из наиболее естественных ограничений является условие ассоциативности умножения. Класс ассоциативных колец занимает важное место в теории колец и наиболее хорошо изучен. Однако в математике и ее приложениях часто возникают и другие классы колец, в которых условие ассоциативности умножения уже не всегда выполняется. Такие кольца называются *неассоциативными*. В этом параграфе мы рассмотрим основные классы неассоциативных колец и приведем наиболее важные понятия и результаты, описывающие строение колец из этих классов.

С целью единообразного рассмотрения колец и алгебр над полем удобно ввести понятие алгебры над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ, имеющим единицу. Именно, левый унитальный Φ-модуль A называется *алгеброй над* Φ (или Φ-*алгеброй*), если на нем задано умножение $(a, b) \mapsto ab \in A$, удовлетворяющее условиям

$$(\alpha a + \beta b) c = \alpha (ac) + \beta (bc),$$
$$a (\alpha b + \beta c) = \alpha (ab) + \beta (ac)$$

для любых $\alpha, \beta \in \Phi$; $a, b, c \in A$. Кольцо Φ при этом называется *кольцом скаляров*. Если $\Phi = \mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, то понятие Φ-алгебры превращается в обычное определение кольца. В дальнейшем, если не оговорено противное, под алгеброй мы будем понимать алгебру над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом скаляров Φ; под конечномерной алгеброй — конечномерную алгебру над полем.

Первым классом неассоциативных алгебр, подвергшимся серьезному и систематическому изучению, явились алгебры Ли, впервые возникшие в теории групп Ли. Алгебра L называется *алгеброй Ли*, если ее операция умножения *антикоммутативна*, т. е.

$$x^2 = 0,$$

и удовлетворяет *тождеству Якоби*

$$J(x, y, z) \underset{\text{def}}{=} (xy) z + (yz) x + (zx) y = 0.$$

Если A — ассоциативная алгебра, то алгебра $A^{(-)}$, полученная введением на Φ-модуле A нового умножения с помощью *коммутатора*

$$[x, y] \underset{\text{def}}{=} xy - yx,$$

удовлетворяет вышеупомянутым тождествам и, следовательно, является алгеброй Ли. Этот пример достаточно общий, так как по теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта любая алгебра Ли над полем изоморфна подалгебре алгебры $A^{(-)}$ для подходящей ассоциативной алгебры A.

По аналогии с коммутатором или *лиевым умножением* $[x, y]$ в ассоциативной алгебре A можно ввести симметрическое (*йорданово*) *умножение*

$$x \circ y \underset{\text{def}}{=} xy + yx.$$

Впрочем, над кольцом скаляров, содержащим 1/2, удобнее рассматривать операцию

$$x \cdot y \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(xy + yx),$$

так как в этом случае степени элемента x относительно этой операции совпадают с его степенями в алгебре A. Алгебру, полученную введением на Ф-модуле A умножения $x \cdot y$, обозначают через $A^{(+)}$. Заметим, что отображение $x \longmapsto \frac{1}{2} x$ устанавливает изоморфизм между алгеброй $A^{(+)}$ и соответствующей алгеброй с операцией умножения $x \circ y$.

Алгебра $A^{(+)}$ *коммутативна*, т. е. удовлетворяет тождеству

$$xy = yx,$$

и, вообще говоря, уже не ассоциативна, хотя и удовлетворяет следующему слабому условию ассоциативности:

$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Алгебры, удовлетворяющие двум приведенным тождествам, называются *йордановыми*.

Алгебры вида $A^{(+)}$ для ассоциативной алгебры A и их подалгебры называются *специальными йордановыми*. Они уже не являются столь универсальными примерами йордановых алгебр, как алгебры $A^{(-)}$ и их подалгебры в случае алгебр Ли. Существуют йордановы алгебры (над любым полем), которые не изоморфны подалгебрам алгебры $A^{(+)}$ ни для какой ассоциативной алгебры A. Такие алгебры называются *исключительными*.

Изучение исключительных йордановых алгебр существенно опирается на знание свойств алгебр еще одного класса, несколько более широкого, чем класс ассоциативных алгебр. Это *альтернативные алгебры*, определяемые тождествами

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x.$$

Алгебры, удовлетворяющие первому [второму] из этих тождеств, называются *левоальтернативными* [*правоальтернативными*]. Ясно, что всякая ассоциативная алгебра альтернативна. С другой стороны, любые два элемента альтернативной алгебры порождают ассо-

циативную подалгебру, так что альтернативные алгебры довольно близки к ассоциативным.

Если A — альтернативная неассоциативная алгебра, то присоединенная алгебра $A^{(+)}$ по-прежнему является йордановой (и даже специальной) алгеброй, в то время как коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ уже не является алгеброй Ли. Тем не менее нетрудно показать, что в этом случае алгебра $A^{(-)}$ удовлетворяет следующему *тождеству Мальцева*:

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)\, x,$$

где $J(x, y, z) \underset{\text{def}}{=} (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — *якобиан* элементов x, y, z. Антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству Мальцева, называется *алгеброй Мальцева*. Всякая алгебра Ли является алгеброй Мальцева; с другой стороны, всякая двупорожденная алгебра Мальцева является лиевой. Последнее условие определяет класс *бинарно лиевых алгебр*, более широкий, чем класс алгебр Мальцева. Если в кольце скаляров Φ есть $1/2$, этот класс можно задать тождествами

$$x^2 = 0, \quad J(xy, x, y) = 0.$$

Альтернативные алгебры, йордановы алгебры и алгебры Мальцева наряду с алгебрами Ли являются основными и наиболее изученными классами неассоциативных алгебр. Этим классам алгебр и посвящена основная часть данного параграфа. В п. 3.6 мы рассмотрим также некоторые другие классы неассоциативных алгебр.

3.2. Общие свойства неассоциативных алгебр. Пусть A — произвольная алгебра. Положим $A^1 = A^{(0)} = A$, и далее по индукции

$$A^{n+1} = \sum_{i+j=n+1} A^i \cdot A^j, \quad A^{(n+1)} = A^{(n)} \cdot A^{(n)},$$

где для подмножеств B, C алгебры A через $B \cdot C$ обозначается Φ-подмодуль, порожденный всеми произведениями bc, $b \in B$, $c \in C$. Алгебра A называется *нильпотентной*, если найдется такое n, что $A^n = 0$, и *разрешимой*, если $A^{(m)} = 0$ для некоторого m. Наименьшие числа n и m с указанными свойствами называются соответственно *индексом нильпотентности* и *индексом разрешимости* алгебры A. Легко видеть, что

алгебра A нильпотентна индекса n в том и только том случае, когда произведение любых n ее элементов с любой расстановкой скобок равно нулю и существует ненулевое произведение $n-1$ элементов. Всякая нильпотентная алгебра разрешима, но обратное, вообще говоря, неверно. Сумма двух разрешимых (двусторонних) идеалов алгебры A — снова разрешимый идеал. Если A конечномерна, то A содержит наибольший разрешимый идеал $S = S(A)$; при этом факторалгебра A/S не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Идеал $S(A)$ называется *разрешимым радикалом* конечномерной алгебры A.

В основе структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр лежит понятие *нильпотентного радикала* (т. е. наибольшего нильпотентного идеала), факторалгебра по которому не содержит нильпотентных идеалов и разлагается в прямую сумму полных матричных алгебр над телами. В неассоциативном случае класс нильпотентных алгебр, в отличие от разрешимых, не замкнут относительно расширений (т. е. алгебра A может содержать нильпотентный идеал I с нильпотентной факторалгеброй A/I, а сама не быть нильпотентной). Поэтому нильпотентный радикал существует не во всех конечномерных алгебрах (например, он не существует в алгебрах Ли). Более того, в общем случае конечномерная алгебра может содержать несколько различных максимальных нильпотентных идеалов. В этих условиях на первую роль выходит разрешимый радикал $S(A)$. Он лежит в основе структурных теорий конечномерных алгебр Ли и алгебр Мальцева нулевой характеристики; в случаях же альтернативных и йордановых алгебр, где существует нильпотентный радикал, $S(A)$ совпадает с этим радикалом.

Элемент a алгебры A называется *нильпотентным*, если нильпотентна порожденная им подалгебра в A. Если все элементы алгебры [идеала] нильпотентны, то такая алгебра [идеал] называется *ниль-алгеброй* [*ниль-идеалом*]. В общем случае класс ниль-алгебр не замкнут относительно расширений. Однако при дополнительном определенном ниже условии моноассоциативности или ассоциативности степеней это свойство выполняется.

Алгебра A называется *моноассоциативной* или *алгеброй с ассоциативными степенями*, если каждый ее элемент лежит в некоторой ассоциативной подалгебре. Нетрудно показать, что все рассматривавшиеся в п. 3.1 алгебры являются моноассоциативными. Над полем характеристики 0 класс моноассоциативных алгебр можно задать тождествами (см., например,

Гайнов А. Т.//Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 3. — С. 141—146)

$$x^2x = xx^2, \quad (x^2x)x = x^2x^2.$$

В моноассоциативной алгебре естественным образом определены степени a^n элемента a $(n \geqslant 1)$; при этом выполнены равенства $(a^n)^m = a^{nm}$, $a^na^m = a^{n+m}$, и элемент a нильпотентен тогда и только тогда, когда $a^n = 0$ для некоторого n.

Заметим, что в общем случае в неассоциативной алгебре степень элемента является неоднозначным понятием; более того, произведение нескольких равных сомножителей может равняться нулю при одной расстановке скобок и быть отличным от нуля при другой расстановке.

Всякая моноассоциативная алгебра A содержит единственный максимальный двусторонний ниль-идеал $\mathrm{Nil}\,A$; при этом факторалгебра $A/\mathrm{Nil}\,A$ не содержит ненулевых двусторонних ниль-идеалов, т. е. является *ниль-полупростой* алгеброй. Идеал $\mathrm{Nil}\,A$ называется *ниль-радикалом* алгебры A. Если A — конечномерная моноассоциативная алгебра, то $S(A) \subseteq \mathrm{Nil}\,A$; при этом включение может быть строгим, как показывает пример алгебр Ли, в которых $\mathrm{Nil}\,A = A$. Ниже мы увидим, что в конечномерных альтернативных и йордановых алгебрах идеал $\mathrm{Nil}\,A$ нильпотентен. В частности, в этих случаях $\mathrm{Nil}\,A = S(A)$. В случае конечномерных коммутативных моноассоциативных алгебр идеал $\mathrm{Nil}\,A$ может быть не нильпотентным (Suttles D.// Not. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 19. — A-566), однако вопрос о его разрешимости открыт.

Строение ниль-полупростых конечномерных коммутативных моноассоциативных алгебр известно: всякая такая алгебра над полем F характеристики, отличной от 2, 3 и 5, имеет единицу и разлагается в прямую сумму простых алгебр, каждая из которых либо йорданова, либо является алгеброй степени 2 над полем положительной характеристики (Albert A. A.//Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — V. 69. — P. 503—527; Kokoris L. A.//Ann. Math. — 1956. — V. 64, N 3. — P. 544—550). Поясним, что *степенью алгебры A* над полем F называется максимальное возможное число взаимно ортогональных идемпотентов в скалярном расширении $\bar{F} \otimes_F A$, где $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. Упомянутые выше исключительные

алгебры степени 2 описаны в работе Oehmke R. H.// Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 105. — P. 292—313. Описание простых йордановых алгебр будет дано в п. 3.5.

В общем случае структура ниль-полупростых конечномерных моноассоциативных алгебр остается неизвестной. Удается получить описание этих алгебр пока лишь при некоторых дополнительных ограничениях (см. п. 3.6). Эффективным методом изучения моноассоциативных алгебр является переход к присоединенной коммутативной моноассоциативной алгебре $A^{(+)}$, так как свойства алгебры $A^{(+)}$ часто дают существенную информацию о свойствах A.

При рассмотрении неассоциативных алгебр полезным оказывается понятие *ассоциатора*

$$(x, y, z) \underset{\text{def}}{=} (xy) z - x (yz).$$

Идеал $D(A)$ алгебры A, порожденный всеми ассоциаторами, называется *ассоциаторным идеалом* алгебры A. Двойственным к нему является понятие *ассоциативного центра* $N(A)$ алгебры A:

$$N(A) \underset{\text{def}}{=} \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = 0\}.$$

Алгебра A ассоциативна тогда и только тогда, когда $D(A) = 0$ (либо $N(A) = A$). *Центром* $\mathfrak{Z}(A)$ алгебры A называется множество

$$\mathfrak{Z}(A) = \{z \in N(A) \mid [z, x] = 0 \text{ для любого } x \in A\}.$$

Во всякой алгебре A ассоциативный центр и центр являются подалгебрами. Кроме того,

$$D(A) = (A, A, A) + (A, A, A)A = (A, A, A) + A(A, A, A).$$

Доказательство вытекает из следующих двух тождеств, справедливых во всякой алгебре:

$$x(y, z, t) + (x, y, z) t = (xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt),$$

$$[xy, z] - x[y, z] - [x, z] y = (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y).$$

Более общим понятием, чем центр, является понятие *центроида* $\Gamma(A)$ алгебры A, который определяется как множество таких элементов $\gamma \in \operatorname{End} A$, для которых справедливы равенства $(xy)\gamma = (x\gamma) y = x(y\gamma)$ при любых $x, y \in A$. Иначе говоря, $\Gamma(A)$ — это централизатор алгебры умножений $M(A)$ в алгебре

$\operatorname{End} A$ (см. § 2). Если в A есть единица, то $\Gamma(A)$ и $\mathfrak{Z}(A)$ изоморфны; если A — простая алгебра, то $\Gamma(A)$ — поле. Алгебра A над полем F называется *центральной*, если $\Gamma(A) = F$.

Алгебра $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ из класса $\mathfrak{M}$ с множеством порождающих X называется *свободной в классе* $\mathfrak{M}$ (или $\mathfrak{M}$*-свободной*) с множеством свободных порождающих X, если всякое отображение множества X в произвольную алгебру A из $\mathfrak{M}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ в A.

Свободная неассоциативная Φ*-алгебра* $\Phi\{X\}$ является свободным модулем над Φ с базисом из всех неассоциативных слов от элементов множества X. *Неассоциативные слова* определяются индуктивно: элементы множества X — это слова длины 1; если u и v — слова соответственно длин n и m, то символ $(u)(v)$ означает слово длины $n+m$, при этом $(u)(v) = (u_1)(v_1)$ тогда и только тогда, когда $u = u_1$, $v = v_1$. На практике слова длины 1 обычно не заключают в скобки и, например, вместо $((x_1)(x_2))((x_3)(x_4))$ пишут $(x_1x_2)(x_3x_4)$. Элементы алгебры $\Phi\{X\}$ можно представлять себе как неассоциативные некоммутативные многочлены от переменных из X. Пусть $M = \{f_i(x_1, \ldots \ldots, x_{n_i}) \mid i \in I\}$ — какое-то множество элементов из $\Phi\{X\}$. Класс $\mathfrak{M}$ всех Φ-алгебр, удовлетворяющих всем тождествам $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) = 0$, $i \in I$, называется *многообразием алгебр*, заданным множеством тождеств M. Например, все альтернативные Φ-алгебры образуют многообразие, заданное тождествами $f_1(x_1, x_2) = (x_1x_1)x_2 - x_1(x_1x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = x_1(x_2x_2) - (x_1x_2)x_2$. Ясно, что и другие рассмотренные нами в п. 3.1 классы алгебр являются многообразиями. Во всяком многообразии $\mathfrak{M}$ существуют свободные алгебры: если $\mathfrak{M}$ задается системой тождеств $\{f_\alpha\}$, то $\mathfrak{M}$-свободная Φ-алгебра $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ изоморфна факторалгебре $\Phi\{X\}/T(\mathfrak{M})$, где $T(\mathfrak{M})$ — идеал алгебры $\Phi\{X\}$, порожденный множеством $\{f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n_\alpha}) \mid y_i \in \Phi\{X\}\}$. Так, свободная йорданова Φ-алгебра $\operatorname{Jord}[X]$ изоморфна факторалгебре алгебры $\Phi\{X\}$ по идеалу $T(\operatorname{Jord})$, порожденному всевозможными элементами вида $[f_1, f_2]$, (f_1^2, f_2, f_1), где $f_i \in \Phi\{X\}$. Идеал $T(\mathfrak{M})$ называется *идеалом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$.

Говорят, что неассоциативное слово v имеет *степень n_i по x_i*, если v содержит x_i ровно n_i раз. Если многочлен f является линейной комбинацией неассоциативных слов одной и той же степени n_i по x_i, то f называется *однородным по x_i* степени n_i; многочлен f, однородный по каждой входящей в него переменной, называется *полиоднородным*. Например, многочлен $x_1^2x_2 - (x_1x_3)x_1 + x_1^2$ однороден по x_1 степени 2, но не полиоднороден, многочлен $((x_1x_4)x_2)x_1 + (x_1x_2)(x_4x_1) - x_1^2(x_2x_4)$ полиоднороден. Полиоднородный многочлен, имеющий степень 1 по каждой входящей в него переменной, называется *полилинейным*. Всякий неассоциативный многочлен однозначно представляется в виде суммы полиоднородных многочленов, которые называются его *полиоднородными компонентами*. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *однородным*, если для всякого $f \in T(\mathfrak{M})$ все полиоднородные компоненты f также принадлежат $T(\mathfrak{M})$.

Всякое многообразие алгебр над бесконечным полем однородно. Все введенные в п. 3.1 многообразия алгебр являются однородными (йордановы Ф-алгебры — при условии, что $1/2 \in \Phi$) (см. [37], гл. I).

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Ф-алгебр. Предположим, что для алгебры A из $\mathfrak{M}$ и Ф-модуля M определены билинейные композиции $A \times M \to M$, $M \times A \to M$, записываемые для $a \in A$ и $m \in M$ как am и ma. Тогда прямую сумму $M \oplus A$ модулей M и A можно превратить в алгебру над Ф, определив умножение по правилу $(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = a_1a_2 + (m_1a_2 + a_1m_2)$, где $a_i \in A$, $m_i \in M$. Полученную алгебру называют *расщепляемым нулевым расширением* алгебры A с помощью M. Если алгебра $A \oplus M$ снова принадлежит классу $\mathfrak{M}$, то M называют *бимодулем над алгеброй A* (или *A-бимодулем*) *в классе* $\mathfrak{M}$.

Например, если $\mathfrak{M}$ — класс всех алгебр над Ф, то никаких условий, кроме билинейности операций am и ma, не требуется в определении бимодуля в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — класс всех ассоциативных алгебр, то бимодульные операции должны удовлетворять условиям

$$(ma)b = m(ab), \quad (am)b = a(mb), \quad (ab)m = a(bm)$$

для всех $a, b \in A$, $m \in M$, т. е. мы получаем обычное определение ассоциативного бимодуля.

В классе алгебр Ли соответствующие условия для бимодульных операций имеют вид

$$am = -ma, \quad m(ab) = (ma)b - (mb)a.$$

Вообще, если многообразие $\mathfrak{M}$ определяется совокупностью полилинейных тождеств $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) = 0 \mid i \in I\}$, то нетрудно видеть, что M является бимодулем над алгеброй $A \in \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$f_i(a_1, \ldots, a_{k-1}, m, a_{k+1}, \ldots, a_{n_i}) = 0$$

$(k = 1, \ldots, n_i; \quad i \in I)$ для любых $a_j \in A$, $m \in M$.

Бимодуль M над альтернативной алгеброй A является *альтернативным A-бимодулем* тогда и только тогда, когда в расщепляемом нулевом расширении $A \oplus M$ выполнены соотношения

$$(a, m, a) = 0, \quad (a, m, b) = (m, b, a) = (b, a, m)$$

для любых $a, b \in A$, $m \in M$. Если A — йорданова алгебра, то M *будет йордановым A-бимодулем*, когда

$$am = ma, \quad (a^2, m, a) = 0, \quad (a^2, b, m) + 2(am, b, a) = 0$$

для любых $a, b \in A$, $m \in M$.

Если многообразие $\mathfrak{M}$ задается конечным числом тождеств, то и бимодули в $\mathfrak{M}$ определяются конечным числом соотношений. Естественным образом, как и в случае ассоциативных алгебр, определяются понятия подбимодуля и факторбимодуля.

Если M — некоторый A-бимодуль, то отображения $\rho(a)\colon m \mapsto ma$ и $\lambda(a)\colon m \mapsto am$ являются эндоморфизмами Φ-модуля M, а отображения $a \mapsto \rho(a)$, $a \mapsto \lambda(a)$ суть Φ-линейные отображения из алгебры A в алгебру $\operatorname{End} M$. Пара (ρ, λ) Φ-линейных отображений из A в алгебру $\operatorname{End} M$ эндоморфизмов некоторого Φ-модуля M называется *бипредставлением алгебры A в классе $\mathfrak{M}$*, если M, наделенный композициями $ma = m\rho(a)$, $am = m\lambda(a)$, является бимодулем над A в классе $\mathfrak{M}$. Ясно, что понятия бимодуля и бипредставления взаимно определяют друг друга. С помощью рассмотренных выше соотношений, определяющих бимодули в различных классах, мы можем легко выписать условия, задающие бипредставления в этих классах. Например, альтернативные бипред-

ставления задаются условиями:

$$[\lambda(a),\ \rho(a)] = 0,$$
$$[\lambda(a),\ \rho(b)] = \rho(b)\rho(a) - \rho(ba) = \lambda(ba) - \lambda(a)\lambda(b). \qquad (*)$$

Всякую алгебру A можно естественным образом рассматривать как бимодуль над собой, интепретируя ma и am как умножение в алгебре A. Такие бимодули и соответствующие им бипредставления $a \mapsto R_a$, $a \mapsto L_a$ называются *регулярными*. Подбимодулями регулярного бимодуля A являются двусторонние идеалы алгебры A. Если $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие, то для любой алгебры $A \in \mathfrak{M}$ ее регулярный бимодуль является бимодулем в классе $\mathfrak{M}$.

При рассмотрении какого-либо семейства линейных преобразований часто бывает полезным перейти к обертывающей ассоциативной алгебре этого семейства. Так, обертывающей алгеброй семейства $\{R_a, L_a \mid a \in A\}$ является алгебра умножений $M(A)$. В случае произвольных бипредставлений при изучении обертывающей алгебры семейства $\{\rho(a), \lambda(a) \mid a \in A\}$ оказывается полезным введение *универсальной мультипликативной обертывающей алгебры* $U(A)$.

Покажем, как строится эта алгебра, на примере альтернативных алгебр.

Пусть A — альтернативная алгебра над Φ, $B = A \oplus A^\circ$ — прямая сумма Φ-модулей, где Φ-модуль A° изоморфен A относительно изоморфизма $a \mapsto a^\circ$. Рассмотрим тензорную алгебру $T(B) = \Phi \oplus B \oplus (B \otimes B) \oplus (B \otimes B \otimes B) \oplus \ldots$ Для любой пары (ρ, λ) Φ-линейных отображений из A в $\operatorname{End} M$ мы можем построить Φ-линейное отображение $\varphi\colon B \to \operatorname{End} M$, полагая $\varphi(a + b^\circ) = \rho(a) + \lambda(b)$. По свойству тензорной алгебры φ продолжается единственным образом до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi}\colon T(B) \to \operatorname{End} M$. Нетрудно видеть, что пара (ρ, λ) будет альтернативным бипредставлением (т. е. удовлетворять тождествам $(*)$) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\tilde{\varphi}$ содержит следующее множество элементов:

$$a^\circ \otimes a - a \otimes a^\circ, \quad a^\circ \otimes b - b \otimes a^\circ - b \otimes a + ba,$$
$$a^\circ \otimes b - b \otimes a^\circ - (ba)^\circ + a^\circ \otimes b^\circ; \quad a,\ b \in A.$$

Обозначим через I идеал алгебры $T(B)$, порожденный этим множеством, через $U(A)$ — факторалгебру $T(B)/I$, и пусть $\mathscr{R}\colon a \mapsto a + I$, $\mathscr{L}\colon a \mapsto a^\circ + I$ — Φ-линейные отображения из A в $U(A)$. Ясно, что пара $(\mathscr{R}, \mathscr{L})$ удовлетворяет тождествам $(*)$; при этом для любого альтернативного бипредставления $(\rho, \lambda)\colon A \to \operatorname{End} M$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\varphi\colon U(A) \to \operatorname{End} M$, для которого $\rho = \mathscr{R} \circ \varphi$, $\lambda = \mathscr{L} \circ \varphi$. Тем самым M можно рассматривать как правый (ассоциативный) $U(A)$-модуль. Обратно, всякий правый $U(A)$-

модуль является альтернативным A-бимодулем относительно композиций $ma = m\mathscr{R}(a)$, $am = m\mathscr{L}(a)$. Алгебра $U(A)$ называется *универсальной мультипликативной обертывающей алгеброй* для алгебры A (в классе альтернативных алгебр).

Аналогичным образом строятся универсальные мультипликативные обертывающие алгебры в других классах алгебр (см. [177], с. 88). Заметим, что для лиевой алгебры L алгебра $U(L)$ — это ее обычная универсальная (биркгоф-виттовская) обертывающая (см. п. 3.7); если A ассоциативна, то $U(A) \simeq A^{\#} \otimes \otimes (A^{\#})^{\circ}$, где алгебра $A^{\#}$ получена из A присоединением внешним образом единицы, а $(A^{\#})^{\circ}$ антиизоморфна $A^{\#}$. Отображения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ в общем случае не являются инъективными. Однако если A вложима в алгебру $B \in \mathfrak{M}$ с единицей, то это так. В частности, в случаях ассоциативных, альтернативных и йордановых алгебр отображения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ инъективны.

Если (ρ, λ) — произвольное бипредставление алгебры A (в классе $\mathfrak{M}$), то обертывающая алгебра семейства $\{\rho(a), \lambda(a) \mid a \in A\}$ является гомоморфным образом алгебры $U(A)$. В частности, если $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие, то алгебра умножений $M(A)$ и, более общо, алгебра $M^B(A)$ для любой надалгебры $B \in \mathfrak{M}$ алгебры A суть гомоморфные образы алгебры $U(A)$. Вообще, введение алгебры $U(A)$ сводит задачу описания бипредставлений алгебры A к определению строения алгебры $U(A)$ и описанию правых (ассоциативных) представлений алгебры $U(A)$ (см. [177]).

Отметим, что понятие правого модуля и правого представления, играющие фундаментальную роль в теории ассоциативных алгебр, не всегда допускают столь же простое и естественное определение в других классах алгебр (кроме случаев коммутативных и антикоммутативных алгебр, где понятия представления и бипредставления, по сути дела, совпадают). Так, до сих пор не известно, можно ли определить правый альтернативный модуль конечным числом соотношений. По этому поводу см. Слинько А. М., Шестаков И. П.//Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 544—587, где определяется и изучается понятие правого представления в произвольном многообразии алгебр и строится теория правых представлений альтернативных алгебр.

Алгебра A называется $\mathbf{Z}_2$-*градуированной алгеброй* или *супералгеброй*, если $A = A_0 \oplus A_1$, где $A_iA_j \subseteq \subseteq A_{i+j}$, $i, j \in \mathbf{Z}_2$. Например, алгебра Грассмана $G = = G_0 \oplus G_1$ является супералгеброй, если через G_0

$[G_1]$ обозначить подмодуль, порожденный словами четной [нечетной] длины от порождающих алгебры G. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое однородное многообразие алгебр; тогда супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ называется *$\mathfrak{M}$-супералгеброй*, если ее *грассманова оболочка* $G(A) \underset{\text{def}}{=} G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$. Сама $\mathfrak{M}$-супералгебра A, вообще говоря, не принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$; ее четная часть A_0 является подалгеброй, лежащей в $\mathfrak{M}$, а нечетная часть A_1 является $\mathfrak{M}$-бимодулем над подалгеброй A_0. Если известны тождества, задающие многообразие $\mathfrak{M}$, то можно выписать «супертождества», определяющие $\mathfrak{M}$-супералгебры. Например, супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ является *лиевой супералгеброй*, если в ней верны тождества

$$a_i a_j + (-1)^{ij} a_j a_i = 0,$$

$$(-1)^{ik} (a_i a_j) a_k + (-1)^{ij} (a_j a_k) a_i + (-1)^{kj} (a_k a_i) a_j = 0;$$

альтернативные супералгебры определяются тождествами

$$(a_i, a_j, a_k) + (-1)^{jk} (a_i, a_k, a_j) = 0,$$

$$(a_i, a_j, a_k) + (-1)^{ij} (a_j, a_i, a_k) = 0;$$

йордановы супералгебры — тождествами

$$a_i a_j - (-1)^{ij} a_j a_i = 0,$$

$$(-1)^{l(i+k)} (a_i a_j, a_k, a_l) + (-1)^{i(j+k)} (a_j a_l, a_k, a_i) + \\ + (-1)^{j(l+k)} (a_l a_i, a_k, a_j) = 0,$$

где всюду $a_s \in A_s$, $s = i, j, k, l \in \{0, 1\}$.

3.3. Композиционные алгебры. Алгебра A с единицей 1 над полем F характеристики $\neq 2$ называется *композиционной*, если на векторном пространстве A определена невырожденная квадратичная форма $n(x)$, удовлетворяющая равенству

$$n(xy) = n(x)\, n(y). \qquad (*)$$

В этом случае говорят также, что форма $n(x)$ *допускает композицию* на A. Типичнейшие представители композиционных алгебр — это поля вещественных чисел $\mathbf{R}$ и комплексных чисел $\mathbf{C}$, тело кватернионов $\mathbf{H}$ и алгебра чисел Кэли (октонионов) $\mathbf{O}$, взятые с евклидовой нормой $n(x) = (x, x) = |x|^2$. Первые три из них ассоциативны, а алгебра $\mathbf{O}$ дает нам первый и

важнейший пример альтернативной неассоциативной алгебры. Равенство (*), расписанное в ортонормированном базисе для каждой из этих алгебр, дает тождество вида

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2)=$$
$$=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_k^2,\quad k=1,\ 2,\ 4,\ 8,$$

где z_i билинейно выражаются через x_r, y_s. Ниже мы увидим, что значения $k=1, 2, 4, 8$ для тождеств такого вида — единственно возможные.

Всякая композиционная алгебра A альтернативна и *квадратична*, т. е. каждый элемент $a\in A$ удовлетворяет равенству

$$a^2-t(a)\,a+n(a)=0,$$

где $t(a)$ — линейная форма на A со значениями в поле F. Элементы $t(a)$ и $n(a)$ называются соответственно *следом* и *нормой* элемента a. Линейное отображение $a\mapsto\bar{a}=t(a)-a$ является *инволюцией* алгебры A (т. е. $\bar{\bar{a}}=a$ и $\overline{ab}=\bar{b}\bar{a}$ для любых $a, b\in A$), сохраняющей неподвижными элементы поля F. Обратно, если A — альтернативная алгебра над F с единицей 1 и инволюцией $x\mapsto\bar{x}$ такой, что элементы $t(x)=x+\bar{x}$ и $n(x)=x\bar{x}\in F$ для всех $x\in A$, то квадратичная форма $n(x)$ удовлетворяет равенству (*).

Пусть теперь A — алгебра над полем F с единицей 1 и инволюцией $a\mapsto\bar{a}$, причем $a+\bar{a}$, $a\bar{a}\in F$ для любого $a\in A$. Зафиксируем $\alpha\in F$, $\alpha\neq 0$, и определим на векторном пространстве $A\oplus A$ операцию умножения: $(a_1, a_2)\cdot(a_3, a_4)=(a_1a_3-\alpha a_4\bar{a}_2,\ \bar{a}_1a_4+a_3a_2)$. Полученная алгебра (A,α) называется алгеброй, полученной из A с помощью *процесса Кэли—Диксона*. Ясно, что A изоморфно вкладывается в (A,α) и что $\dim(A,\alpha)=2\dim A$. Пусть $v=(0, 1)$, тогда $v^2=-\alpha$ и $(A,\alpha)=A\oplus vA$. Для произвольного элемента $x=a_1+va_2\in(A,\alpha)$ положим $\bar{x}=\bar{a}_1-va_2$. Тогда $x+\bar{x}$, $x\bar{x}\in F$, и отображение $x\mapsto\bar{x}$ есть инволюция алгебры (A,α), продолжающая инволюцию $a\mapsto\bar{a}$ алгебры A. Если квадратичная форма $n(a)=a\bar{a}$ невырождена на A, то квадратичная форма $n(x)=x\bar{x}$ невырождена на (A,α); при этом форма $n(x)$ допускает композицию на (A,α) тогда и только тогда, когда A ассоциативна.

Таким образом, последовательно получаются следующие примеры композиционных алгебр над F:

1) F — поле характеристики $\neq 2$.

2) $\mathbf{C}(\alpha)=(F,\alpha)$, $\alpha\neq 0$. Если многочлен $x^2+\alpha$ неприводим над F, то $\mathbf{C}(\alpha)$ является полем; в противном случае $\mathbf{C}(\alpha)\simeq F\times F$.

3) $\mathbf{H}(\alpha,\beta)=(\mathbf{C}(\alpha),\beta)$, $\beta\neq 0$; — *алгебра обобщенных кватернионов*. Эта алгебра ассоциативна, но не коммутативна.

4) $\mathbf{O}(\alpha,\beta,\gamma)=(\mathbf{H}(\alpha,\beta),\gamma)$, $\gamma\neq 0$, — *алгебра Кэли—Диксона*. Эта алгебра уже неассоциативна, поэтому на ней индуктивный процесс построения композиционных алгебр обрывается.

Если $F=\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел, то описанная конструкция дает при $\alpha=\beta=\gamma=1$ классические алгебры комплексных чисел $\mathbf{C}=\mathbf{C}(1)$, кватернионов $\mathbf{H}=\mathbf{H}(1,1)$ и *чисел Кэли* $\mathbf{O}=\mathbf{O}(1,1,1)$.

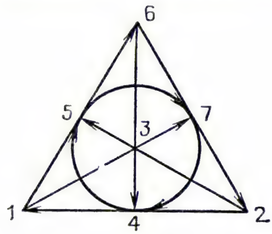
Всякая композиционная алгебра изоморфна одной из приведенных выше алгебр типов 1)—4) (см. [37, с. 46]). Отсюда вытекает, что невырожденная квадратичная форма $n(x)$, определенная на конечномерном векторном пространстве V над полем F характеристики $\neq 2$, тогда и только тогда допускает композицию, когда $\dim_F V=1, 2, 4, 8$, и в некотором (каноническом) базисе пространства V форма $n(x)$ соответственно имеет вид: $n(x)=x_0^2$; $n(x)=x_0^2+\alpha x_1^2$; $n(x)=(x_0^2+\alpha x_1^2)+\beta(x_2^2+\alpha x_3^2)$ или $n(x)=\left[(x_0^2+\alpha x_1^2)+\beta(x_2^2+\alpha x_3^2)\right]+\gamma\left[(x_4^2+\alpha x_5^2)+\beta(x_6^2+\alpha x_7^2)\right]$, где $\alpha,\beta,\gamma\in F$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Пусть $\mathbf{C}(\alpha)=F\oplus Fv_1$, $\mathbf{H}(\alpha,\beta)=\mathbf{C}(\alpha)\oplus\mathbf{C}(\alpha)v_2$, $\mathbf{O}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathbf{H}(\alpha,\beta)\oplus\mathbf{H}(\alpha,\beta)v_3$ (везде прямая сумма векторных пространств). Тогда $v_1^2=-\alpha$, $v_2^2=-\beta$, $v_3^2=-\gamma$, $\bar v_i=-v_i$, $v_iv_j=-v_jv_i$ при $i\neq j$, и элементы $e_0=1$, $e_1=v_1$, $e_2=v_2$, $e_3=v_3$, $e_4=v_1v_2$, $e_5=v_2v_3$, $e_6=v_1(v_2v_3)$, $e_7=v_1v_3$ образуют канонический базис алгебры $\mathbf{O}(\alpha,\beta,\gamma)$. Заметим, что $\bar e_i=-e_i$, $e_ie_j=-e_je_i$ при $i,j\geqslant 1$, $i\neq j$. Если $\mathbf{O}=\mathbf{O}(1,1,1)$ — алгебра чисел Кэли, то $e_i^2=-1$ для всех $i\geqslant 1$ и $e_ie_j=\lambda e_k$, $\lambda=\pm 1$ для любых $i,j\geqslant 1$, $i\neq j$ и подходящего $k\geqslant 1$; при этом для любой циклической перестановки σ символов i,j,k верно $e_{\sigma(i)}e_{\sigma(j)}=\lambda e_{\sigma(k)}$. С учетом этих свойств таблица умножения в алгебре $\mathbf{O}$ полностью определяется условиями:

$$e_ie_{i+1}=e_{i+3},\quad i=1,\ \ldots,\ 7;\quad e_{7+j}=e_j\quad\text{при}\quad j>0.$$

В случае произвольных α, β, $\gamma \in F$ положим формально $e_1 = \sqrt{\alpha}\, e_1'$, $e_2 = \sqrt{\beta}\, e_2'$, $e_3 = \sqrt{\gamma}\, e_3'$, $e_4 = \sqrt{\alpha\beta}\, e_4'$, $e_5 = \sqrt{\beta\gamma}\, e_5'$, $e_6 = \sqrt{\alpha\beta\gamma}\, e_6'$, $e_7 = \sqrt{\alpha\gamma}\, e_7'$; тогда элементы e_i' перемножаются как числа Кэли, а таблица умножения элементов e_i будет содержать лишь целые положительные степени параметров α, β, γ:

$$e_1e_2 = e_4, \quad e_2e_4 = \beta e_1, \quad e_5e_6 = \beta\gamma e_1, \ \dots$$

Таблицу умножения в алгебре чисел Кэли можно задать также с помощью диаграммы:



При этом нумерация вершин может быть произвольной, так как разным нумерациям соответствуют изоморфные алгебры. Приведенная нумерация согласована с каноническим базисом.

Композиционная алгебра A называется *расщепляемой*, если в ней выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) $n(x) = 0$ для некоторого $x \neq 0$ из A; (2) $xy = 0$ для некоторых $x \neq 0$, $y \neq 0$ из A; (3) A содержит нетривиальный *идемпотент* (т. е. такой элемент $e \neq 0, 1$, что $e^2 = e$).

Алгебра A называется *алгеброй с делением*, если для любых a, b $(a \neq 0)$ из A в A разрешимы уравнения

$$ax = b, \quad ya = b.$$

Если каждое из этих уравнений при $a \neq 0$ имеет единственное решение и A содержит единицу, то A называется *телом*. Всякая конечномерная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением, поэтому всякая композиционная алгебра либо расщепляема, либо есть алгебра с делением (и даже тело).

Примеры расщепляемых композиционных алгебр над полем F: 1) $A = F \times F$ с инволюцией $\overline{(\alpha, \beta)} = (\beta, \alpha)$. 2) $A =$

$= M_2(F)$ — алгебра 2×2-матриц над F с симплектической инволюцией

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

3) $A = \mathbf{O}(F)$ — *матричная алгебра Кэли — Диксона*, состоящая из множества матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in F$, а u, v — векторы из трехмерного векторного пространства F^3, с обычными матричными операциями сложения и умножения на скаляр и следующим умножением:

$$\begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & z \\ w & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + (u, w) & \alpha z + \delta u - v \times w \\ \gamma v + \beta w + u \times z & \beta\delta + (v, z) \end{pmatrix},$$

где для векторов $x, y \in F^3$ через (x, y) обозначено их скалярное произведение, а через $x \times y$ — «векторное» произведение. Инволюция в алгебре $\mathbf{O}(F)$ определяется так же, как и в алгебре $M_2(F)$, при этом для элемента $a = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix}$ мы имеем $n(a) = a\bar{a} = \alpha\beta - (u, v)$, $t(a) = a + \bar{a} = \alpha + \beta$.

Всякая расщепляемая композиционная алгебра над полем F изоморфна одной из алгебр: $F \times F$, $M_2(F)$, $\mathbf{O}(F)$ (см. [37], с. 62). Композиционная алгебра над алгебраически замкнутым полем F всегда расщепляема, поэтому над таким полем F существует всего четыре неизоморфных композиционных алгебры.

Такова же классификация композиционных алгебр над полями p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, так как любая квадратичная форма от пяти и более переменных над $\mathbf{Q}_p$ представляет нуль. Над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел существует всего семь неизоморфных композиционных алгебр; три расщепляемых и четыре алгебры с делением $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{O}$. Последние четыре алгебры являются единственными конечномерными альтернативными алгебрами с делением над $\mathbf{R}$. Существуют и неальтернативные конечномерные алгебры с делением над $\mathbf{R}$. В общем случае они не описаны, однако справедлив следующий фундаментальный результат: конечномерные алгебры с делением над $\mathbf{R}$ существуют лишь в размерностях 1, 2, 4, 8 (А д а м с Дж. Ф.// Сб. пер.: Математика.— 1961.— Т. 5, № 4.— С. 3—86).

Классификация композиционных алгебр над полями алгебраических чисел также известна (J a c o b s o n N.//Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1958. — V. 7. — P. 55—80).

Композиционные алгебры рассмотрены в монографиях [37], [177], [249].

3.4. Альтернативные алгебры. Рассмотрим тождество правой альтернативности

$$(x,\ y,\ y)=0.$$

Подставив сюда $y+z$ вместо y и воспользовавшись дистрибутивностью, получим

$$(x,\ y,\ z)+(x,\ z,\ y)=0.$$

Проделанная операция называется *линеаризацией* исходного тождества по y. Линеаризуя аналогичным образом тождество левой альтернативности, получим

$$(x,\ z,\ y)+(z,\ x,\ y)=0.$$

Из полученных тождеств следует, что в альтернативной алгебре (а. а.) ассоциатор (x, y, z) является знакопеременной (альтернативной) функцией своих аргументов. В частности, в а. а. A справедливо тождество

$$(x,\ y,\ x)=0.$$

Алгебры, удовлетворяющие последнему тождеству, называются *эластичными.* Например, любая коммутативная или антикоммутативная алгебра эластична.

Далее, во всякой а. а. справедливы тождества

$$(x,\ y,\ yz)=(x,\ y,\ z)\,y,$$
$$(x,\ y,\ zy)=y\,(x,\ y,\ z),$$

из которых легко следуют известные *тождества Муфанг*:

$(xy\cdot z)\,y=x\,(yzy)$ — *правое тождество Муфанг,*

$(yzy)\,x=y\,(z\cdot yx)$ — *левое тождество Муфанг,*

$(xy)\,(zx)=x\,(yz)\,x$ — *центральное тождество Муфанг.*

С помощью этих же соотношений и их линеаризаций доказывается *теорема Артина*: в а. а. A любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру ([37], теорема 2.2).

Из теоремы Артина и теоремы Веддерберна о конечных ассоциативных телах, утверждающей, что любое такое тело коммутативно и порождается как

кольцо одним элементом, легко вытекает следующий результат: всякое конечное альтернативное тело ассоциативно (и коммутативно). Этот результат имеет важное приложение в теории проективных плоскостей — из него следует, что всякая муфангова конечная проективная плоскость дезаргова (см. [83]).

Из теоремы Артина следует также, что всякая а. а. A моноассоциативна и в ней однозначно определен ниль-радикал $\mathrm{Nil}\, A$.

Пусть A — а. а., M — альтернативный A-бимодуль, (ρ, λ) — бипредставление алгебры A, ассоциированное с M. Говорят, что A *действует нильпотентно на* M, если нильпотентна подалгебра $\langle \rho(A) \cup \lambda(A) \rangle$, порожденная в алгебре $\mathrm{End}\, M$ множеством $\rho(A) \cup \lambda(A)$. Если $x \in A$, то говорят, что x *действует нильпотентно на* M, если подалгебра $\langle \rho(x), \lambda(x) \rangle$ нильпотентна. Из определения альтернативного бипредставления следует, что алгебра $\langle \rho(x), \lambda(x) \rangle$ коммутативна и $\rho(x^k) = \rho(x)^k$, $\lambda(x^k) = \lambda(x)^k$. Отсюда видно, что если элемент x нильпотентен, то он действует нильпотентно на любом бимодуле.

Если каждый элемент а. а. A над полем F действует нильпотентно на конечномерном альтернативном A-бимодуле M, то и A действует нильпотентно на M.

Рассматривая регулярное бипредставление, мы получаем, что в конечномерной а. а. A всякая ниль-подалгебра нильпотентна. В частности, ниль-радикал $\mathrm{Nil}\, A$ конечномерной а. а. A нильпотентен ([249], с. 30).

Факторалгебра $A/\mathrm{Nil}\, A$ не содержит ненулевых ниль-идеалов, т. е. является ниль-полупростой. Конечномерная ниль-полупростая а. а. изоморфна прямой сумме простых алгебр, каждая из которых либо ассоциативна и является алгеброй матриц над некоторым телом, либо есть алгебра Кэли—Диксона над своим центром ([249], с. 43, 56).

Конечномерная а. а. A над полем F называется *сепарабельной*, если для любого расширения K поля F алгебра $A_K = K \otimes_F A$ является ниль-полупростой. Как и в случае ассоциативных алгебр, это эквивалентно тому, что алгебра A является прямой суммой простых алгебр и центр каждой ее простой компоненты является сепарабельным расширением поля F.

Следующая теорема обобщает на а.а. классическую теорему Веддерберна—Мальцева из теории ассоциативных алгебр. Пусть A — конечномерная а.а. над полем F, $N = \mathrm{Nil}\, A$ — ее нильрадикал. Если факторалгебра A/N сепарабельна над F, то $A = B \oplus N$ (прямая сумма векторных пространств), где B — подалгебра алгебры A, изоморфная A/N. Если F — поле характеристики $\neq 2, 3$ и B_1 — другая подалгебра алгебры A, изоморфная A/N, то найдется такой внутренний автоморфизм φ алгебры A, что $B_1^{\varphi} = B$ (см. [249], с. 59, 90, а также McCrimmon K.//J. Algebra. — 1974. — V. 28, N 3. — P. 484—495).

Внутренние автоморфизмы а.а. в общем случае выглядят довольно сложно (см. цитированную выше статью). Однако над полем характеристики нуль автоморфизм φ можно выбрать из подгруппы, порожденной автоморфизмами вида $\exp D$ (см. п. 1.1), где D — нильпотентное внутреннее дифференцирование алгебры A, лежащее в радикале ее алгебры умножений $M(A)$.

В а.а. A для любых $x, y \in A$ оператор

$$D_{x,y} = R_{[x,y]} - L_{[x,y]} - 3[L_x, R_y]$$

является внутренним дифференцированием (см. п. 1.1). Если в A есть единица и в кольце скаляров есть $1/3$, то всякое внутреннее дифференцирование алгебры A имеет вид

$$D = R_a - L_a + \sum_i D_{x_i, y_i}, \quad a \in N(A), \quad x_i, y_i \in A, \qquad (*)$$

где $N(A)$ — ассоциативный центр алгебры A.

Пусть $\mathbf{O}$ — алгебра Кэли—Диксона над полем F характеристики, отличной от 2 и 3. Тогда алгебра дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathbf{O}$ является 14-мерной простой центральной алгеброй Ли. При этом $\mathrm{Der}\,\mathbf{O} = \mathrm{Inder}\,\mathbf{O}$, и всякое дифференцирование D из $\mathrm{Der}\,\mathbf{O}$ имеет вид $D = \sum_i D_{x_i, y_i}$, $x_i, y_i \in \mathbf{O}$ (см. [249], с. 87). Вместе с известными фактами о дифференцированиях простых центральных ассоциативных алгебр этот результат влечет, что всякое дифференцирование D конечномерной сепарабельной а.а. A характеристики $\neq 2, 3$ является внутренним и имеет вид $(*)$. При этом в случае характеристики 0 можно взять $a = 0$.

Отметим еще, что конечномерная а. а. A характеристики 0 является ниль-полупростой тогда и только тогда, когда полупроста (в смысле разрешимого радикала) алгебра Ли $\operatorname{Der} A$.

Как и в случае ассоциативных алгебр, всякий альтернативный бимодуль над сепарабельной а. а. вполне приводим. Если A — конечномерная а. а., M — точный неприводимый альтернативный A-бимодуль, (ρ, λ) — соответствующее бипредставление алгебры A, то либо M — ассоциативный бимодуль над (ассоциативной) алгеброй A, либо имеет место один из случаев: 1) A — алгебра обобщенных кватернионов, λ — (правое) ассоциативное неприводимое представление A, $\rho(a) = \lambda(\bar{a})$ для любого $a \in A$; 2) A — алгебра Кэли—Диксона, $M = A$ — регулярный A-бимодуль (Jacobson N.//Osaka Math. J. — 1954. — V. 6. — P. 1—71).

В структурной теории бесконечномерных а. а. наиболее важную роль играют квазирегулярный и первичный радикалы.

Квазирегулярный радикал $\operatorname{Rad} A$ а. а. A является прямым обобщением соответствующего понятия из теории ассоциативных алгебр и допускает несколько эквивалентных характеризаций: (1) $\operatorname{Rad} A$ — наибольший правый [левый] квазирегулярный идеал алгебры A; (2) $\operatorname{Rad} A$ равен пересечению всех максимальных модулярных правых [левых] идеалов алгебры A; (3) $\operatorname{Rad} A$ равен пересечению ядер всех неприводимых правых [левых] представлений алгебры A.

Здесь, как и в случае ассоциативных алгебр, идеал I называется *квазирегулярным*, если каждый элемент $x \in I$ *квазиобратим* (т. е. элемент $1 - x$ обратим в алгебре $A^{\#}$, полученной из A присоединением внешним образом единицы); правый идеал I называется *модулярным*, если существует такой элемент $e \in A$, что $x - ex \in I$ для любого $x \in A$.

Алгебра A называется *полупростой*, если $\operatorname{Rad} A = 0$, и *примитивной* (справа), если в A есть максимальный модулярный правый идеал, не содержащий ненулевых двусторонних идеалов. Всякая полупростая а. а. изоморфна подпрямой сумме примитивных алгебр, каждая из которых, в свою очередь, либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли—Диксона ([37], теоремы 10.2, 10.4, 10.5).

Первичный радикал а. а. A определяется как наименьший идеал $P(A)$, для которого факторалгебра $A/P(A)$ *полупервична* (т. е. не содержит ненулевых нильпотентных идеалов). При этом сам идеал $P(A)$, вообще говоря, может не быть нильпотентным (хотя является ниль-идеалом). Всякая полупервичная алгебра изоморфна подпрямой сумме *первичных алгебр* (т. е. таких алгебр, в которых произведение любых двух ненулевых двусторонних идеалов всегда отлично от нуля). Примерами первичных алгебр могут служить простые алгебры или алгебры без делителей нуля.

Всякая простая неассоциативная а. а. является алгеброй Кэли—Диксона над своим центром ([37], с. 181). В частности, любое альтернативное тело либо ассоциативно, либо является алгеброй Кэли—Диксона над своим центром.

Со всякой простой центральной алгеброй тесно связана серия первичных алгебр. Пусть A — некоторая центральная алгебра над полем F. Подкольцо $B \subseteq A$ называется *центральным порядком* в A, если его центроид Z содержится в F и кольцо частных $Z^{-1}B = \{z^{-1}b \mid 0 \neq z \in Z,\ b \in B\}$ совпадает с A. Легко видеть, что всякий центральный порядок простой алгебры является первичной алгеброй. Центральные порядки в алгебрах Кэли — Диксона называются *кольцами Кэли—Диксона.* Этими кольцами, за исключением некоторых «патологических» случаев, исчерпываются первичные а. а.

Всякая первичная неассоциативная а. а. характеристики $\neq 3$ является кольцом Кэли—Диксона ([37], с. 230).

Ограничение на характеристику, вообще говоря, существенно. Однако его можно заменить, например, условием отсутствия в алгебре A *абсолютных делителей нуля* (т. е. таких элементов a, для которых $aAa = 0$) либо условием отсутствия в A ненулевых локально нильпотентных идеалов. Напомним, что алгебра A называется *локально нильпотентной*, если каждая конечнопорожденная подалгебра в A нильпотентна. Во всякой а. а. A существует наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{LN}(A)$, который называется *локально нильпотентным радикалом* алгебры A. Радикал $\mathrm{LN}(A)$ содержит все односторонние

локально нильпотентные идеалы алгебры A и все абсолютные делители нуля; факторалгебра $A/\mathrm{LN}(A)$ является LN-полупростой и изоморфна подпрямой сумме первичных LN-полупростых алгебр.

Радикалы $\mathrm{Nil}\, A$, $\mathrm{Rad}\, A$, $\mathrm{LN}(A)$ и $\mathrm{P}(A)$ связаны включениями

$$\mathrm{Rad}\, A \supseteq \mathrm{Nil}\, A \supseteq \mathrm{LN}(A) \supseteq \mathrm{P}(A),$$

которые, вообще говоря, являются строгими уже в случае ассоциативных алгебр. В конечномерных а. а. все эти радикалы совпадают с обычным нильпотентным радикалом. Более того, они совпадают в классе *артиновых* а. а. (т. е. алгебр, удовлетворяющих условию минимальности для правых идеалов), для которых справедливо обобщение классической ассоциативной теории: во всякой артиновой а. а. A радикал $\mathrm{Rad}\, A$ нильпотентен; алгебра A будет полупростой артиновой тогда и только тогда, когда она является конечной прямой суммой полных матричных алгебр над телами и алгебр Кэли—Диксона ([37], теоремы 12.2, 12.3).

Отсюда нетрудно вывести, что в артиновой а. а. всякая нильподалгебра нильпотентна. В частности, в классе артиновых алгебр свойства разрешимости и нильпотентности эквивалентны. При некоторых ограничениях на характеристику эти свойства эквивалентны и для конечно порожденных алгебр и их подалгебр. В общем случае это не так — над любым полем существуют примеры разрешимых не нильпотентных а. а. Тем не менее, разрешимость и нильпотентность в классе а. а. связаны достаточно тесно: если A — разрешимая альтернативная Ф-алгебра, то подалгебра A^2 нильпотентна, а если $1/3 \in \Phi$, то $(A^n)^3 = 0$ для некоторого n (Пчелинцев С. В.//Тр. ин-та мат. СО АН СССР. — 1984. — Т. 4. — С. 81—101). Отметим еще, что над полем характеристики 0 всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса разрешима ([37], с. 161).

Многие вопросы теории а. а. сводятся к изучению строения свободных алгебр и PI-*алгебр*, т. е. алгебр, удовлетворяющих *существенным полиномиальным тождествам*, — таким тождествам, которые не являются следствиями ассоциативности.

Приведем основные свойства свободных а. а. ([37], гл. 13; Ильтяков А. В.//Алгебра и логика. — 1984. — 23, № 2. — С. 136—158; Пчелинцев С. В.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 1; Филиппов В. Т.//Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. — 1984. — Т. 4. — С. 139—156; Шестаков И. П.//Мат. сб. 1983. — Т. 122, № 1. — С. 31—40). Пусть $A = \mathrm{Alt}[X]$ — свободное альтернативное кольцо от множества свободных порождающих X; $\mathfrak{Z}(A)$ и $N(A)$ — центр и ассоциативный центр кольца A. Тогда: 1) $[x, y]^4 \in N(A)$ и $(x, y, z)^4 \in \mathfrak{Z}(A)$ для любых $x, y, z \in A$; 2) при $|X| > 2$ кольцо A не первично, а при $|X| > 3$ — не полупервично; 3) $\mathrm{Rad}\, A = \mathrm{LN}(A) = \{x \in A \mid x^{n(x)} = 0\} = T(\mathbf{O}) \cap D(A)$, где $T(\mathbf{O})$ — идеал тождеств матричной алгебры Кэли — Диксона $\mathbf{O}(\mathbf{Z})$, а $D(A)$ — ассоциаторный идеал кольца A; 4) если $|X| < \infty$, то $\mathrm{Rad}\, A$ нильпотентен; 5) если $|X| < |Y| < \infty$, то в $\mathrm{Alt}[X]$ выполнено некоторое тождество, не выполняющееся в $\mathrm{Alt}[Y]$; 6) при достаточно большом X в аддитивной группе кольца $\mathrm{Alt}[X]$ есть ненулевые элементы порядка 3.

Свойства 1)—4) выполнены и в свободной а. а. $A_F = \mathrm{Alt}_F[X]$ над произвольным полем F; свойство 5) — над полем F характеристики $\neq 2$. Если F — поле характеристики $\neq 2, 3$, то $\mathrm{Rad}\, A_F = 0$ при $|X| = 3$; наконец, если F — поле характеристики 0, то $\mathrm{Rad}\, A_F$ нильпотентен при любом X.

Изучение строения альтернативных PI-алгебр проходит, в основном, по образцу ассоциативной PI-теории. К настоящему времени многие принципиальные результаты этой теории перенесены на а. а. Одним из эффективных методов изучения альтернативных PI-алгебр является переход к алгебрам из других классов, так или иначе связанных с данной PI-алгеброй A. Например, нетрудно проверить, что алгебра $A^{(+)}$ для а. а. A является специальной йордановой алгеброй (см. п. 3.1), причем если A является PI-алгеброй, то $A^{(+)}$ — йорданова PI-алгебра. С использованием этой связи в классе альтернативных PI-алгебр положительно решается *проблема Куроша*: если в альтернативной PI-алгебре A всякая однопорожденная подалгебра конечномерна, то и всякая конечно порожденная подалгебра алгебры A конечномерна ([37], теорема 5.6). В общем случае эта проблема

решается отрицательно уже для ассоциативных алгебр (хотя для тел ответ неизвестен). Решение проблемы для а. а. существенно опирается на случай специальных йордановых алгебр. Приведем важный частный случай этого результата: а. а. с тождеством $x^n = 0$ локально нильпотентна.

Наряду с йордановой алгеброй $A^{(+)}$, часто полезно привлекать к изучению свойств а. а. A алгебру правых умножений $R(A)$, которая наследует многие свойства A. Например, если A — конечно порожденная PI-алгебра, то такова же и алгебра $R(A)$, и мы можем применить в этом случае к изучению A развитую ассоциативную PI-теорию. На этом пути доказывается, например, что в конечно порожденном альтернативном PI-кольце или конечно порожденной PI-алгебре над полем квазирегулярный радикал нильпотентен (Шестаков И. П.//Мат. сб. — 1983. — Т. 122, № 1.— С. 31—40).

В последнее время начали изучаться *альтернативные супералгебры* (см. п. 3.2). Всякая первичная альтернативная супералгебра $A = A_0 + A_1$ характеристики $\neq 2, 3$ либо ассоциативна, либо $A_1 = 0$ и A_0 — кольцо Кэли—Диксона (Зельманов Е. И., Шестаков И. П.//Тез. сообщ. 19-й Всесоюз. алгебр. конф. — Львов, 1987).

3.5. Йордановы алгебры. Напомним, что алгебра называется *йордановой* (й. а.), если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx, \quad (x^2y)\,x = x^2\,(yx).$$

В этом пункте мы предполагаем, что кольцо скаляров Φ содержит $1/2$ (основное поле F имеет характеристику, не равную 2).

Рассмотрим основные примеры й. а.

1. Пусть A — ассоциативная алгебра. Тогда, как отмечалось в п. 3.1, алгебра $A^{(+)}$ является й. а. Всякий Φ-подмодуль J в A, замкнутый относительно операции $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, образует подалгебру алгебры $A^{(+)}$ и, следовательно, является й. а. Такая й. а. J называется *специальной*, а подалгебра A_0 в A, порожденная J, называется *ассоциативной обертывающей* для J. Свойства алгебр A и $A^{(+)}$ тесно связаны: A является простой (первичной, нильпотентной) тогда и только тогда, когда соответствующим свойством

обладает $A^{(+)}$. Алгебра $A^{(+)}$ может оказаться йордановой и для неассоциативной A. Например, если A — правоальтернативная (в частности, альтернативная) алгебра, то $A^{(+)}$ — специальная й. а. (см. п. 3.6).

2. Пусть X — векторное пространство размерности больше 1 над полем F с заданной на X симметрической невырожденной билинейной формой $f(x, y)$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $J(X, f) = F \oplus X$ и зададим на ней умножение формулой

$$(\alpha + x)(\beta + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) + (\alpha y + \beta x).$$

Тогда $J(X, f)$ — простая специальная й. а.; обертывающей для нее является алгебра Клиффорда $Cl(X, f)$ билинейной формы f. В случае, когда $F = \mathbf{R}$ и $f(x, y)$ — обычное скалярное произведение на X, алгебру $J(X, f)$ называют *спин-фактором* и обозначают через V_n, где $n - 1 = \dim_F X$.

3. Пусть A — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$. Множество $H(A, *) = \{h \in A \mid h = h^*\}$ симметрических относительно $*$ элементов замкнуто относительно йорданова умножения $x \cdot y$ и поэтому является специальной й. а. Например, если D — композиционная ассоциативная алгебра над F с инволюцией $d \longmapsto \bar{d}$ и $M_n(D)$ — алгебра матриц n-го порядка над D, то отображение S: $(a_{ij}) \longmapsto (\bar{a}_{ji})$ является инволюцией в $M_n(D)$, и множество D-эрмитовых матриц $H(D_n) = H(M_n(D), S)$ является специальной й. а. Если алгебра A $*$-проста (т. е. не содержит таких собственных идеалов I, что $I^* \subseteq I$), то алгебра $H(A, *)$ проста; если A $*$-первична, то $H(A, *)$ первична. В частности, все алгебры $H(D_n)$ простые. Всякая алгебра вида $A^{(+)}$ изоморфна алгебре $H(B, *)$, где $B = A \times A^\circ$, алгебра A° антиизоморфна A, $(a_1, a_2)^* = (a_2, a_1)$.

4. Если $D = \mathbf{O}$ — алгебра Кэли—Диксона, то соответствующая алгебра эрмитовых матриц $H(\mathbf{O}_n)$ будет й. а. только при $n \leqslant 3$. В случаях $n = 1, 2$ получающиеся алгебры изоморфны некоторым алгебрам из примера 2 и, следовательно, специальны. Алгебра $H(\mathbf{O}_3)$ не является специальной и дает нам пример простой исключительной й. а. Йорданова алгебра J называется *алгеброй Алберта*, если $J \underset{F}{\otimes} K \simeq H(\mathbf{O}_3)$ для некоторого расширения K поля F. Всякая алгебра

Алберта проста, исключительна и имеет размерность 27 над центром.

Пусть J — й. а., $a, b, c \in J$. Рассмотрим регулярное бипредставление $a \mapsto L_a$, $a \mapsto R_a$ алгебры J. Тогда

$$L_a = R_a, \quad [R_{a^2}, R_a] = 0,$$
$$R_{a^2 b} - R_b R_{a^2} + 2R_a R_b R_a - 2R_a R_{ba} = 0.$$

Линеаризуя последнее соотношение по a, получим

$$R_{ac \cdot b} - R_b R_{ac} + R_a R_b R_c + R_c R_b R_a - R_a R_{bc} - R_c R_{ba} = 0. \quad (*)$$

Отсюда легко следует, что для любого $k \geqslant 1$ оператор R_{a^k} принадлежит подалгебре $A \subseteq \operatorname{End} J$, порожденной операторами R_a, R_{a^2}. Так как A коммутативна, то мы имеем $[R_{a^k}, R_{a^n}] = 0$ для любых $k, n \geqslant 1$, что равносильно условию $(a^k, J, a^n) = 0$. В частности, всякая й. а. J моноассоциативна, и в ней однозначно определен ниль-радикал $\operatorname{Nil} J$. Как и в случае альтернативных алгебр, справедлива теорема: если J — конечномерная й. а., то радикал $\operatorname{Nil} J$ нильпотентен, а факторалгебра $J/\operatorname{Nil} J$ изоморфна прямой сумме простых алгебр ([177], с. 195, 201).

Важным примером полупростых й. а. над $\mathbf{R}$ являются *формально вещественные й. а.*, т. е. такие алгебры, в которых равенство $x^2 + y^2 = 0$ влечет $x = y = 0$. Конечномерные формально вещественные й. а. характеризуются как прямые суммы простых алгебр одного из видов: $\mathbf{R}$, V_n, $H(\mathbf{R}_n)$, $H(\mathbf{C}_n)$, $H(\mathbf{H}_n)$, $H(\mathbf{O}_3)$, где $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbf{H}$ — тело кватернионов, $\mathbf{O}$ — алгебра чисел Кэли и $n \geqslant 3$ (Jordan P., von Neumann J., Wigner E.//Ann. Math.— 1934. — V. 36. — P. 29—64). Сходным образом описываются простые конечномерные алгебры над алгебраически замкнутым полем F: всякая простая конечномерная й. а. над алгебраически замкнутым полем F изоморфна либо F, либо алгебре $J(X, f)$, либо алгебре эрмитовых матриц $H(D_n)$, $n \geqslant 3$, над композиционной алгеброй D, ассоциативной при $n > 3$ (см. [177], с. 204). Поскольку конечномерная коммутативная моноассоциативная ниль-полупростая алгебра над полем характеристики 0 является йордановой, то данная теорема дает одновременно описание простых конечномерных коммутативных моноассоциативных алгебр характеристики 0, не являющихся ниль-алгебрами.

В конечномерной й. а. J с сепарабельной фактор-алгеброй $J/\operatorname{Nil} J$ верен также аналог классической теоремы Веддерберна—Мальцева об отщеплении радикала и сопряженности полупростых факторов ([177], с. 292, 305).

Строение йордановых бимодулей над й. а. J определяется строением ее *универсальной мультипликативной обертывающей алгебры* $U(J)$, которая определяется как факторалгебра тензорной алгебры $T(J)$ по идеалу, порожденному множеством элементов вида $a^2 \otimes a - a \otimes a^2$, $a^2b - b \otimes a^2 + 2a \otimes b \otimes a - 2a \otimes ba$, где $a, b \in J$. Линейное отображение $\rho\colon J \to \operatorname{End} M$ является представлением й. а. J (или, что эквивалентно, пара (ρ, ρ) является бипредставлением J) тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм ассоциативных алгебр $\varphi\colon U(J) \to \operatorname{End} M$, совпадающий с ρ на элементах из J, отождествленных с их каноническими образами в $U(J)$. Поэтому описание йордановых J-бимодулей сводится к определению строения алгебры $U(J)$ и изучению ее ассоциативных представлений. Конечномерная й. а. J сепарабельна тогда и только тогда, когда $U(J)$ сепарабельна. Отсюда следует, что всякий йорданов бимодуль над сепарабельной конечномерной й. а. вполне приводим. Строение алгебр $U(J)$ известно для всех простых центральных конечномерных й. а. J (см. [177], с. 272, 284). Тем самым определены и неприводимые J-бимодули (они соответствуют простым компонентам алгебры $U(J)$).

Примеры. 1) Пусть J — алгебра Алберта. Тогда $U(J) = F \times M_{27}(F)$. Компонента F соответствует тривиальному одномерному J-бимодулю, а $M_{27}(F)$ — регулярному J-бимодулю. Так как тривиальные бимодули мы обычно не считаем неприводимыми, то всякий неприводимый J-бимодуль изоморфен регулярному бимодулю. 2) $J = J(X, f)$. Тогда $U(J) = F \times Cl(X, f) \times D(X, f)$, где $D(X, f)$ — *алгебра мезонов*, определяемая как факторалгебра $T(X)/I$, где $T(X)$ — тензорная алгебра пространства X, а I — идеал в $T(X)$, порожденный всеми элементами вида $x \otimes y \otimes x - f(x, y)x$, где $x, y \in X$. Можно показать, что $D(X, f)$ изоморфна подалгебре алгебры $Cl(X, f) \otimes Cl(X, f)$, порожденной элементами вида $x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $x \in J$.

Если й. а. J содержит идемпотент e, то оператор R_e удовлетворяет равенству $R_e(2R_e - 1)(R_e - 1) = 0$, поэтому для J имеет место следующий аналог разложения Пирса из теории ассоциативных алгебр:

$$J = J_1 \oplus J_{1/2} \oplus J_0,$$

где $J_i = J_i(e) = \{x \in J \mid xe = ix\}$; при этом $J_i^2 \subseteq J_i$, $J_iJ_{1/2} \subseteq J_{1/2}$, $J_iJ_j = 0$, $J_{1/2}^2 \subseteq J_1 + J_0$; $i, j = 0, 1$; $i \neq j$. Более общо, если в J есть единица $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, где e_i — ортогональные идемпотенты, то $J = \bigoplus_{i \leqslant j} J_{ij}$, где $J_{ii} = J_1(e_i)$, $J_{ij} = J_{1/2}(e_i) \cap J_{1/2}(e_j)$ при $i \neq j$; при этом компоненты J_{ij} перемножаются по правилам:

$$J_{ii}^2 \subseteq J_{ii}, \quad J_{ij}J_{ii} \subseteq J_{ij}, \quad J_{ij}^2 \subseteq J_{ii} + J_{jj},$$

$$J_{ii}J_{jj} = 0 \text{ при } i \neq j;$$

$$J_{ij}J_{jk} \subseteq J_{ik}, \quad J_{ij}J_{kk} = 0,$$

$$J_{ij}J_{kl} = 0, \text{ если } i, j, k, l \text{ различны.}$$

Ортогональные идемпотенты e_1, e_2 называются *сильно связанными*, если существует такой элемент $u_{12} \in J_{12}$, что $u_{12}^2 = e_1 + e_2$. Отношение сильной связанности транзитивно. Справедлива *координатизационная теорема*, описывающая строение й. а., содержащих $n \geqslant 3$ сильно связанных идемпотентов, сумма которых равна единице: всякая такая алгебра изоморфна йордановой алгебре $H(D_n)$ эрмитовых матриц над альтернативной (ассоциативной при $n > 3$) алгеброй D с инволюцией $*$, оставляющей неподвижными в D лишь элементы из ассоциативного центра (не обязательно все) ([177], с. 133). В частности, всякая й. а. J, содержащая более трех сильно связанных ортогональных идемпотентов, специальна.

С каждой й. а. J связано несколько интересных алгебр Ли. Мы уже знаем некоторые из них: это алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} J$, лиева алгебра умножений $\operatorname{Lie} J$ и алгебра внутренних дифференцирований $\operatorname{Inder} J = \operatorname{Der} J \cap \operatorname{Lie} J$. Определим теперь структурную алгебру $\operatorname{Strl} J$ и суперстуктурную алгебру (или *конструкцию Титса — Кантора — Кёхера*) $K(J)$.

Пусть J — й. а. с единицей 1, $a, b, c \in J$. Из равенства $(*)$ на с. 406 кососимметризацией по a, b получаем

$$R_{(a,\, c,\, b)} = [R_c, [R_a, R_b]].$$

Так как $(a, c, b) = c[R_a, R_b]$, то оператор $[R_a, R_b]$ оказывается дифференцированием алгебры J. Кроме того, $\operatorname{Lie} J = R_J + [R_J, R_J]$, где $R_J = \{R_a \mid a \in J\}$. Так

как $\operatorname{Der} J \cap R_J = 0$, то мы имеем $\operatorname{Inder} J = \operatorname{Der} J \cap \cap \operatorname{Lie} J = [R_J, R_J]$, т. е. всякое внутреннее дифференцирование в J имеет вид $D = \sum_i [R_{a_i}, R_{b_i}]$, $a_i, b_i \in J$. Одновременно доказано, что $\operatorname{Lie} J = R_J \oplus \operatorname{Inder} J$ — прямая сумма Ф-модулей с умножением

$$[R_a + D,\ R_b + D'] = R_{aD'-bD} + ([R_a,\ R_b] + [D,\ D']),$$

где $a, b \in J$; $D, D' \in \operatorname{Inder} J$. Если взять здесь D и D' из алгебры $\operatorname{Der} J$, то та же формула будет задавать умножение на Ф-модуле $R_J \oplus \operatorname{Der} J$. Полученная алгебра снова является алгеброй Ли, которая называется *структурной алгеброй* алгебры J и обозначается $\operatorname{Strl} J$.

Пусть J — конечномерная полупростая й. а. над полем характеристики 0. Тогда $\operatorname{Der} J = \operatorname{Inder} J$ — вполне приводимая алгебра Ли. Если J не содержит простых слагаемых размерности 3 над центром, то алгебра $\operatorname{Der} J$ полупроста ([119], с. 285).

Приведенное ограничение существенно, так как $\operatorname{Der} V_3$ — одномерная алгебра Ли. Для центральной простой й. а. J алгебра $\operatorname{Der} J$ является простой за исключением алгебр $J(X, f)$, где $\dim X = 2, 3, 5$, и алгебры $H(F_4)$. Если $J = H(D_n)$, где $n \geqslant 3$ и D — композиционная алгебра размерности d над F, то размерность алгебры $\operatorname{Der} J$ задается таблицей

d	1	2	4	8
$\dim(\operatorname{Der} J)$	$n(n-1)/2$	n^2-1	$n(2n+1)$	$52\ (n=3)$

В частности, алгебра $\operatorname{Der} H(\mathbf{O}_3)$ — простая 52-мерная алгебра Ли.

Структурная алгебра $\operatorname{Strl} J$ для конечномерной полупростой й. а. J уже не является полупростой, так как она содержит в своем центре элемент $R_1 = \operatorname{Id}_J$, где 1 — единица алгебры J. Пусть $J_0 = \{x \in J \mid \operatorname{tr}(R_x) = 0\}$, тогда $J = F \cdot 1 \oplus J_0$ и $\operatorname{Strl} J = F \cdot R_1 \oplus R_{J_0} \oplus \operatorname{Der} J$. Легко видеть, что $(\operatorname{Strl} J)^2 = R_{J_0} \oplus \operatorname{Der} J$. Подалгебра $\operatorname{Strl}_0 J = R_{J_0} \oplus \operatorname{Der} J$ коразмерности 1 в $\operatorname{Strl} J$ называется *приведенной структурной алгеброй* алгебры J.

Пусть J — центральная простая й. а. конечной размерности $n>1$ над полем характеристики 0. Тогда $\mathrm{Strl}_0 J$ — полупростая алгебра Ли ([119], с 293)

Если $J=H(D_n)$, где $n \geqslant 3$ и D — композиционная алгебра размерности d над F, то алгебра $\mathrm{Strl}_0 J$ проста при $d=1, 4, 8$, а при $d=2$ является прямой суммой двух изоморфных простых алгебр.

Например, алгебра $\mathrm{Strl}_0 H(\mathbf{O}_3)$ является простой алгеброй Ли размерности $(27-1)+52=78$.

Тройным йордановым произведением элементов a, b, c й. а. J называется выражение $\{abc\}=(ab)c+(cb)a-b(ac)$. Положим $U_{a,b}(x)=\{axb\}$, $V_{a,b}(x)=\{abx\}$, $U_a=U_{a,a}$. Заметим, что если в J есть единица, то обычное умножение выражается через тройное, так как $R_a=V_{1,a}$; кроме того, $V_{a,b}=R_{ab}-[R_a, R_b] \in \mathrm{Strl}\, J$.

Рассмотрим вновь структурную алгебру $\mathrm{Strl}\, J = R_J \oplus \mathrm{Der}\, J$. Зададим отображение $*$ алгебры $\mathrm{Strl}\, J$ в себя, полагая $(R_a+D)^* = -R_a+D$. Легко видеть, что $*$ — автоморфизм порядка 2 алгебры $\mathrm{Strl}\, J$. Образуем Φ-модуль $K(J)=J \oplus \mathrm{Strl}\, J \oplus \bar{J}$, где $\bar{J}$ изоморфен J относительно изоморфизма $a \mapsto \bar{a}$. Определим теперь умножение на $K(J)$, полагая

$$[a+T+\bar{b},\ c+S+\bar{d}] = (aS-cT)+(V_{a,d}-V_{c,b}+[T, S])+(\overline{bS^*-dT^*}).$$

Полученная алгебра $K(J)$ является алгеброй Ли, которую называют *суперструктурной алгеброй* или *конструкцией Титса—Кантора—Кёхера* для J.

Соответствие $J \to K(J)$ функториально, и существует тесная связь между свойствами алгебр J и $K(J)$. Алгебра J проста (полупроста, разрешима) тогда и только тогда, когда такова же $K(J)$ (см. [177], с. 329—333).

Алгебра $K(J)$ допускает менее формальное толкование. Пусть $\mathrm{Pol}\, J$ — векторное пространство полиномиальных отображений из J в J. Известно, что $\mathrm{Pol}\, J$ образует алгебру Ли относительно *скобок Пуассона* $[p, q](x) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial p(x)}{\partial x} q(x) - \frac{\partial q(x)}{\partial x} p(x)$ — *алгебру Ли полиномиальных векторных полей на* J (см. п. 3.7). Нетрудно убедиться, что $K(J)$ изоморфна подалгебре алгебры $\mathrm{Pol}\, J$, состоящей из квадратичных полиномов вида $a+Tx+\{xbx\}$, где $a, b \in J$, $T \in \mathrm{Strl}\, J$.

Примеры. 1) Пусть $J=\mathbf{R}$. Тогда $K(\mathbf{R})$ состоит из многочленов вида $p(x)=p_1+p_2x+p_3x^2$, где $p_i\in\mathbf{R}$; при этом

$$[p,\ q](x)=p'(x)q(x)-q'(x)p(x)=(p_2q_1-q_2p_1)+\\+2(q_3p_1-q_1p_3)x+(p_3q_2-q_3p_2)x^2.$$

Следовательно, $K(\mathbf{R})\simeq\mathrm{sl}(2,\ \mathbf{R})$ (см. п. 3.7). 2) Пусть J — алгебра Алберта. Тогда $K(J)$ простая алгебра Ли размерности $27+79+27=133$.

Конструкция Титса — Кантора — Кёхера позволяет на самом деле получить не одну алгебру Ли, а целую серию. Именно, пусть H — произвольная подалгебра алгебры $\mathrm{Strl}\,J$, содержащая подалгебру $R_J+\mathrm{Inder}\,J$; тогда Ф-модуль $K_H(J)=J\oplus\oplus H\oplus\bar{J}$ является подалгеброй в $K(J)$. Все алгебры $K_H(J)$ являются 3-градуированными, т. е. имеют вид $L=L_{-1}\oplus L_0\oplus L_1$, где $L_iL_j\subseteq L_{i+j}$, $L_i=0$ при $|i|>1$; при этом $L_{-1}=J$, $L_0=H$, $L_1=\bar{J}$.

Элемент a й. а. J с единицей 1 называется *обратимым*, если оператор $U_a=2R_a^2-R_{a^2}$ обратим в $\mathrm{End}\,J$. Легко видеть, что a обратим тогда и только тогда, когда 1 лежит в образе U_a. Положим $a^{-1}=aU_a^{-1}$, тогда a^{-1} также обратим и $(a^{-1})^{-1}=a$. Если A — ассоциативная алгебра, то a обратим в A тогда и только тогда, когда он обратим в $A^{(+)}$, при этом a^{-1} один и тот же как в A, так и $A^{(+)}$. Если в й. а J каждый ненулевой элемент обратим, то J называется *й. а. с делением*. Заметим, что из обратимости элемента a в й. а., вообще говоря, не следует обратимость оператора R_a, поэтому в й. а. с делением уравнения $ax=b$ $(a\neq 0)$ не всегда разрешимы.

Если в ассоциативной алгебре A зафиксировать обратимый элемент c и определить новое c-умножение $a\underset{c}{\cdot}b=acb$, то полученная алгебра $A^{(c)}$ снова будет ассоциативной, причем элемент c^{-1} будет единицей в $A^{(c)}$. Аналогично, для й. а. J с обратимым элементом c алгебра $J^{(c)}$, полученная введением на J c-умножения $a\underset{c}{\cdot}b=\{acb\}$, будет й. а. с единицей c^{-1}. Алгебра $J^{(c)}$ называется *c-изотопом* алгебры J. Две й. а. называются *изотопными*, если одна из них изоморфна изотопу другой; соответствующий изоморфизм называется *изотопией*.

В ассоциативном случае алгебры A и $A^{(c)}$ всегда изоморфны отображение $x\longmapsto xc^{-1}$ есть изоморфизм A на $A^{(c)}$, поэтому понятие изотопии здесь не играет особой роли. В йордановом

случае ситуация другая: алгебра $J^{(c)}$ может быть не изоморфной J. Например, алгебра $J = H(\mathbf{R}_2)$ не содержит нильпотентных элементов, а ее изотоп $J^{(c)}$ для $c = e_{12} + e_{21}$ содержит нильпотентный элемент e_{11}: $e_{11} \underset{c}{\cdot} e_{11} = e_{11}(e_{12} + e_{21})e_{11} = 0$. Тем не менее многие важные свойства й. а., например, простота, специальность инвариантны относительно изотопии; изотопным й. а. соответствуют изоморфные структурные и суперструктурные алгебры ([177], с. 328).

Изотопия й. а. J на себя называется *автотопией* (иначе говоря, автотопия — это изоморфизм алгебры на свой изотоп). Совокупность всех автотопий й. а. J образуют группу, которая называется *структурной группой* алгебры J и обозначается $\mathrm{Str}\, J$. Группа $\mathrm{Str}\, J$ является алгебраической группой, ее алгебра Ли есть структурная алгебра $\mathrm{Strl}\, J$. Автоморфизмы J — это автотопии, оставляющие неподвижной единицу 1 алгебры J. Более общо, два изотопа $J^{(a)}$ и $J^{(b)}$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует автотопия, переводящая a и b.

Ряд важных теорем теории й. а. выполняется «с точностью до изотопии», т. е. их заключениям удовлетворяют не рассматриваемые алгебры, а лишь некоторые их изотопы. В связи с этим и группа $\mathrm{Str}\, J$ часто оказывается более полезной, чем группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, J$. Например, для й. а. нет естественного понятия внутреннего автоморфизма, в то время как для любого обратимого $a \in J$ оператор U_a^{-1} является «внутренней автотопией» из J в $J^{(a^2)}$. Все это наводит на мысль о существовании некоторого алгебраического объекта, объединяющего й. а. J и все ее изотопы и имеющие группу $\mathrm{Str}\, J$ своей группой автоморфизмов. Такой объект действительно существует — им является йорданова пара (J, J).

Йордановой парой (й. п.) над полем F характеристики $\neq 2, 3$ называется пара $V = (V^+, V^-)$ векторных пространств с двумя трилинейными отображениями $V^\sigma \times V^{-\sigma} \times V^\sigma$, $\sigma = \pm$, записываемыми в виде $(x, y, z) \mapsto \{xyz\}$ и удовлетворяющими тождествам

$$\{xyz\} = \{zyx\},$$

$$\{xy\{uvz\}\} - \{uv\{xyz\}\} = \{\{xyu\}vz\} - \{u\{yxv\}z\}.$$

Пусть $V(J) = (J, J)$, где J — й. а. над F и $\{xyz\}$ — тройное йорданово произведение в J. Тогда $V(J)$ — й. п., для которой $\mathrm{Aut}\, V(J) \simeq \mathrm{Str}\, J$. Если $V = (V^+, V^-)$ — произвольная й. п., то для любого $a \in V^\sigma$ пространство $V^{-\sigma}$ с операцией умножения $x \underset{a}{\cdot} y = \{xay\}$ обра-

зует й. а. J_a. Если элемент a при этом обратим, то $V \simeq V(J_a)$. Таким образом, (унитальные) й. а. «с точностью до изотопии» можно рассматривать как й. п. с обратимыми элементами.

Векторное пространство T, на котором определена трилинейная операция $\{xyz\}$, удовлетворяющая тождествам из определения й. п., называется *йордановой тройной системой* (й. т. с.). Например, всякая й. а. является й. т. с. относительно тройного йорданова произведения; прямоугольные $p \times q$-матрицы образуют й. т. с. $M_{p,q}(F)$ относительно операции $\{xyx\} = xy^tx$ (трилинейная операция $\{xyz\}$ в й. п. и й. т. с. получается линеаризацией по x квадратичной операции $\{xyx\}$), где y^t — матрица, полученная транспонированием матрицы y. Со всякой й. т. с. T естественным образом связана й. п. $V(T) = (T, T)$. Не любая й. п. получается таким образом, так как существуют й. п., у которых $\dim V^+ \neq \dim V^-$. В паре $V(T)$ есть инволюция $(t_1, t_2) \mapsto (t_2, t_1)$. Обратно, всякая й. п. с инволюцией имеет вид $V(T)$ для подходящей й. т. с. T. Таким образом, й. т. с. можно рассматривать как й. п. с инволюцией.

Приведем еще три примера й. п.: 1) $V = (M_{p,q}(F), M_{q,p}(F))$, $\{xyx\} = xyx$. Легко видеть, что $V \simeq V(T)$ для й. т. с. $T = M_{p,q}(F)$, рассмотренной выше; 2) $V(R) = (R_{-1}, R_1)$, где $R = R_{-1} \oplus R_0 \oplus \oplus R_1$ — ассоциативная 3-градуированная алгебра ($R_iR_j \subseteq R_{i+j}$, $R_i = 0$ при $|i| > 1$); $\{xyx\} = xyx$. Если при этом R — простая алгебра и $R_{-1} + R_1 \neq 0$, то $V(R)$ — простая й. п.; 3) $V(L) = (L_{-1}, L_1)$, где $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ есть 3-градуированная алгебра Ли; $\{xyz\} = [[x, y], z]$. Примером такой алгебры Ли является суперструктурная алгебра $L = K(J)$ для й. а. J; при этом $V(L) \simeq V(J)$.

Подробнее о й. п. и й. т. с. см. [202], [209], [265], [224].

В последнее время активно изучается еще один важный вид йордановых структур — *йордановы супералгебры* (см. п. 3.2). Как и в случае обычных алгебр, существует тесная связь между йордановыми и лиевыми супералгебрами; в частности, конструкция Титса—Кантора—Кёхера обобщается на йордановы супералгебры. С помощью этой связи на основе известной классификации простых конечномерных супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (см. Кас V. G.//Commun. Algebra. — 1977. — V. 5. — P. 1375—1400) получена класси-

фикация простых йордановых супералгебр с теми же ограничениями. Как заметил недавно И. Л. Кантор, приведенная в вышеупомянутой работе классификация содержит пробел: пропущена серия простых йордановых супералгебр, связанных с градуировками гамильтоновых супералгебр Ли.

Типичный пример йордановой супералгебры — это алгебра $A^{(+)s}$, получающаяся введением на векторном пространстве ассоциативной супералгебры $A=A_0\oplus A_1$ йорданова суперумножения $x\overset{s}{\cdot} y=\frac{1}{2}(xy+(-1)^{ij}yx)$, $x\in A_i$, $y\in A_j$. Супералгебра J называется *специальной*, если она вложима в подходящую алгебру $A^{(+)s}$. Например, если в $A=A_0\oplus A_1$ есть суперинволюция $*$ (т. е. $A_i^*\subseteq A_i$ и $(xy)^*=(-1)^{ij}y^*x^*$ для $x\in A_i$, $y\in\in A_j$), то совокупность суперсимметрических элементов $H(A, *)=\{x\in A\,|\,x^*=x\}$ образует подалгебру в $A^{(+)s}$. Если $X=X_0\oplus X_1$ — векторное пространство, на котором определена суперсимметрическая билинейная форма f (f симметрична на X_0, кососимметрична на X_1, $f(X_i, X_j)=0$ при $i\neq j$), то $J(X, f)=F\oplus X$ с умножением

$$(\alpha+x)(\beta+y)=(\alpha\beta+f(x, y))+(\alpha y+\beta x)$$

образует йорданову супералгебру с $J_0=F\oplus X_0$, $J_1=X_1$. Для любой Z_2-градуированной й. а. $J=J_0\oplus J_1$ ее грассманова оболочка $G(J)=G_0\otimes J_0+G_1\otimes J_1$ является йордановой супералгеброй.

Вещественная й. а. J называется *JB-алгеброй*, если на ней определена полная норма $\|\ \|$, удовлетворяющая условиям: 1) $\|ab\|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|$, 2) $\|a^2\|=\|a\|^2$, 3) $\|a^2\|\leqslant\|a^2+b^2\|$. Конечномерные JB-алгебры — это в точности формально вещественные й. а. Примерами бесконечномерных JB-алгебр служат алгебра $B(H)$ самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H (с йордановым умножением) и алгебра $C(S, H(\mathbf{O}_3))$ всех непрерывных функций на компакте S со значениями в $H(\mathbf{O}_3)$, где $\mathbf{O}$ — алгебра чисел Кэли. Эти примеры достаточно общие, как показывает следующая теорема, аналогичная теореме Гельфанда—Наймарка для C^*-алгебр: для любой JB-алгебры J существуют комплексное гильбертово пространство H и компактное топологическое

пространство S такие, что J изометрически изоморфна замкнутой подалгебре алгебры $B(H)\times C(S, H(\mathbf{O}_3))$ (см. [168], с. 155—156).

В основе современной структурной теории й. а. лежат понятия абсолютного делителя нуля, невырожденной алгебры и невырожденного радикала.

Элемент $a\neq 0$ й. а. J называется *абсолютным делителем нуля*, если $JU_a=0$. Алгебра J, не содержащая абсолютных делителей нуля, называется *невырожденной*. Наименьший идеал I алгебры J, для которого факторалгебра J/I невырождена, называется *невырожденным радикалом* алгебры J. Мы будем обозначать его через $\operatorname{rad} J$.

Примеры. 1) Пусть $J=A^{(+)}$, где A ассоциативна. Тогда абсолютные делители нуля в $A^{(+)}$ — это такие элементы a, для которых $aAa=0$. Алгебра $A^{(+)}$ невырождена тогда и только тогда, когда A полупервична. Радикал $\operatorname{rad} A^{(+)}$ совпадает с первичным радикалом алгебры A. 2) J — конечномерная й. а. Тогда $\operatorname{rad} J=\operatorname{Nil} J$ наибольший нильпотентный идеал в J, и J невырождена тогда и только тогда, когда она полупроста.

Всякая невырожденная й. а. изоморфна подпрямой сумме первичных невырожденных алгебр, которые характеризуются как алгебры J одного из видов (Зельманов Е. И.//Сиб. мат. ж. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 69—104):

1) J — центральный порядок (см. с. 401) в й. а. билинейной формы $J(X, f)$;

2) $A^{(+)}\lhd J\subseteq Q(A)^{(+)}$, где A — первичная ассоциативная алгебра, $Q(A)$ — ее мартиндейловское кольцо частных;

3) $H(A, *)\lhd J\subseteq H(Q(A), *)$, где A — ассоциативная первичная алгебра с инволюцией $*$;

4) J — *кольцо Алберта* (т. е. центральный порядок в алгебре Алберта).

В частности, всякая первичная невырожденная й. а. либо специальна, либо является кольцом Алберта.

Условие невырожденности в теореме существенно: С. В. Пчелинцев (Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 1) построил пример (специальной) первичной й. а., обладающей базисом из абсолютных делителей нуля и, естественно, не являющейся алгеброй ни одного из типов 1)—4).

Всякая простая й. а. является невырожденной, поэтому описание простых й. а. следует из описания первичных невырожденных й. а. При этом простые й. а. характеризуются как алгебры одного из типов:

1) $J = J(X, f)$;

2) $J = A^{(+)}$, где A — ассоциативная простая алгебра;

3) $J = H(A, *)$, где A — простая ассоциативная алгебра с инволюцией $*$;

4) J — алгебра Алберта.

Аналогичным образом описываются й. а. с делением: нужно только в случаях 2) и 3) считать, что A — тело, в случае 1) квадратичная форма $f(x, x)$ не должна представлять квадратов элементов из поля F, а в случае 4) J также должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям (см. [177], с. 416, 421).

Понятие абсолютного делителя нуля и невырожденности естественным образом переносятся на й. п. и й. т. с. Первичные невырожденные и простые й. п. и й. т. с. также описаны (Зельманов Е. И.//Сиб. мат. ж. — 1983. — Т. 24, № 4. — С. 23—37; 1984. — Т. 25, № 5. — С. 50—62; 1985. — Т. 26, № 1. — С. 71—82). Приведем классификацию простых й. п.: йорданова пара V проста тогда и только тогда, когда она имеет один из видов: 1) $V = (R_{-1}, R_1)$, где $R = R_{-1} \oplus R_0 \oplus R_1$ — простая 3-градуированная ассоциативная алгебра, $R_{-1} + R_1 \neq 0$; 2) $V = (H(R_{-1}, *), H(R_1, *))$, где R — та же, что и в 1), с инволюцией $*$, сохраняющей градуировку; 3) $V = V(J(X, f)$; 4) $V = (M_{1,2}(\mathbf{O}), M_{1,2}(\mathbf{O}^\circ))$ — пара 1×2-матриц над алгеброй Кэли—Диксона $\mathbf{O}$ с умножением $\{xyx\} = x(\bar{y}^t x)$, где $\bar{y}^t$ — матрица, транспонированная к $\bar{y}$, $\mathbf{O}^\circ$ антиизоморфна $\mathbf{O}$; 5) $V = V(J)$, где J — алгебра Алберта.

Обратимся теперь к рассмотрению свойств радикала $\operatorname{rad} J$. Во всякой й. а. J определены, как и в случае альтернативных алгебр, квазирегулярный радикал $\operatorname{Rad} J$ (наибольший квазирегулярный идеал), ниль-радикал $\operatorname{Nil} J$, локально нильпотентный $\mathrm{LN}(J)$ и первичный $\mathrm{P}(J)$ радикалы, связанные включениями $\operatorname{Rad} J \supseteq \operatorname{Nil} J \supseteq \mathrm{LN}(J) \supseteq \mathrm{P}(J)$. (Впрочем, до сих пор неясно, является ли идеал $\mathrm{P}(J)$ «настоящим радикалом», так как неизвестно, может ли полупервичная й. а. содержать Р-радикальные идеалы). Место ра-

дикала $\operatorname{rad} J$ среди этих радикалов показывает теорема: во всякий й. а. J верны включения $\mathrm{LN}(J) \supseteq \supseteq \operatorname{rad} J \supseteq \mathrm{P}(J)$, каждое из которых, вообще говоря, может быть строгим (Зельманов Е. И.//1982.— Т. 23, № 6.— С. 100—116; Пчелинцев С. В.// Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— Т. 50, № 1). В частности, в произвольной й. а. J любое множество абсолютных делителей нуля порождает локально нильпотентный идеал.

В конечномерных й. а. все упомянутые выше радикалы совпадают. Более того, они все совпадают в классе й. а. с условием минимальности для *внутренних* (или *квадратичных*) *идеалов*. Последние служат аналогами односторонних идеалов ассоциативных алгебр и определяются как такие Ф-подмодули K й. а. J, в которых $\{kak\} \in K$ для любых $k \in K$, $a \in J$.

Примеры. 1) Пусть $J = A^{(+)}$, где A ассоциативна. Тогда всякий односторонний идеал алгебры A является внутренним идеалом в $A^{(+)}$. 2) Для любого $a \in J$ множество $JU_a = \{xU_a \mid x \in J\}$ является внутренним идеалом й. а. J.

Для й. а. справедлив следующий аналог классической теории Веддерберна—Артина: если й. а. J удовлетворяет условию минимальности для внутренних идеалов, то $\operatorname{Rad} J$ нильпотентен и конечномерен, а факторалгебра $J/\operatorname{Rad} J$ разлагается в конечную прямую сумму простых й. а. следующих видов: 1) й. а. с делением; 2) $H(A, *)$ для ассоциативной артиновой $*$-простой алгебры A с инволюцией $*$; 3) $J(X, f)$; 4) алгебра Алберта ([37], с. 389, 394; [177], с. 179).

Многие результаты из теории альтернативных алгебр о связи разрешимости и нильпотентности справедливы и для й. а. Например, всякая конечно порожденная разрешимая й. а. нильпотентна; если J разрешима, то J^2 нильпотентна; над полем характеристики 0 йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса разрешима. В то же время в отличие от альтернативных алгебр в конечно порожденных й. а. могут содержаться разрешимые, но не нильпотентные подалгебры.

Свободные й. а. изучены сравнительно слабо. Одним из наиболее глубоких результатов об их строении является *теорема Ширшова*, утверждающая, что свободная й. а. от двух порождающих специальна

([37], с. 90). Свободная й. а. $J[X]$ при $|X| \geqslant 3$ не специальна и содержит делители нуля, а при достаточно большом числе порождающих $\operatorname{rad} J[X] \neq 0$ (Медведев Ю. А.//Сиб. мат. ж. — 1985. Т. 26, № 2.— С. 140—148). Для специальных й. а. роль свободной алгебры играет *свободная специальная й. а.* $SJ[X]$, которая определяется как наименьший Ф-подмодуль в свободной ассоциативной алгебре $\operatorname{Ass}[X]$, содержащий X и замкнутый относительно йорданова умножения. Элементы й. а. $SJ[X]$ называются *йордановыми элементами* алгебры $\operatorname{Ass}[X]$. Легко видеть, что $SJ[X] \subseteq H(\operatorname{Ass}[X], *)$, где $*$ — инволюция алгебры $\operatorname{Ass}[X]$, тождественная на X: $(x_1x_2 \ldots x_n)^* = x_n \ldots x_2x_1$. Й. а. $H(\operatorname{Ass}[X], *)$ порождается множеством X и всевозможными *тетрадами* $\{x_ix_jx_kx_l\} = x_ix_jx_kx_l + x_lx_kx_jx_i$; при $|X| \leqslant 3$ она совпадает с й. а. $SJ[X]$, а при $|X| > 3$ — строго содержит ее (так как тетрады не являются йордановыми элементами). Никаких критериев йордановости элементов из $\operatorname{Ass}[X]$ при $|X| > 3$ пока не найдено.

Всякая специальная й. а. является гомомофным образом алгебры $SJ[X]$, однако обратное не всегда верно. Например, факторалгебра $SJ[x, y, z]/I$, где I — идеал, порожденный элементом $x^2 - y^2$, является исключительной. Отсюда следует, что класс SJord всех специальных й. а. нельзя задать с помощью тождеств. Пусть π: $J[X] \to SJ[X]$ — каноническое гомоморфное наложение, тогда $\operatorname{Ker} \pi \neq 0$ при $|X| \geqslant 3$. Элементы из $\operatorname{Ker} \pi$ называются *s-тождествами*; они выполняются во всех специальных й. а., но не являются тождествами в классе всех й. а. Примером такого тождества является *s-тождество Гленни* $G(x, y, z) = K(x, y, z) - K(y, x, z)$, где

$$K(x, y, z) = 2\{\{y\{xzx\}y\}z(xy)\} - \{y\{x\{z(xy)z\}x\}y\}.$$

Обозначим через $\overline{\text{SJord}}$ класс всех й. а., удовлетворяющих всем s-тождествам, и через Jord — класс всех й. а. Тогда справедливы строгие включения $\text{SJord} \subset \overline{\text{SJord}} \subset \text{Jord}$ (алгебра Алберта не удовлетворяет тождеству Гленни, поэтому не лежит в $\overline{\text{SJord}}$). Вопрос об описании s-тождеств пока остается открытым. Неясно даже, следуют ли они все из конечного числа s-тождеств.

Заметим, что класс SJord можно задать квазитождествами, т. е. выражениями вида $(f(x)=0 \Rightarrow g(x)=$ $=0)$. Однако этого нельзя сделать с помощью конечного числа квазитождеств. Более того, недостаточно даже любого числа квазитождеств от ограниченного набора переменных (Сверчков С. Р.//Алгебра и логика. — 1983. — № 5.— С. 563—573).

Й. а. называется *йордановой* PI-*алгеброй*, если в ней выполнено некоторое тождество, не являющееся s-тождеством. Для йордановых PI-алгебр справедливы аналоги основных структурных теорем из теории ассоциативных PI-алгебр. Так, например, если J — йорданова PI-алгебра над полем F, то 1) $\mathrm{Nil}\, J=$ $=\mathrm{LN}(J)=\mathrm{rad}\, J$; 2) если J первична и невырождена, то она является центральным порядком в простой й. а. с тем же тождеством: 3) если J проста, то либо J конечномерна над центром, либо $J=J(X, f)$; 4) если J конечно порождена, то $\mathrm{Rad}\, J$ нильпотентен (Зельманов Е. И.//Сиб. мат. ж. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 69—104; Медведев Ю. А.//Изв. АН СССР. — Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 1. — С. 64—78).

Отметим, что условие невырожденности J в 2) и условие конечной порожденности J в 4) являются существенными.

Как и в случае альтернативных алгебр, эффективным методом изучения йордановых PI-алгебр является переход к различным обертывающим алгебрам. В связи с этим отметим следующий результат: если J — конечно порожденная йорданова PI-алгебра, то универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(J)$ является (ассоциативной) PI-алгеброй (Медведев Ю. А.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 1. — С. 64—78), а если J специальна, то ее ассоциативная обертывающая алгебра также является PI-алгеброй (Шестаков И. П.//Мат. сб. — 1983. — Т. 122, № 1. — С. 31—40).

3.6. Моноассоциативные алгебры, близкие к альтернативным и йордановым. Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем, что $1/2 \in \Phi$ и F поле характеристики $\neq 2$.

Естественным обобщением класса йордановых алгебр на некоммутативный случай является класс алгебр, удовлетворяющих йорданову тождеству

$$(x^2 y)\, x = x^2 (yx).$$

При наличии в алгебре единицы из этого тождества легко следует тождество *эластичности*

$$(xy)\,x = x\,(yx).$$

Таким образом, если мы хотим, чтобы вводимый нами класс алгебр был устойчив относительно присоединения к алгебре единицы, то мы должны добавить к йорданову тождеству тождество эластичности. Алгебры, удовлетворяющие этим двум тождествам, называются *некоммутативными йордановыми* (н. й.). При этом йорданово тождество можно заменить любым из следующих тождеств:

$$x^2(xy) = x(x^2y),\quad (yx)\,x^2 = (yx^2)\,x,\quad (xy)\,x^2 = x\,(yx^2).$$

Пусть A — н. й. алгебра, $a \in A$. Тогда операторы R_a, L_a, L_{a^2} порождают в алгебре умножений $M(A)$ коммутативную подалгебру, содержащую все операторы R_{a^k}, L_{a^m}; $k, m = 1, 2, \ldots$ В частности, всякая н. й. алгебра моноассоциативна.

Условие перестановочности операторов умножения на степени одного элемента полностью характеризуют н. й. алгебры, так как определяющие их тождества в операторном виде являются частными случаями этого условия $([L_{x^2}, R_x] = [L_x, R_x] = 0)$.

Еще одна характеризация н. й. алгебр такова: это эластичные алгебры A, для которых присоединенная алгебра $A^{(+)}$ является йордановой.

Класс н. й. алгебр содержит кроме йордановых, все альтернативные алгебры, а также произвольные антикоммутативные алгебры. Приведем новые примеры н. й. алгебр.

Пусть A — алгебра над полем F, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 1/2$. Определим на векторном пространстве A новое умножение

$$a \underset{\lambda}{\cdot} b = \lambda ab + (1-\lambda)\,ba.$$

Полученную алгебру обозначим через $A^{(\lambda)}$. Переход от алгебры A к $A^{(\lambda)}$ обратим: $A = (A^{(\lambda)})^{(\mu)}$ для $\mu = \frac{\lambda}{2\lambda - 1}$. Свойства алгебр A и $A^{(\lambda)}$ довольно тесно связаны: идеалы [подалгебры] алгебры A являются идеалами [подалгебрами] в $A^{(\lambda)}$, алгебра $A^{(\lambda)}$ нильпотентна, разрешима, проста тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает A. Если

A — ассоциативная алгебра, то нетрудно проверить, что $A^{(\lambda)}$ является н.й. алгеброй. При этом если в A не выполнено тождество $[[x, y], z] = 0$, то $A^{(\lambda)}$ неассоциативна. В частности, если A — простая некоммутативная ассоциативная алгебра, то $A^{(\lambda)}$ дает нам пример простой неассоциативной н. й. алгебры. Алгебры вида $A^{(\lambda)}$ для ассоциативной алгебры A называются *расщепляемыми квазиассоциативными алгебрами*. Более общо, алгебра A называется *квазиассоциативной*, если некоторое ее скалярное расширение — расщепляемая квазиассоциативная алгебра. Всякая квазиассоциативная алгебра также будет н. й. алгеброй.

Пусть $0 \neq \alpha_1, \ldots, 0 \neq \alpha_n \in F$, и алгебры $A(\alpha_1) = (F, \alpha_1), \ldots, A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (A(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \alpha_n)$ получены из F последовательным применением процесса Кэли—Диксона. Тогда $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — простая центральная квадратичная н. й. алгебра размерности 2^n. Вообще, любая квадратичная эластичная алгебра является н. й. алгеброй.

Пусть A — конечномерная моноассоциативная алгебра, на которой определена билинейная симметрическая форма (x, y), удовлетворяющая условиям: 1) $(xy, z) = (x, yz)$ для любых $x, y, z \in A$; 2) $(e, e) \neq 0$, если $e^2 = e \neq 0$; 3) $(x, y) = 0$, если xy — нильпотентный элемент. Тогда $\mathrm{Nil}\, A = \mathrm{Nil}\, A^{(+)} = \{x \in A \mid (x, A) = 0\}$, и если характеристика поля F не равна 2, 5, то факторалгебра $A/\mathrm{Nil}\, A$ является н. й. алгеброй ([249], с. 136).

Всякая конечномерная ниль-полупростая н. й. алгебра над полем F имеет единицу и разлагается в прямую сумму простых алгебр. При этом если характеристика F равна нулю, то каждое из простых слагаемых есть алгебра одного из следующих видов: (коммутативная) йорданова алгебра; квазиассоциативная алгебра; квадратичная эластичная алгебра ([249], с. 142).

Над полями положительной характеристики существует еще один тип простых н. й. алгебр. Именно, алгебра A с единицей 1 называется *нодальной*, если любой элемент из A представляется в виде $\alpha \cdot 1 + n$, где $\alpha \in F$ и n нильпотентен, и при этом нильпотентные элементы не образуют подалгебру в A. Нодальных алгебр не существует в классах альтернативных и йордановых алгебр, а также в классе н. й. алгебр

характеристики 0. Всякая нодальная алгебра гомоморфно отображается на некоторую простую нодальную алгебру.

Пусть A — простая конечномерная н. й. алгебра над F. Тогда A либо антикоммутативна, либо удовлетворяет тому же заключению, что в случае нильполупростых алгебр характеристики 0, либо является нодальной алгеброй. В последнем случае $\operatorname{char} F = p > 0$, алгебра $A^{(+)}$ изоморфна p^n-мерной ассоциативно-коммутативной алгебре усеченных многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$, $x_i^p = 0$, и умножение в A задается формулой

$$fg = f \cdot g + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где точка означает умножение в $A^{(+)}$, $c_{ij} = -c_{ji}$ — произвольные элементы из A, среди которых хотя бы один обратим в $A^{(+)}$ ([249], стр. 144).

Конструкция, описанная выше, не всегда дает простую алгебру. Однако все такие алгебры размерности p^2 — простые, и для каждого четного n существуют простые алгебры такого вида размерности p^n.

В отличие от случая альтернативных и йордановых алгебр в классе н. й. алгебр, вообще говоря, не выполняется аналог теоремы Веддерберна об отщеплении ниль-радикала.

Промежуточное положение между произвольными моноассоциативными алгебрами и н. й. алгебрами занимают эластичные моноассоциативные алгебры. Пусть A — конечномерная алгебра этого вида над полем характеристики 0. Отображение $x \mapsto [a, x]$ является дифференцированием присоединенной коммутативной моноассоциативной алгебры $A^{(+)}$, а так как ниль-радикал моноассоциативной алгебры характеристики 0 устойчив относительно дифференцирования (Слинько А. М.//Сиб. мат. ж. — 1972. — Т. 13, № 6. — С. 1395—1397), то справедливо включение $[A, \operatorname{Nil} A^{(+)}] \subseteq \operatorname{Nil} A^{(+)}$, откуда следует, что $\operatorname{Nil} A^{(+)} \lhd A$ и $\operatorname{Nil} A^{(+)} = \operatorname{Nil} A$. Значит, $(A/\operatorname{Nil} A)^{(+)} = A^{(+)}/\operatorname{Nil} A^{(+)}$ — ниль-полупростая конечномерная коммутативная моноассоциативная алгебра. Над полем характеристики 0 все такие алгебры йордановы, поэтому $A/\operatorname{Nil} A$ — н. й. алгебра. Итак, всякая конеч-

номерная нильполупростая эластичная моноассоциативная алгебра над полем характеристики 0 является н. й. алгеброй. В общем случае справедлива следующая теорема: если A — конечномерная ниль-полупростая эластичная моноассоциативная алгебра над бесконечным полем характеристики $\neq 2$, 3, то A имеет единицу и разлагается в прямую сумму простых алгебр, каждая из которых либо н. й. алгебра, либо некоторая алгебра степени 2 над полем положительной характеристики (Oehmke R. H.//Ann. Math. — 1958. — V. 68. — P. 221—230; Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1969. — V. 63, N 1. — P. 40—41).

Алгебры последнего вида пока не описаны. Некоторый метод их описания дан в работе Block R. E.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1968. — V. 61, № 2. — P. 394—397, где доказано, что для каждой такой алгебры A алгебра $A^{(+)}$ также является простой алгеброй (известного строения). В работе Mayne J. H.// Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 172. — P. 69—81 приведен пример эластичной моноассоциативной простой алгебры степени 2, которая не коммутативна и не является н. й. алгеброй.

Строение произвольных конечномерных ниль-полупростых моноассоциативных алгебр пока не ясно. Известно, что в этом случае возникают новые простые алгебры, среди которых есть нодальные алгебры, даже над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Пример. Пусть V — векторное пространство над полем F размерности $2n$ с невырожденной кососимметрической билинейной формой (x, y). Определим на векторном пространстве $A = F \oplus V$ умножение по правилу $(\alpha + v)(\beta + u) = (\alpha\beta + (v, u)) + (\alpha u + \beta v)$. Тогда A является алгеброй над F, которая квадратична (и, следовательно, моноассоциативна), проста и нодальна.

Среди алгебр, не удовлетворяющих тождеству эластичности, наиболее изученными являются правоальтернативные алгебры. Напомним, что алгебра называется *правоальтернативной* (п. а.), если в ней выполнено тождество

$$(xy)\,y = xy^2.$$

Пусть A — п. а. алгебра над Φ, тогда в алгебре ее правых умножений $R(A)$ для любых $a, b \in A$ выполнены соотношения

$$R_{a^2} = R_a^2, \quad R_{a \cdot b} = R_a \cdot R_b,$$

где $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ — умножение в присоединенной алгебре $A^{(+)}$. Следовательно, отображение $a \mapsto R_a$ является гомоморфизмом алгебры $A^{(+)}$ в специальную

йорданову алгебру $R(A)^{(+)}$. Если в A есть единица, то это отображение инъективно. Так как класс п. а. алгебр замкнут относительно присоединения к алгебре единицы, отсюда следует, что для всякой п. а. алгебры A присоединенная алгебра $A^{(+)}$ является специальной йордановой алгеброй.

Приведенное утверждение позволяет применить к изучению п. а. алгебр развитый аппарат теории йордановых алгебр. Именно на этом пути получены наиболее сильные результаты теории п. а. алгебр.

В п. а. алгебре A для любого $a \in A$ имеют место соотношения

$$R_{a^k} R_{a^n} = R_{a^{k+n}}; \quad k, \ n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$$

В частности, всякая п. а. алгебра A моноассоциативна и в ней однозначно определен ниль-радикал $\mathrm{Nil}\, A$. Факторалгебра $A/\mathrm{Nil}\, A$ альтернативна (Скосырский В. Г.//Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 2.— С. 185—192).

Таким образом, всякая простая п. а. алгебра, не являющаяся ниль-алгеброй, альтернативна (и, следовательно, либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли—Диксона). Всякая п. а. алгебра без нильпотентных элементов альтернативна. В п. а. алгебре A для любых $a, b \in A$ элемент $(a, \ a, \ b)$ порождает ниль-идеал в A.

В общем случае идеал, порожденный ассоциатором $(a, \ a, \ b)$, не является разрешимым. Однако неясно, не будет ли он ниль-алгеброй фиксированного ограниченного индекса. Известно лишь, что $(a, a, b)^4 = 0$.

Подпространство L алгебры A называется *правонильпотентным*, если $L^{\langle n \rangle} = 0$ для некоторого n, где $L^{\langle 1 \rangle} = L$, $L^{\langle n+1 \rangle} = L^{\langle n \rangle} L$.

Пусть A — п. а. ниль-алгебра ограниченного индекса. Тогда всякое конечномерное подпространство в A правонильпотентно ([37], с. 407). В частности, конечномерная п. а. ниль-алгебра правонильпотентна и поэтому не может быть простой алгеброй. В то же время она может быть ненильпотентной.

Ограничение «не ниль» в описании простых п. а. алгебр в общем случае существенно: Михеев И. М. (Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 682—710) построил пример простой п. а. ниль-алгебры (с

тождеством $x^3 = 0$), не являющейся альтернативной. Таких примеров нет среди правоартиновых п. а. алгебр, как показывает следующая теорема: если A — п. а. алгебра, удовлетворяющая условию минимальности для правых идеалов, то идеал $N = \mathrm{Nil}\, A$ правонильпотентен, а факторалгебра A/N является полупростой артиновой альтернативной алгеброй (Скосырский В. Г.//Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 2. — С. 205—210).

Условие правой артиновости здесь нельзя заменить на левую: в упомянутой выше простой ниль-алгебре нет собственных левых идеалов.

Как и в случае некоммутативных йордановых алгебр, в классе п. а. алгебр, вообще говоря, не выполняется теорема Веддерберна об отщеплении радикала.

Кроме правоальтернативных алгебр, важным примером неэластичных моноассоциативных алгебр являются алгебры типа (γ, δ), возникшие при изучении классов алгебр, обладающих следующим структурным свойством: если I — идеал алгебры A, то I^2 — тоже идеал в A. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое однородное многообразие моноассоциативных алгебр, все алгебры которого удовлетворяют вышеприведенному условию, причем $\mathfrak{M}$ содержит все ассоциативные алгебры. Тогда либо $\mathfrak{M}$ — подкласс альтернативных алгебр, либо $\mathfrak{M}$ задается тождествами:

$$(x, x, x) = 0,$$
$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0,$$
$$(x, y, z) + \gamma (y, x, z) + \delta (z, x, y) = 0,$$

где γ и δ — такие фиксированные скаляры, что $\gamma^2 - \delta^2 + \delta = 1$.

Алгебры, удовлетворяющие этим тождествам, называются *алгебрами типа* (γ, δ).

Пусть A — конечномерная алгебра типа (γ, δ) над полем F характеристики $\neq 2$, 3, 5. Тогда радикал $\mathrm{Nil}\, A$ нильпотентен, а факторалгебра $\bar{A} = A/\mathrm{Nil}\, A$ ассоциативна. Если при этом алгебра $\bar{A}$ сепарабельна над F, то $A = B \oplus \mathrm{Nil}\, A$, где B — подалгебра в A, изоморфная $\bar{A}$ (Никитин А. А.//Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 501—533).

Всякая простая (не обязательно конечномерная) алгебра типа (γ, δ) характеристики $\neq 2$, 3, 5 ассоциа-

тивна (Марковичев А. С.//Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 2.— С. 181—200; Ng Seong Nam// Comm. Algebra. — 1984. — V. 12, № 9—10. — С. 1125—1137).

В то же время существуют первичные неассоциативные алгебры типа (γ, δ) (Пчелинцев С. В.// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 1). В этих алгебрах, как и вообще во всякой неассоциативной алгебре типа (γ, δ), содержатся ненулевые локально нильпотентные идеалы.

3.7. Алгебры Ли. Напомним, что алгебра L над кольцом скаляров Φ называется *алгеброй Ли*, если умножение в L удовлетворяет тождествам

$$x^2 = 0 \text{ (антикоммутативность)},$$
$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \text{ (тождество Якоби)}.$$

Если A — ассоциативная алгебра над Φ, то алгебра $A^{(-)}$ с новым (скобочным) умножением $[x, y] = xy - yx$, как отмечалось в п. 3.1, является алгеброй Ли над Φ. В связи с этим операцию умножения в алгебрах Ли часто обозначают через $[x, y]$. Всякий Φ-подмодуль L алгебры A, замкнутый относительно операции $[\ ,\ ]$, является алгеброй Ли. Если $\Phi = F$ — поле, то приведенная конструкция является универсальной: по *теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта* любая алгебра Ли L над F изоморфно вкладывается в алгебру $A^{(-)}$ для подходящей ассоциативной алгебры A (см. [32], с. 178; [87], с. 170).

Пусть V — некоторый Φ-модуль, $A = \mathrm{End}_\Phi V$. Алгебра Ли $(\mathrm{End}\, V)^{(-)}$ называется *алгеброй Ли эндоморфизмов Φ-модуля V* и обозначается через $gl(V)$. Если V — свободный модуль над Φ ранга n, то вместо $gl(V)$ употребляется обозначение $gl(n, \Phi)$. Заметим, что $gl(n, \Phi) \simeq M_n(\Phi)^{(-)}$, где $M_n(\Phi)$ — ассоциативная алгебра матриц порядка n над Φ.

В случае, когда $\Phi = F$ — поле, алгебры Ли вида $gl(n, F)$ называют обычно *полными линейными алгебрами Ли*, а их подалгебры — *линейными алгебрами Ли*. Важную роль в структурной теории конечномерных алгебр Ли играют следующие четыре семейства A_l, B_l, C_l, D_l $(l \geqslant 1)$ линейных алгебр, которые называются *классическими алгебрами Ли*.

A_l: Пусть $\dim V = l + 1$. Обозначим через $sl(V)$ или $sl(l+1, F)$ множество всех эндоморфизмов век-

торного пространства с нулевым следом; тогда $sl(V)$ оказывается подалгеброй (и даже идеалом) в $gl(V)$, называемой *специальной линейной алгеброй Ли.* Заметим, что $\dim sl(l+1, F) = l(l+2)$.

B_l: Пусть $\dim V = 2l+1$ и f — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, матрица которой в некотором базисе V имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}$, где E_l — единичная матрица порядка l. *Ортогональной алгеброй Ли* $o(2l+1, F)$ называется подалгебра $o(V)$ алгебры $gl(V)$, состоящая из всех эндоморфизмов φ пространства V, кососимметрических относительно формы f (т. е. удовлетворяющих условию $f(\varphi(v), w) = -f(v, \varphi(w))$); при этом $\dim o(2l+1, F) = l(2l+1)$.

C_l: Пусть $\dim V = 2l$ и f — невырожденная кососимметрическая форма на V с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$. *Симплектической алгеброй Ли* называется подалгебра $sp(V)$ или $sp(2l, F)$ алгебры $gl(V)$, состоящая из всех эндоморфизмов пространства V, кососимметрических относительно формы f; при этом $\dim sp(2l, F) = l(2l+1)$.

D_l: *Ортогональная алгебра Ли* $o(2l, F)$ определяется аналогично случаю B_l, только здесь $\dim V = 2l$ и матрица формы f имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}$, при этом $\dim o(2l, F) = l(2l-1)$.

Если F — поле характеристики 0, то все классические алгебры Ли A_l, B_l, C_l, D_l $(l \geqslant 1)$ и D_l $(l \geqslant 3)$ являются простыми.

Приведем теперь примеры несерийных или *особых* простых конечномерных алгебр Ли над F.

Пусть $\mathbf{O} = \mathbf{O}(F)$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над F, $J = H(\mathbf{O}_3)$ — йорданова алгебра эрмитовых матриц порядка 3 над $\mathbf{O}$ (алгебра Алберта). Тогда алгебры $\mathbf{G}_2 = \mathrm{Der}\,\mathbf{O}$, $\mathbf{F}_4 = \mathrm{Der}\,J$, $\mathbf{E}_6 = \mathrm{Strl}_0\,J$ (приведенная структурная алгебра алгебры J) и $\mathbf{E}_7 = K(J)$ (конструкция Титса — Кантора — Кёхера для J) являются простыми центральными алгебрами Ли соответственно размерностей 14, 52, 78 и 133. Алгебра $\mathbf{E}_8$ строится с помощью следующей *конструкции Титса.* Пусть $t(a)$ — след элемента a в алгебре $\mathbf{O}$, $\mathrm{tr}(x)$ — след матрицы x в алгебре J, $\mathbf{O}_0$ и J_0 — множества элементов с нулевым следом соответ-

ственно в $\mathbf{O}$ и в J. Для $a, b \in \mathbf{O}$ и $x, y \in J$ положим $a * b = ab - \frac{1}{2} t(ab)$, $x * y = xy - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(xy)$; тогда $a * b \in \mathbf{O}_0$, $x * y \in J_0$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $\mathbf{E}_8 = \operatorname{Der} \mathbf{O} \oplus \mathbf{O}_0 \otimes J_0 \oplus \operatorname{Der} J$ и определим на ней антикоммутативное умножение по правилам: 1) $\operatorname{Der} \mathbf{O} \oplus \operatorname{Der} J$ — подалгебра в $\mathbf{E}_8$, являющаяся прямой суммой алгебр; 2) $[a \otimes x, D] = aD \otimes x$, $[a \otimes x, E] = a \otimes xE$ для $D \in \operatorname{Der} \mathbf{O}$, $E \in \operatorname{Der} J$, $a \in \mathbf{O}_0$ $x \in J_0$; 3) $[a \otimes x, b \otimes y] = \frac{1}{12} tr(xy) D_{a,b} + (a * b) \otimes (x * y) + \frac{1}{2} t(ab) [R_x, R_y]$ для всех $a, b \in \mathbf{O}_0$, $x, y \in J_0$, где $D_{a,b} = R_{[a,b]} - L_{[a,b]} - 3[L_a, R_b] \in \operatorname{Der} \mathbf{O}$. Полученная алгебра $\mathbf{E}_8$ оказывается простой алгеброй Ли размерности 248. Простые алгебры Ли $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$ называются *особыми* или *исключительными* алгебрами Ли.

Приведенными примерами исчерпываются все простые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики: всякая такая алгебра изоморфна или одной из классических алгебр A_l $(l \geqslant 1)$, B_l $(l \geqslant 2)$, C_l $(l \geqslant 3)$, D_l $(l \geqslant 4)$, или одной из особых алгебр $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, причем все перечисленные здесь алгебры неизоморфны ([32], с. 163).

Структурная теория конечномерных алгебр Ли имеет законченный вид лишь над полем F характеристики 0. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над F, $S = S(L)$ — ее разрешимый радикал, $N = N(L)$ — наибольший нильпотентный идеал или *ниль-радикал алгебры Ли* L. Идеал $N(A)$ определен однозначно во всякой конечномерной алгебре Ли A, так как в любой алгебре Ли сумма двух нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом. Включение $S \supseteq N$ может быть строгим, но если $N = 0$, то и $S = 0$. В последнем случае алгебра L называется *полупростой*. Факторалгебра L/S является полупростой; всякая полупростая алгебра над F изоморфна прямой сумме простых алгебр. Обратно, прямая сумма простых алгебр всегда является полупростой алгеброй ([32], с. 84). Аналогом теоремы Веддербёрна—Мальцева об отщеплении радикала в конечномерных ассоциативных алгебрах для алгебр Ли служит *теорема Леви—Мальцева—Хариш-Чандра*, утверждающая, что L содержит полупростую подалгебру $B \simeq L/S$, для которой $L = B \oplus S$ (прямая сумма векторных про-

странств); при этом, если B_1 — другая такая полупростая подалгебра, то $B_1 = \varphi(B)$, где φ — автоморфизм алгебры L, являющийся произведением автоморфизмов вида $\exp D$, D — нильпотентное внутреннее дифференцирование вида $D = R_x$, $x \in N$ (см. [32], с. 105—106). Для любого дифференцирования D алгебры L верно включение $S^D \subseteq N$, поэтому $LS = L^2 \cap S \subseteq N$. В частности, L разрешима тогда и только тогда, когда L^2 нильпотентна ([32], с. 63, 87). Если $F = \bar{F}$, где $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F, то подалгебра L алгебры $gl(n, F)$ разрешима тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой подалгебре алгебры верхнетреугольных $n \times n$-матриц $t(n, F) = \{(a_{ij}) \in gl(n, F) \mid a_{ij} = 0$ при $i > j\}$. Если L — разрешимая алгебра над $F = \bar{F}$ размерности n, то в L существует последовательность идеалов $L = L_n \supset \supset L_{n-1} \supset \ldots \supset L_0 = 0$ такая, что $\dim L_j = j$ для всех $j = 0, 1, \ldots, n$ (*теорема Ли* — см. [32], с. 62; [28], с. 22).

Элемент x антикоммутативной алгебры A называется *энгелевым* (*индекса* n), если оператор R_x нильпотентен (индекса n); алгебра A называется *энгелевой*, если все ее элементы энгелевы. Конечномерная алгебра Ли L нильпотентна тогда и только тогда, когда она энгелева (*теорема Энгеля*). Всякий элемент $x \in N(L)$ является энгелевым. Обратно, если $x \in S(L)$ и x энгелев, то $x \in N(L)$ (см. [32], с. 47).

Определим на векторном пространстве алгебры L над F ($\operatorname{char} F = 0$) билинейную форму K (*форму Киллинга*), полагая $K(x, y) = \operatorname{tr}(R_x R_y)$. Форма K симметрична и ассоциативна: $K(x, y) = K(y, x)$, $K(xy, z) = K(x, yz)$. *Критерий Картана* утверждает, что алгебра L полупроста [разрешима] тогда и только тогда, когда форма K невырождена [когда $K(L^2, L) = 0$]. Радикал $S(L)$ совпадает с ортогональным дополнением к L^2 относительно K (см. [32], с. 80, 82, 86).

Эффективным средством изучения конечномерных алгебр Ли является теория представлений или лиевых модулей. Линейное отображение ρ: $A \to \operatorname{End}_\Phi V$ называется (правым) *представлением* Φ-*алгебры Ли* A, если для любых $a, b \in A$

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a).$$

Иначе говоря, представление ρ — это гомоморфизм алгебр Ли ρ: $A \to gl(V)$. В этом случае пространство V называется *лиевым A-модулем*. Ввиду антикоммутативности понятие лиева модуля эквивалентно понятию лиева бимодуля (см. п. 3.2): достаточно положить $av = -va$ $(a \in A,\ v \in V)$. Частным случаем представления является регулярное представление $x \mapsto R_x$, ядро которого совпадает с центром $\mathfrak{Z}(A)$ алгебры Ли A: $\mathfrak{Z}(A) = \{a \in A \mid aA = 0\}$. Конечномерная алгебра Ли L над полем F характеристики 0 полупроста тогда и только тогда, когда любой конечномерный (лиев) L-модуль вполне приводим (*теорема Вейля* — см. [17], с. 67—68). Если L разрешима и $\bar{F} = F$, то всякий неприводимый конечномерный L-модуль одномерен ([28], с. 22). Всякая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление (*теорема Адо—Ивасавы* — см. [32], с. 223, 225).

Основным инструментом при изучении представлений алгебры Ли L над Φ является понятие *универсальной ассоциативной обертывающей алгебры* $U(L)$, которая определяется как факторалгебра тензорной алгебры $T(L)$ по идеалу I, порожденному множеством элементов вида $a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$, где $a, b \in L$. Для любого представления ρ: $L \to \operatorname{End} V$ существует однозначно определенный гомоморфизм ассоциативных алгебр φ: $U(L) \to \operatorname{End} V$ такой, что $\rho(a) = \varphi(a + I)$ для любого $a \in L$. Если L является свободным модулем над Φ с базисом $\{e_j \mid j \in J\}$, то $U(L)$ также является свободным Φ-модулем с базисом из 1 и одночленов вида

$$\tilde{e}_{j_1} \otimes \tilde{e}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \tilde{e}_{j_n}, \quad j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_n, \quad n \geqslant 1,$$

где $\tilde{e}_i = e_i + I$. В частности, элементы $\{\tilde{e}_i\}$ линейно независимы в $U(L)$, так что отображение $a \mapsto \tilde{a}$ является вложением L в $U(L)$ (*теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта*, см. [32], с. 178, [81], с. 27). Для любой алгебры Ли L над полем алгебра $U(L)$ не имеет делителей нуля. Если L конечномерна, то $U(L)$ нётерова справа и слева и обладает правым и левым телами частных ([32], с. 186).

Свободная Φ-алгебра Ли $L[X]$ с множеством свободных порождающих X является свободным модулем над Φ (в отличие, например, от свободного альтернативного кольца, где есть 3-кручение).

Укажем один из способов выбора базиса в $L[X]$. Упорядочим каким-либо образом множество X, распространив затем этот порядок до частичного лексикографического порядка на множество всех ассоциативных слов от X. Ассоциативное слово u назовем правильным, если для всякого представления $u = u_1u_2$ справедливо неравенство $u > u_2u_1$. Если u, v — правильные слова и $u = vv_1$, то будем считать, что $v > u$. Неассоциативное слово $[u]$ назовем *правильным*, если: 1) правильно ассоциативное слово u, получающееся из $[u]$ опусканием скобок, 2) из $[u] = [v][w]$ следует, что $[v]$ и $[w]$ правильные, 3) из $[u] = [[v_1][v_2]][w]$ следует, что $v_2 \leqslant w$. Тогда множество всех правильных неассоциативных слов от X образует базис свободного Ф-модуля $L[X]$ (*базис Ширшова* — см. [6], с 74; [98], с. 65).

Всякая подалгебра свободной алгебры Ли над полем сама свободна ([6], с. 81). Пусть $\mathrm{Ass}[X]$ — свободная ассоциативная алгебра над Ф, тогда алгебра $L[X]$ изоморфна подалгебре алгебры Ли $\mathrm{Ass}[X]^{(-)}$, порожденной множеством X (см. [6], с. 73). В частности, $U(L[X]) \simeq \mathrm{Ass}[X]$, и можно считать, что $L[X] \subseteq \mathrm{Ass}[X]$. Элементы из $L[X]$ называются *лиевыми элементами* алгебры $\mathrm{Ass}[X]$. Рассмотрим линейное отображение π: $\mathrm{Ass}[X] \to L[X]$, заданное на однородных элементах так: $\pi(1) = 0$, $\pi(x_i) = x_i$, $\pi(x_1x_2 \ldots \ldots x_n) = [[x_1, x_2], \ldots, x_n]$. Если однородный элемент $w \in \mathrm{Ass}[X]$ степени $n \geqslant 1$ является лиевым, то $\pi(w) = nw$ (см. [6], с. 88). Другой критерий лиевости элементов из $\mathrm{Ass}[X]$ выглядит так: элемент w лиев тогда и только тогда, когда $\Delta(w) = 1 \otimes w + w \otimes 1$, где Δ: $\mathrm{Ass}[X] \to \mathrm{Ass}[X] \otimes \mathrm{Ass}[X]$ — такое диагональное отображение, что: 1) Δ — гомоморфизм, 2) $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $x \in X$ (см. [81], с. 32; [6], с. 367).

Алгебры $A = \mathrm{Ass}[X]$ и $L = L[X]$ можно естественным образом пополнить до алгебр $\hat{A}$ и $\hat{L}$ формальных степенных ассоциативных и лиевых рядов от X. Если $\Phi = F$ — поле характеристики 0, то для всякого ряда a из $\hat{A}$ без свободного члена однозначно определен элемент $e^a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$. В частности, элементы из $\hat{L}$ не имеют свободных членов, поэтому можно рассмотреть множество $e^{\hat{L}}$. Это множество мультипликативно замкнуто: для любых a, $b \in \hat{L}$ существует однозначно определенный элемент $c \in \hat{L}$, для которого $l^a l^b = l^c$. Положим $c = a \circ b$, тогда множество $\hat{L}$ относительно операции $\circ$ образует группу (*группу Магнуса*). Подгруппа этой группы, порожденная X,

является свободной группой со свободным порождающим множеством X (см. [6], с. 374). Явное выражение для $x \circ y$ в виде лиева ряда от x, y дает *формула Кемпбелла—Хаусдорфа* ([6], с. 371; [29], с. 193):

$$x \circ y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{\substack{k_i + l_i > 0 \\ k_i \geqslant 0,\ l_i \geqslant 0}} \frac{\left[x^{k_1} y^{l_1} \ldots x^{k_m} y^{l_m}\right]}{k_1!\, l_1! \ldots k_m!\, l_m!}, \qquad (*)$$

где символ $[x_1 x_2 \ldots x_n]$ означает $\frac{1}{n}[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots \ldots, x_n]$. Нетрудно вычислить первые члены этого ряда:

$$x \circ y = x + y + \\ + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] + \frac{1}{12}[[y, x], x] + \ldots$$

Приведем теперь примеры конструкций колец и алгебр Ли из групп.

1) Кольцо Ли свободной группы. Пусть G — группа и $\{G^n\}$ — невозрастающий центральный ряд этой группы. Рассмотрим аддитивную абелеву группу $\operatorname{gr} G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \operatorname{gr}_n G$, где $\operatorname{gr}_n G = G^n/G^{n+1}$. Отображения $\varphi_{nm}\colon G^n/G^{n+1} \times G^m/G^{m+1} \to G^{n+m}/G^{n+m+1}$, определенные правилами $(xG^{n+1}, yG^{m+1}) \longmapsto [x, y]G^{n+m+1}$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, индуцируют билинейные отображения $\varphi_{nm}\colon \operatorname{gr}_n G \times \operatorname{gr}_m G \to \operatorname{gr}_{n+m} G$, которые продолжаются до билинейного отображения $\operatorname{gr} G \times \operatorname{gr} G \to \operatorname{gr} G$, задающего на $\operatorname{gr} G$ структуру кольца Ли. Кольцо $\operatorname{gr} G$ порождается множеством $\operatorname{gr}_1 G$ и называется *кольцом Ли группы* G. Если $G = G[X]$ — свободная группа над X, то $\operatorname{gr}_1 G$ — свободная абелева группа над X и кольцо $\operatorname{gr} G[X]$ изоморфно свободному кольцу Ли $L[X]$ (см. [6], с. 378).

2) Алгебра Ли алгебраической группы. Матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(\Phi)$ называется нулем системы многочленов $\{p_\alpha(x_{ij})\} \subseteq \Phi[x_{ij}]$, если $p_\alpha(a_{ij}) = 0$ для всех α. Говорят, что система $\{p_\alpha\}$ определяет *алгебраическую группу* над Φ, если для любой ассоциативно-коммутативной Φ-алгебры K с единицей множество $G(K)$ всех нулей системы $\{p_\alpha\}$ в $M_n(K)$ является подгруппой в $GL(n, K)$. Пусть G — алгебраическая группа над Φ и $K = \Phi[\varepsilon]$ — свободная (как Φ-модуль) алгебра над Φ с базисом 1, ε, где $\varepsilon^2 = 0$. Тогда совокупность всех матриц $X \in M_n(\Phi)$, таких, что $1 + \varepsilon X \in G(\Phi[\varepsilon])$, является подалгеброй алгебры Ли $gl(n, \Phi)$, называемой *алгеброй Ли алгебраической группы* G ([81], с. 12). Например, ортогональная алгебра Ли $o(V)$ пространства V относительно невырожденной симметрической билинейной формы f является алгеброй Ли ортогональной группы этой формы, а симплектическая алгебра Ли — алгеброй Ли симплектической группы. Для конечномерной алгебры A над по-

лем F алгебра $\operatorname{Der} A$ оказывается алгеброй Ли группы $\operatorname{Aut} A$. Если J — конечномерная йорданова алгебра, то ее структурная группа $\operatorname{Str} J$ — также алгебраическая группа, алгеброй Ли которой является структурная алгебра Ли $\operatorname{Strl} J$.

3) Алгебра Ли группы Ли. *Группой Ли* называется гладкое n-мерное многообразие G, снабженное групповым законом, для которого операции умножения и перехода к обратному элементу являются гладкими отображениями $G \times G$ в G и G в G соответственно. Любая окрестность U единичного элемента $e \in G$, гомеоморфная евклидову пространству $\mathbf{R}^n$, является *локальной группой Ли*: существует такая окрестность $U_1 \subseteq U$ точки e, что для элементов $x, y \in U_1$ определены операции умножения и взятия обратного (со значениями в U). Совокупность касательных векторов в точке e ко всем гладким путям $g(t)$, выходящим из точки e, образует касательное пространство $T_e = \mathbf{R}^n$. Пусть $a, b \in T_e$ — касательные векторы к путям $g(t)$, $h(t)$. Тогда касательный вектор к пути $k(t)$, где $k(t^2) = g(t)h(t)[h(t)g(t)]^{-1}$, — билинейная функция векторов a, b; таким образом, T_e превращается в n-мерную алгебру над $\mathbf{R}$, которая называется *касательной алгеброй* (локальной) группы Ли G. Алгебра $T_e = L(G)$ антикоммутативна и является алгеброй Ли. Для конкретных вычислений полезен координатный способ построения алгебры $L(G)$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в G с центром в точке e. Закон умножения в G задается в этой системе координат гладкой функцией $\varphi(x, y)$, где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$, $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$; в частности, $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = x$. Разложение φ в ряд Тейлора в точке $x = y = 0$ с точностью до членов третьего и более высокого порядков имеет вид $\varphi^k(x, y) = x^k + y^k + \sum\limits_{i, j} b^k_{ij} x^i y^j + \ldots$ Положим $c^k_{ij} = b^k_{ij} - b^k_{ji}$, тогда $L(G)$ — алгебра с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и таблицей умножения $e_i e_j = \sum\limits_k c^k_{ij} e_k$. Всякая конечномерная алгебра Ли над $\mathbf{R}$ является алгеброй Ли некоторой локальной группы Ли G: умножение в G вычисляется через умножение в L с помощью ряда Кемпбелла — Хаусдорфа (*), который сходится в достаточно малой окрестности нуля. Локальная группа Ли определяется своей алгеброй Ли однозначно с точностью до изоморфизма. Каждый гомоморфизм алгебр Ли двух локальных групп индуцируется однозначно определенным гомоморфизмом этих локальных групп ([81], с. 231, 251, 253). Приведенные результаты дословно сохраняются, если заменить термин «локальная группа Ли» термином «связная односвязная группа Ли» ([81], с. 256).

Развитие теории бесконечномерных алгебр Ли во многом инициировано их связями с группами и происходит под заметным влиянием теории групп. Переход к присоединенному кольцу Ли часто облегчает и позволяет решить теоретико-групповую проблему.

Говорят, что алгебра Ли удовлетворяет *n-му условию Энгеля*, если всякий ее элемент энгелев индек-

са n. Всякая алгебра Ли, удовлетворяющая n-му условию Энгеля, над полем характеристики 0 или $p > n$, локально нильпотентна ([52], с. 35). Отсюда следует положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп показателя p. Долгое время оставался открытым вопрос справедливости вышеупомянутой теоремы без ограничений на характеристику. Недавно он был решен положительно Е. И. Зельмановым (Сиб. мат. ж. — 1989. — Т. 30, № 6), что дало также положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для любого показателя. Над полем характеристики 0 всякая алгебра, удовлетворяющая n-му условию Энгеля, нильпотентна ([52], с. 163). В то же время для любого простого $p \geqslant 5$ существуют нenильпотентные $(p-2)$-энгелевы алгебры над произвольным полем F характеристики p (см. [52], с. 156). Элемент a алгебры Ли L называется *тонким сэндвичем* (*абсолютным делителем нуля, ниль-элементом порядка* 2), если a — энгелев индекса 2, т. е. $(La)a = 0$. Любая алгебра Ли над полем F характеристики 0 или $p > 5$, порожденная конечным множеством тонких сэндвичей, нильпотентна ([52], с. 156). В общем случае конечно порожденная энгелева (неограниченного индекса) алгебра Ли может быть ненильпотентной ([52], с. 13).

Важным источником бесконечномерных алгебр Ли являются векторные поля на многообразии. Пусть M — гладкое многообразие и A — алгебра гладких функций на M. *Векторным полем* на M называется произвольное дифференцирование алгебры A. Алгебра Ли $\operatorname{Der} A$ называется *алгеброй Ли векторных полей* на M и обозначается $\operatorname{Vect} M$. В локальной системе координат на M произвольное векторное поле можно записать в виде $D = \sum_i F_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $F_i \in A$, при этом коммутатор (или *скобка Пуассона*) $[D_1, D_2]$ векторных полей $D_1 = \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $D_2 = \sum_i Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ записывается в виде

$$[D_1, D_2] = \sum_i R_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad R_i = \sum_k \left(P_k \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} - Q_k \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \right).$$

Если M — группа Ли, то подпространство в $\operatorname{Vect} M$, состоящее из всех левоинвариантных векторных полей, является конечномерной подалгеброй, совпадающей с алгеброй Ли группы M.

В случае произвольного поля F для любого n-мерного пространства V над F можно по аналогии определить алгебру Ли $\operatorname{Pol} V$ полиномиальных векторных полей на V, которая изоморфна алгебре W_n дифференцирований кольца многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим алгебру Λ_n внешних дифференциальных форм от $dx_1, \ldots, dx_n$ над $F[x_1, \ldots, x_n]$. Каждое дифференцирование D из W_n продолжается до дифференцирования алгебры Λ_n согласно правилу:

$$D(df) = d(Df), \text{ где } dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i, \ g \in F[x_1, \ldots, x_n].$$

Пусть $\omega_S = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, $\omega_H = \sum_{i=1}^{r} dx_i \wedge dx_{i+r}$,

$$n = 2r; \ \omega_K = dx_{2r+1} + \sum_{i=1}^{r} (x_{i+r}\, dx_i - x_i\, dx_{i+r}), \ n =$$

$= 2r + 1$; тогда подпространства

$$S_n = \{D \in W_n \mid D(\omega_S) = 0\}, \ H_n = \{D \in W_n \mid D(\omega_H) = 0\},$$

$$K_n = \{D \in W_n \mid D(\omega_K) = f\omega_K, \ f \in F[x_1, \ldots, x_n]\}$$

являются подалгебрами в W_n. Алгебры W_n, S_n, H_n и K_n называются соответственно *общей*, *специальной*, *гамильтоновой* и *контактной алгебрами Ли картановского типа*. Над полем характеристики нуль все они просты и бесконечномерны.

Аналоги рассмотренных алгебр существуют и над полем F характеристики $p > 0$. Для их получения нужно в приведенной выше конструкции вместо кольца многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$ взять кольцо «усеченных многочленов» $F[x_1, \ldots, x_n \mid x_i^p = 0]$. Соответствующие алгебры W_n, S_n, H_n, K_n в этом случае конечномерны, причем либо они сами, либо некоторые их разрешимые степени являются простыми алгебрами, которые также называют алгебрами Ли картановского типа. В каждой из этих простых алгебр L для любого $x \in L$ существует такой $y \in L$, что $R_x^p = R_y$. Простые

алгебры Ли с таким свойством называются *ограниченными* или *p-алгебрами*. Для всякой конечномерной простой алгебры Ли L над $\mathbf{C}$ существует ее ограниченный простой аналог $L(F)$ над произвольным полем F характеристики $p > 0$. Для построения алгебры $L(F)$ в алгебре L выбирается базис, в котором таблица умножения имеет целочисленные структурные константы (*базис Шевалле* — см. [175], с. 147), затем $\mathbf{Z}$-линейная оболочка этого базиса редуцируется по модулю p до алгебры над $\mathbf{Z}_p$, далее кольцо скаляров расширяется до F и, если необходимо, полученная алгебра факторизуется по центру. Ограниченные простые алгебры вида $L(F)$ называются *классическими*. Над алгебраически замкнутым полем F положительной характеристики $p > 7$ каждая конечномерная ограниченная простая алгебра Ли либо классическая, либо является алгеброй картановского типа (Block R. E., Wilson R. L.//J. Algebra.— 1988.— V. 114, N 1.— P. 115—259).

3.8. Алгебры Мальцева и бинарно лиевы алгебры. Напомним, что *алгеброй Мальцева* называется антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)\,x.$$

Раскрыв в этом тождестве якобианы, с учетом антикоммутативности можно переписать его в виде

$$xyzx + yzx^2 + zx^2y = xy \cdot xz, \qquad (*)$$

где для удобства записи опускаются скобки в левонормированных произведениях: $xyzx = (xy \cdot z)\,x$, $yzx^2 = (yz \cdot x)\,x$, и т. д. Если характеристика основного поля F отлична от 2, то из тождества (*) следует тождество

$$xyzt + yztx + ztxy + txyz = ty \cdot xz, \qquad (**)$$

которое (вместе с антикоммутативностью) обычно принимается за определение алгебр Мальцева над полем F произвольной характеристики. Заметим, что (*) следует из (**) при $t = x$.

Всякая алгебра Ли является алгеброй Мальцева. С другой стороны, в каждой алгебре Мальцева A любые два элемента порождают лиеву подалгебру, т. е. A является *бинарно лиевой алгеброй* ([64], с. 344). Класс бинарно лиевых алгебр над полем F характе-

ристики $\neq 2$ образует многообразие, которое задается условием антикоммутативности и тождеством: $J(xy, x, y) = 0$.

Как отмечалось в п. 3.1, для всякой альтернативной алгебры A коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Мальцева. Пусть $\mathbf{O} = \mathbf{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли—Диксона над F. Тогда $\mathbf{O} = F \oplus M$, где M — подпространство, натянутое на базисные вектора e_i $(i > 0)$ из канонического базиса алгебры $\mathbf{O}$. Нетрудно проверить, что M является подалгеброй (и даже идеалом) в алгебре Мальцева $\mathbf{O}^{(-)}$, при этом $M \simeq \mathbf{O}^{(-)}/F$, и если характеристика F отлична от 2, то $M = \{x \in \mathbf{O} \mid t(x) = 0\}$. Алгебра $M = M(\alpha, \beta, \gamma)$ центральна, проста и имеет размерность 7 над F. Если $\operatorname{char} F \neq 3$, то она нелиева. Любая центральная простая алгебра Мальцева над полем F характеристики $\neq 2$ либо является алгеброй Ли, либо алгеброй типа $M(\alpha, \beta, \gamma)$ (Кузьмин Е. Н.//Алгебра и логика. — 1967. — Т. 7, № 4. — С. 48—69; Филиппов В. Т.//Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 2. — С. 235—242). Алгебры $M(\alpha, \beta, \gamma)$ и $M(\alpha', \beta', \gamma')$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие им алгебры Кэли—Диксона $\mathbf{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\mathbf{O}(\alpha', \beta', \gamma')$.

Еще один класс примеров алгебр Мальцева возникает в связи с аналитическими лупами Муфанг. Множество элементов G называется *лупой*, если на G определены операции умножения, правого и левого деления $\cdot$, $/$, $\backslash$, такие, что в G есть единица e и для любых $x, y \in G$ выполнены равенства

$$x/y \cdot y = y \cdot y\backslash x = (xy)/y = y\backslash(yx) = x.$$

Лупа G называется *альтернативной*, если любые два ее элемента порождают подгруппу в G; G называется *лупой Муфанг*, если в ней справедливо тождество

$$xy \cdot zx = x\,(yz)\,x.$$

Всякая лупа Муфанг является альтернативной; примером лупы Муфанг может служить множество обратимых элементов произвольной альтернативной алгебры с единицей. Лупа G называется *аналитической*, если G — аналитическое многообразие и луповые операции аналитичны на G. По аналогии с группами Ли естественным образом определяются также аналитические локальные лупы и их касательные алгебры. Касательная алгебра аналитической локальной лупы Муфанг [альтернативной лупы] является мальцевской [бинарно лиевой]. Каждая конечномерная над $\mathbf{R}$ алгебра Мальцева [бинарно лиева алгебра] есть касательная алгебра локальной лупы Муфанг [альтернативной лупы], определенной однозначно с точностью до локальных изоморфизмов ([64], с. 341; Кузьмин Е. Н.//Алгебра и логика.—1971.—

Т. 10, № 1. — С. 3—22). Любая локальная аналитическая лупа Муфанг локально изоморфна аналитической лупе Муфанг в целом. Каждая конечномерная алгебра Мальцева над $\mathbf{R}$ является касательной алгеброй связной односвязной аналитической лупы Муфанг (в целом), определенной однозначно с точностью до изоморфизма (Кердман Ф. С.//Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 249, № 3. — С. 533—536). Последние результаты неверны в более общем случае бинарно лиевых алгебр и альтернативных луп: конечномерная бинарно лиева алгебра над $\mathbf{R}$ может не быть касательной алгеброй аналитической альтернативной лупы в целом.

Приведем основные факты структурной теории конечномерных алгебр Мальцева над полем F характеристики 0 (см. Кузьмин Е. Н.//Алгебра и логика.— 1968. — Т. 7, № 4. — С. 48—69). Пусть A — конечномерная алгебра Мальцева над F, $S(A)$ — ее разрешимый радикал. Алгебра A полупроста (т. е. $S(A)=0$) тогда и только тогда, когда она разлагается в прямую сумму простых алгебр, каждая из которых либо простая лиева, либо является семимерной алгеброй $M(\alpha, \beta, \gamma)$ над своим центроидом $\Gamma \supseteq F$; $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Как и в случае алгебр Ли, альтернативных и йордановых алгебр, имеет место теорема об отщеплении радикала и сопряженности полупростых факторов относительно внутренних автоморфизмов, которые в данном случае определяются как произведения автоморфизмов вида $\exp D$, где D — нильпотентное внутреннее дифференцирование вида $R_{xy}+[R_x, R_y]$. На пространстве алгебры A определен аналог формы Киллинга $K(x, y)=\operatorname{tr}(R_xR_y)$. Эта форма симметрична, ассоциативна, и для нее справедливы аналоги критериев Картана полупростоты и разрешимости для алгебр Ли: алгебра A полупроста [разрешима] тогда и только тогда, когда форма K невырождена [когда $K(A, A^2)=0$]. Кроме того, имеют место включения $S(A)\cdot A \subseteq N(A)$, $S(A)^D \subseteq N(A)$, где D — произвольное дифференцирование A, $N(A)$ — наибольший нильпотентный идеал (ниль-радикал) в A. В частности, если A разрешима, то A^2 нильпотентна.

Линейное отображение $\rho\colon A \to \operatorname{End} V$ называется (правым) *представлением алгебры Мальцева* A, если для любых $a, b, c \in A$ справедливо соотношение

$$\rho(ab\cdot c)=\rho(a)\rho(b)\rho(c)-\rho(c)\rho(a)\rho(b)+\\ +\rho(b)\rho(ca)-\rho(bc)\rho(a).$$

В этом случае V называется *мальцевским A-модулем*. Ввиду антикоммутативности понятие мальцевского модуля эквивалентно понятию бимодуля: достаточно положить $av = -va$ $(a \in A,\ v \in V)$. Частным случаем представления является регулярное представление $x \mapsto R_x$.

Если все операторы $\rho(x)$, $x \in A$, нильпотентны, то нильпотентна и порожденная ими подалгебра в $\operatorname{End} V$ (аналог теоремы Энгеля). Если при этом ρ — почти точное представление (т. е. ρ не содержит в своем ядре ненулевых идеалов A), то алгебра A также нильпотентна. Для представлений разрешимых алгебр Мальцева над полем характеристики 0 справедлив аналог теоремы Ли о триангулируемости. Всякое представление полупростой алгебры Мальцева характеристки 0 вполне приводимо (аналог теоремы Вейля). Если V — точный неприводимый A-модуль $(\operatorname{char} F = 0)$, то алгебра A проста и имеет место один из случаев: 1) $A = M(\alpha, \beta, \gamma)$, V — регулярный A-модуль; 2) A — алгебра Ли, V — лиев модуль; 3) $A \oplus \oplus V \simeq A_1 \oplus V_1$, где $A_1 = sl(2, F)$, $\dim V_1 = 2$, $\rho(a) = a^*$, где a^* — матрица, присоединенная к $a \in A_1$.

Теорема Энгеля в классической формулировке остается справедливой и для конечномерных бинарно-лиевых алгебр произвольной характеристики: если каждый оператор R_x нильпотентен, то алгебра A нильпотентна (Кузьмин Е. Н.//Сиб. мат. ж. — 1967. — Т. 8, № 5. — С. 1026—1034). Пусть A — конечномерная бинарно лиева алгебра над полем характеристики 0, V — бинарно лиев A-модуль. Если A разрешима, то A^2 нильпотентна и действует на V нильпотентно; если A полупроста и V_0 — аннулятор алгебры A в модуле V, то A — алгебра Мальцева и V/V_0 — мальцевский A-модуль (Гришков А. Н.//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 999—1030). В общем случае A не разлагается в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры.

Во всякой алгебре Мальцева A над полем F характеристики $\neq 2$ существуют наибольший локально конечный идеал $L(A)$ и наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{LN}(A)$. Если при этом A *слабо энгелева* (т. е. для любых $x, y \in A$ существует такое число $n = n(x, y)$, что $xR_y^n = 0$), то $L(A) = \mathrm{LN}(A)$, кроме того, в этом случае $\mathrm{LN}(A/\mathrm{LN}(A)) = 0$. Алгебра A

локально нильпотентна тогда и только тогда, когда она слабо энгелева и любой ее лиев гомоморфный образ локально нильпотентен (Филиппов В. Т.//Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 1. — С. 89—109). В частности, всякая алгебра Мальцева над полем, удовлетворяющая n-му условию Энгеля, локально нильпотентна. Как и в случае алгебр Ли, отсюда следует положительное решение аналога ослабленной проблемы Бернсайда для луп Муфанг простого периода (Гришков А. Н.//Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 3. — С. 534—536).

При изучении свободных алгебр Мальцева характеристики $\neq 2, 3$ важную роль играет следующая *функция Филиппова*:

$$g(x, y, z, t, u) = J([x, y, xz], t, u) + J([x, t, yz], x, u),$$

где $[x, y, z] = 3xy \cdot z - J(x, y, z)$. Эта функция кососимметрична по y, z, t, u и обращается в нуль, если $y, z \in A^3$ или $y, z, t \in A^2$; в частности, алгебра A^2 удовлетворяет тождеству $g = 0$. В свободной алгебре Мальцева M_k с $k \geqslant 5$ порождающими функция g — ненулевая, поэтому при $k \geqslant 5$ тождества алгебры $A = M_k$ и A^2 различаются. В алгебре M_4 выполнено тождество $g = 0$, а если $k \geqslant 5$, то M_k удовлетворяет тождеству $g(x_1, \ldots, x_5) x_6 \ldots x_n = 0$ при $n = k + 2$, но не удовлетворяет аналогичному тождеству при $n = k + 1$, так что для любого $k \geqslant 4$ тождества алгебр M_k и M_{k+1} различны (Филиппов В. Т.//Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. — 1984. — Т. 4. — С. 139—156). Кроме того, алгебры M_k при $k \geqslant 5$ имеют нетривиальный центр и потому заведомо не полупервичны. Свободная алгебра Мальцева счетного ранга также имеет нетривиальный центр: ему принадлежат, например, элементы вида $g(x_1, \ldots, x_5) y^2$, которые, вообще говоря, ненулевые. Полупервичные алгебры Мальцева удовлетворяют тождеству $g = 0$.

Первичные и полупервичные алгебры Мальцева характеристики 3 являются лиевыми. Всякая первичная нелиева алгебра Мальцева характеристики $\neq 2, 3$ является центральным порядком в подходящей алгебре $M(\alpha, \beta, \gamma)$ (Филиппов В. Т.//Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 669—678). Любая полупервичная алгебра Мальцева над полем F характеристики $\neq 2$ вкладывается в коммутаторную алгебру

подходящей альтернативной алгебры. В общем случае вопрос о справедливости такого результата (аналога теоремы Пуанкаре—Виркгофа—Витта) остается открытым.

Об алгебрах Мальцева см. также [193].

§ 4. Модули

В этом параграфе*), если не оговорено противное, под кольцом понимается ассоциативное кольцо с единицей.

4.1. Основные определения. *Правым модулем над кольцом R* (не обязательно с единицей!) или *правым R-модулем* называется коммутативная группа M, для которой определены произведения $ar \in M$ для любых $a \in M$ и $r \in R$, причем $(a+b)r = ar + br$, $a(r+s) = ar + as$ и $a(rs) = (ar)s$ для любых $a, b \in M$ и $r, s \in S$. Подчеркнем, что символ $+$ в левой и правой частях второго равенства имеет различный смысл: слева он означает сложение элементов кольца R, а справа — сложение элементов группы M. Различный смысл имеет также подразумеваемый в третьей формуле символ умножения: rs означает произведение элементов кольца R, а $(ar)s$ и $a(rs)$ — произведение элемента из группы M на элемент кольца R. Аналогично определяются *левые модули*, где произведение записывается как ra. Если кольцо R коммутативно, то разницы между правыми и левыми модулями нет, ибо, положив $ra = ar$ для $r \in R$, $a \in M$, мы превращаем правый R-модуль M в левый, поскольку

$$(rs)\,a = (sr)\,a = a\,(sr) = (as)\,r = r\,(sa)$$

для любого $s \in R$.

Если R — кольцо с единицей, то правый [левый] R-модуль M называется *унитарным*, если $a1 = a$ [$1a = a$] для любого $a \in M$. В дальнейшем под модулем всегда понимается унитарный модуль.

Правым [левым] модулем над кольцом R является любой из его правых [левых] идеалов. В частности, любое кольцо с единицей является как правым, так и левым модулем над собой. Линейные пространства

---

*) Автор глубоко благодарен А. В. Михалеву и А. А. Туганбаеву за полезные замечания по содержанию этого параграфа.

над полем P — это в точности P-модули. Всякую абелеву группу можно рассматривать как модуль над кольцом целых чисел.

Если M — правый R-модуль, то имеет место:

$$a0 = 0r = 0, \quad (-a)\,r = a\,(-r) = -ar,$$

$$(a - b)\,r = ar - br, \quad a\,(r - s) = ar - as,$$

где $a, b \in M$ и $r, s \in R$.

Заметим, что символ 0 в первой формуле обозначает как нуль кольца R, так и нуль группы M. Точно так же в последних двух формулах в различных смыслах используется символ — .

Если R и S — кольца с единицей, то абелева группа B называется *R-S-бимодулем*, если B является левым R-модулем и правым S-модулем, причем

$$(ra)\,s = r\,(as)$$

для любых $r \in R$, $a \in B$ и $s \in S$. Всякий правый [левый] R-модуль является $\mathbf{Z}$-R-бимодулем [R-$\mathbf{Z}$-бимодулем]. Кольцо R оказывается как R-S-, так и S-R-бимодулем для всякого подкольца S кольца R, содержащего единицу кольца R. Всякий правый модуль M над коммутативным кольцом R можно считать R-R-бимодулем, если положить $ra = ar$ для любых $r \in R$ и $a \in M$. Если M есть R-S-бимодуль, то часто говорят, что имеет место ситуация ${}_RM_S$.

Отображение φ правого модуля M над кольцом R в правый модуль M' над тем же кольцом называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi\,(a + b) = \varphi\,(a) + \varphi\,(b) \quad \text{и} \quad \varphi\,(ar) = \varphi\,(a)\,r$$

для любых $a, b \in M$ и $r \in R$. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Если существует изоморфизм модуля M на модуль M', то эти модули называются *изоморфными*. Гомоморфизм [изоморфизм] модуля M в себя [на себя] называется *эндоморфизмом* [*автоморфизмом*] модуля M. Произведение двух эндоморфизмов снова оказывается эндоморфизмом. Так что совокупность всех эндоморфизмов является моноидом. Совокупность всех автоморфизмов образует группу — подгруппу этого моноида. Эндоморфизмы свободного правого R-модуля с базой, состоящей из n элементов, можно отождествить

с $n \times n$-матрицами над R, причем автоморфизмам соответствуют обратимые матрицы. Группу, состоящую из таких матриц, называют линейной группой. Подробнее см. [38]. О частично обратимых гомоморфизмах см. [186].

В качестве примеров гомоморфизма модулей укажем отображения:

а) множества матриц порядка n над произвольным полем в множество n-мерных строк, где

$$\varphi(A) = (a_{11}, \ldots, a_{1n});$$

б) множества матриц порядка 2 в множество четырехмерных строк, где

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d);$$

в) множества n-мерных столбцов над полем (или даже над кольцом) P в себя, определяемое равенством

$$\chi\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где A некоторая фиксированная матрица порядка n над полем P.

Изоморфизмом оказывается гомоморфизм ψ. Гомоморфизм χ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица невырождена.

Подмножество N правого модуля M над кольцом R называется *подмодулем*, если $0 \in N$, $a, b \in N$ влечет $a + b \in N$ и $ar \in N$ для всех $r \in R$. Подмодуль N модуля M называется [*вполне*] *характеристическим* или [*вполне*] *инвариантным*, если для любых автоморфизма [эндоморфизма] φ модуля M и элемента $x \in N$ имеем $\varphi(x) \in N$.

Пересечение любого множества подмодулей модуля M является подмодулем.

Если M — правый R-модуль, то выражение вида

$$a_1 r_1 + \ldots + a_m r_m,$$

где $a_i \in M$ и $r_i \in R$, будем называть *линейной комбинацией элементов* $a_1, \ldots, a_m$. Если все $r_i = 0$, то линейная комбинация называется *тривиальной*. Если элемент равен линейной комбинации элементов $a_1, \ldots, a_m$, то говорят, что он *выражается через систему* $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Если система $\mathfrak{A}$ бесконечна,

то выражаемость элемента через систему $\mathfrak{A}$ определяется как его выражаемость через некоторую конечную подсистему системы $\mathfrak{A}$. Если каждый вектор системы $\mathfrak{A}$ выражается через систему $\mathfrak{A}'$, то скажем, что система $\mathfrak{A}$ *выражается через систему* $\mathfrak{A}'$. Если система $\mathfrak{A}$ выражается через систему $\mathfrak{A}'$, а система $\mathfrak{A}'$ — через $\mathfrak{A}''$, то система $\mathfrak{A}$ выражается через систему $\mathfrak{A}''$.

Если X — подмножество правого R-модуля M, то обозначим через $L(X)$ и назовем *линейной оболочкой подмножества* X множество всех элементов из M, линейно выражающихся через X. Если $X = \{a\}$, то вместо $L(a)$ часто пишут aR. Линейная оболочка любого подмножества X модуля M является подмодулем, совпадающим с пересечением всех подмодулей модуля M, содержащих подмножество X. Другими словами, линейная оболочка множества X — это наименьший подмодуль модуля M, содержащий множество X.

Если $M = L(X)$, то говорят, что X — *система порождающих* или *система образующих модуля* M, а также, что M *порождается множеством* X.

Если $\varphi\colon M \to M'$ — гомоморфизм модулей и $\varnothing \neq X \subseteq M$, то полагаем

$$\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\}.$$

В частности, $\varphi(M) = \operatorname{Im}\varphi$. Если X — подмодуль модуля M, то $\varphi(X)$ — подмодуль модуля M'. В частности, $\operatorname{Im}\varphi$ — подмодуль модуля M', который называется *образом гомоморфизма* φ. Если H' — подмодуль модуля M', то множество

$$\varphi^{-1}(H') = \{x \mid x \in M,\ \varphi(x) \in H'\}$$

оказывается подмодулем модуля M, который называется *полным прообразом подмодуля* H'. В частности, подмодулем является множество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0) = \{x \mid x \in M,\ \varphi(x) = 0\},$$

которое называется *ядром гомоморфизма* φ. Инъективный [сюръективный] гомоморфизм называется также *гомоморфным вложением* [*наложением*]. Всякий гомоморфизм $\varphi\colon M \to M'$ представляется в виде $\varphi = \pi\sigma$, или $\varphi = \sigma \circ \pi$, где $\pi\colon M \to \operatorname{Im}\varphi$ — гомоморфное наложение, а $\sigma\colon \operatorname{Im}\varphi \to M'$ — естественное гомоморфное вложение. Гомоморфное вложение [наложение] модулей часто называют *мономорфизмом* [*эпи-*

морфизмом], что в этом случае согласуется с теоретико-категорным значением этих терминов (см. п. VII.1.4).

Пара (φ, σ) называется *полулинейным отображением* правого R-модуля A в правый S-модуль B, если φ — гомоморфизм абелевой группы A в группу B, σ — гомоморфизм кольца R в кольцо S, $\sigma(1) = 1$ и $\varphi(ar) = \varphi(a)\sigma(r)$ для любых $a \in A$ и $r \in R$. Если $R = S$ и σ — тождественный автоморфизм кольца R, то полулинейное отображение превращается в гомоморфизм правых R-модулей.

Если H — подмодуль правого R-модуля M, то факторгруппа M/H превращается в правый R-модуль, если для любых $a \in M$ и $r \in R$ положить $(a + H)r = ar + H$. Этот модуль называется *фактормодулем* модуля M по подмодулю H. Отображение π: $M \to M/H$, где $\pi(x) = x + H$ для всех $x \in M$ оказывается гомоморфным наложением, которое называется *естественным гомоморфизмом*.

Между подмодулями фактормодуля M/H и подмодулями модуля M, содержащими подмодуль H, существует взаимно однозначное соответствие Φ, сохраняющее порядок (ср. п. I.1.3). Оно определяется условием

$$\Phi(K) = \{x + H \mid x \in K\},$$

где $H \subseteq K \subseteq M$. Заметим, что $\Phi(K) = \pi(K)$, где π — естественный гомоморфизм.

Имеет место *теорема о гомоморфизме*: если φ: $M \to M'$ — гомоморфное наложение правых модулей над кольцом R, $\operatorname{Ker}\varphi$ — подмодуль модуля M, являющийся ядром этого гомоморфизма, π: $M \to M/\operatorname{Ker}\varphi$ — естественный гомоморфизм, то существует изоморфизм χ: $M' \to M/\operatorname{Ker}\varphi$ такой, что $\varphi\chi = \pi$. Другими словами, оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & M' \arrow[d, "\chi"] \\ & M/\operatorname{Ker}\varphi \end{tikzcd}$$

Если K, H — подмодули модуля M и $K \subseteq H$, то $M/H \simeq (M/K)/(H/K)$, где H/K — образ подмодуля H

при естественном гомоморфизме M на M/K. Если φ: $M \to M'$ и ψ: $M \to M''$ — гомоморфизмы модулей, $\operatorname{Im}\varphi = M'$ и $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$, то существует такой гомоморфизм χ: $M' \to M''$, что $\varphi\chi = \psi$. Это равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & M' \arrow[d, "\chi"] \\ & M'' \end{tikzcd}$$

Коядро и *кообраз* гомоморфизма φ: $M \to M'$ определяются как $\operatorname{Coker}\varphi = M/\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Coim}\varphi = M/\operatorname{Ker}\varphi$ соответственно. Конечно, $\operatorname{Coim}\varphi \simeq M/\operatorname{Ker}\varphi$. Гомоморфизм φ оказывается вложением [наложением] тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ [$\operatorname{Coker}\varphi = 0$].

Эквивалентность θ на правом R-модуле M называется *конгруэнцией*, если (a, b), $(c, d) \in \theta$ влечет $(a + c,\ b + d) \in \theta$ и $(ar, br) \in \theta$ для любого $r \in R$. Разбиение, соответствующее конгруэнции (см. п. I. 1.3), называется *допустимым разбиением*. Разбиение модуля M оказывается допустимым тогда и только тогда, когда оно является разбиением его аддитивной группы по некоторому подмодулю H. Этот подмодуль совпадает с классом разбиения, содержащим 0. При этом, если обозначить через $[x]$ класс конгруэнции θ, содержащий элемент $x \in M$, то $[x] = x + H$ и эквивалентны следующие условия: (1) $(x, y) \in \theta$; (2) $x - y \in H$; (3) $x \in y + H$. Вместо $(a, b) \in \theta$ часто пишут $a\theta b$, $a \equiv b \pmod{\theta}$ или $a \equiv b \pmod{H}$.

Суммой подмодулей S_ι, $\iota \in \mathfrak{I}$, модуля M называется совокупность всех конечных сумм вида $s_{\iota_1} + \ldots + s_{\iota_m}$, где $s_{\iota_k} \in S_{\iota_k}$. Сумма подмодулей оказывается наименьшим подмодулем модуля M, содержащим все подмодули S_ι. Она совпадает с линейной оболочкой объединения $\bigcup\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} S_\iota$ и обозначается через $\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} S_\iota$. Если $\mathfrak{I} = \{1, \ldots, n\}$, то пишут $S_1 + \ldots + S_n$. Для любого гомоморфизма φ модуля M в модуль M' имеет место $\varphi\left(\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} S_\iota\right) = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} \varphi(S_\iota)$ и $\varphi\left(\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} S_\iota\right) \subseteq \bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} \varphi(S_\iota)$, причем последнее включение может ока-

заться строгим. Впрочем, если $\operatorname{Ker} \subseteq S_\iota$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$, то $\varphi\left(\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} S_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} \varphi(S_\iota)$.

Для любых подмодулей A и B модуля M имеет место $(A + B)/B \simeq A/A \cap B$.

Совокупность $\mathscr{L}(M)$ подмодулей модуля M является частично упорядоченным множеством по включению. При этом точная верхняя [нижняя] грань любого множества подмодулей совпадает с их суммой [пересечением]. Таким образом, $\mathscr{L}(M)$ оказывается полной решеткой называемой *решеткой подмодулей модуля* M. Эта решетка модулярна (дедекиндова), т. е., если $A \subseteq C$, то $(A + B) \cap C = A + B \cap C$ для любых $A, B, C \in \mathscr{L}(M)$, но, как правило, не дистрибутивна.

Сумма $\sum_{\iota \in \mathfrak{J}} S_\iota$ называется *прямой*, если каждое слагаемое имеет нулевое пересечение с суммой остальных. Прямую сумму подмодулей S_ι, $\iota \in \mathfrak{J}$, обычно обозначают через $\sum_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} S_\iota$ или $\dot{\sum_{\iota \in \mathfrak{J}}} S_\iota$, а если $\mathfrak{J} = \{1, \ldots, n\}$, то через $S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$. Сумма и, в частности, прямая сумма не зависит от порядка слагаемых. Если $S = S_1 + \ldots + S_m$, то эквивалентны следующие свойства:

(1) $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$, т. е. $(S_1 + \ldots + S_{i-1} + S_{i+1} + \ldots + S_m) \cap S_i = 0$ для каждого i;

(2) $(S_1 + \ldots + S_i) \cap S_{i+1} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m - 1$;

(3) каждый элемент s из S единственным способом представляется в форме

$$s = s_1 + \ldots + s_m,$$

где $s_i \in S_i$;

(4) если $s_i \in S_i$ и $s_1 + \ldots + s_m = 0$, то $s_i = 0$ для всех i.

В частности, сумма $S + T$ двух подмодулей является прямой тогда и только тогда, когда $S \cap T = 0$. Имеет место *теорема о транзитивности разложения в прямую сумму*: если $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$ — прямая сумма, то

$$S = (S_1 \oplus \ldots \oplus S_{i-1}) \oplus (S_i \oplus \ldots \oplus S_m)$$

для каждого i; если

$$S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$$

и

$$S_i = S_{i1} \oplus \ldots \oplus S_{ik_i}$$

для каждого i, то

$$S = S_{11} \oplus \ldots \oplus S_{1k_1} \oplus S_{21} \oplus \ldots \oplus S_{2k_2} \oplus \ldots \\ \ldots \oplus S_{m1} \oplus \ldots \oplus S_{mk_m}.$$

Этот результат остается в силе и для бесконечного множества слагаемых.

Если $M = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota = \sum\limits_{\varkappa \in \mathfrak{K}}^{\oplus} B_\varkappa$, то эти два разложения называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение σ множества $\mathfrak{J}$ на множество $\mathfrak{K}$, что $A_\iota \simeq B_{\sigma(\iota)}$ для любого $\iota \in \mathfrak{J}$. Если для указанных разложений модуля M существуют такие разложения

$$A_\iota = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}_\iota}^{\oplus} A_{\iota\mu} \quad (\iota \in \mathfrak{J})$$

и

$$B_\varkappa = \sum_{\nu \in \mathfrak{N}_\varkappa}^{\oplus} B_{\varkappa\nu} \quad (\varkappa \in \mathfrak{K}),$$

что изоморфны разложения $M = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J},\ \mu \in \mathfrak{M}_\iota}^{\oplus} A_{\iota\mu}$ и $M = \sum\limits_{\varkappa \in \mathfrak{K},\ \nu \in \mathfrak{N}_\varkappa}^{\oplus} B_{\varkappa\nu}$, то говорят, что данные разложения обладают *изоморфным продолжением*.

Если M_ι, $\iota \in \mathfrak{J}$,— множество правых R-модулей, то прямое произведение $\prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} M_\iota$ множеств M_ι можно превратить в правый R-модуль, положив

$$(\ldots, a_\iota, \ldots) + (\ldots, b_\iota, \ldots) = (\ldots, a_\iota + b_\iota, \ldots)$$

и

$$(\ldots, a_\iota, \ldots) r = (\ldots, a_\iota r, \ldots)$$

для любых $(\ldots, a_\iota, \ldots)$, $(\ldots, b_\iota, \ldots) \in \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} M_\iota$ и $r \in R$. Этот модуль называется *прямым произведением* (иногда просто *произведением* или *полной прямой суммой*) модулей M_ι. Правый R-модуль M изо-

морфен прямому произведению $\prod_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$ тогда и только тогда, когда существуют гомоморфные наложения π_ι: $M\to M_\iota$, $\iota\in\mathfrak{J}$, и каковы бы ни были правый R-модуль A и гомоморфизмы φ_ι: $A\to M_\iota$, существует единственный гомоморфизм φ: $A\to M$ такой, что $\varphi\pi_\iota=\varphi_\iota$ для всех $\iota\in\mathfrak{J}$ (ср. п. VII.1.7). Подмножество прямого произведения $\prod_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$, состоящее из всех строк, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля, оказывается подмодулем, который называется *внешней прямой суммой* модулей M_ι, а также *копроизведением.* Внешняя прямая сумма совпадает с прямым произведением тогда и только тогда, когда множество индексов $\mathfrak{J}$ конечно. Внешняя прямая сумма является прямой суммой своих подмодулей

$$M'_\iota=\{(\ldots, a_\varkappa, \ldots)\,|\,a_\varkappa\in M_\varkappa,\ a_\varkappa=0 \text{ если } \varkappa\neq\iota\},$$

которые изоморфны модулям M_ι. Поэтому внешнюю прямую сумму также обозначают через $\sum^{\oplus}_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$.

Употребляются также обозначения $\dot{\sum}_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$ и $\coprod_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$.

Правый R-модуль S изоморфен внешней прямой сумме $\sum^{\oplus}_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota$ тогда и только тогда, когда существуют гомоморфные вложения σ_ι: $M_\iota\to S$, $\iota\in\mathfrak{J}$, и каковы бы ни были правый R-модуль A и гомоморфизмы φ_ι: $M_\iota\to A$, существует единственный гомоморфизм φ: $S\to M$ такой, что $\sigma_\iota\varphi=\varphi_\iota$ для всех $\iota\in\mathfrak{J}$ (ср. п. VII.1.7).

Обратим внимание на то, что внешняя прямая сумма и внешнее прямое произведение не зависят от порядка слагаемых и сомножителей в том смысле, что для любого взаимно однозначного отображения σ множества $\mathfrak{J}$ на себя имеют место изоморфизмы

$$\sum^{\oplus}_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota\simeq\sum^{\oplus}_{\iota\in\mathfrak{J}} M_{\sigma(\iota)} \quad\text{и}\quad \prod_{\iota\in\mathfrak{J}} M_\iota\simeq\prod_{\iota\in\mathfrak{J}} M_{\sigma(\iota)}.$$

В частности $M_1\oplus M_2\simeq M_2\oplus M_1$.

Если $M=M_1\oplus\ldots\oplus M_m$, N_i — подмодуль модуля M_i и $N=N_1+\ldots+N_m$ (заметим, что эта сумма автоматически оказывается прямой), то фактормодуль

M/N изоморфен внешней прямой сумме $(M_1/N_1)\oplus\ldots$ $\ldots\oplus(M_m/N_m)$. В частности, $(M_1\oplus M_2)/M_1\simeq M_2$. Для любых подмодулей A и B произвольного модуля M имеет место изоморфизм, $(A+B)/A\cap B\simeq(A/A\cap B)\oplus$ $\oplus(B/A\cap B)$, где в правой части имеется в виду внешняя прямая сумма.

Говорят, что подмодуль N модуля M *выделяется прямым слагаемым*, если $M=N\oplus N'$ для некоторого подмодуля $N'\subseteq M$. Из последнего результата вытекает, что если подмодуль N модуля M выделяется прямым слагаемым, то M содержит подмодуль, изоморфный фактормодулю M/N.

Если существует гомоморфизм правых R-модулей $\varphi\colon \prod\limits_{\iota=1}^{\infty} A_i\to\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus} B_\iota$ и $\mathfrak{F}$ — фильтр главных левых идеалов кольца R, то существует $Ra\in\mathfrak{F}$ такой, что для всех $\iota\in\mathfrak{J}$, кроме, быть может, конечного числа их,

$$\pi_\iota\left(\varphi\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right)\subseteq\bigcap_{Rr\in\mathfrak{F}}B_\iota r,$$

где π_ι — естественная проекция прямой суммы на B_ι. Отсюда вытекает, в частности, что прямое произведение счетного множества экземпляров группы $\mathbf{Z}$ не вложимо в качестве сервантной подгруппы ни в какую счетно порожденную абелеву группу (*лемма Чейза* — см. [90], пп. 20.20, 20.22).

Говорят, что модуль A *обладает свойством* [*конечной*] *замены*, если для любого модуля B и любого [конечного] множества модулей $\{C_\iota\mid\iota\in\mathfrak{J}\}$ равенство $A\oplus B=A\oplus\left(\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}C_\iota\right)$ влечет за собой $A\oplus B=$ $=A\oplus\left(\sum\limits_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}B_\iota\right)$, где $B_\iota\subseteq C_\iota$. Свойством замены обладает всякий квазиинъективный модуль. Неразложимый модуль обладает свойством замены тогда и только тогда, когда кольцо его эндоморфизмов локально ([90], ч. 2, с. 115; [90], т. 2, с. 47, упр. 8). Различные аспекты, касающиеся разложения модуля в прямую сумму, в частности, связанные со свойством замены, рассмотрены в [275]. Вопросы продолжаемости прямых разложений с теоретико-категорной точки зрения рассматриваются в [170].

Если $\mathfrak{J}$ — направленное вверх частично упорядоченное множество, $\{M_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — семейства правых R-модулей и для любых $\iota, \varkappa \in \mathfrak{J}$, где $\iota \leqslant \varkappa$, заданы гомоморфизмы $\varphi_{\iota\varkappa}\colon M_\iota \to M_\varkappa$, причем $\varphi_{\iota\iota}$ — тождественный автоморфизм модуля M_ι и $\varphi_{\iota\varkappa}\varphi_{\varkappa\lambda} = \varphi_{\iota\lambda}$, если $\iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$, то говорят, что задан *прямой спектр модулей*. Модуль M называется *пределом этого прямого спектра* или просто *прямым пределом*, если $M = \Big\{x \mid x =$

$= (\ldots, x_\iota, \ldots) \in \prod\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} M_\iota$ и $\varphi_{\iota\varkappa}(x_\iota) = x_\varkappa$, если $\iota \subseteq \varkappa\Big\}$.

Каждый модуль является прямым пределом своих конечно порожденных подмодулей и изоморфен пределу некоторого прямого спектра конечно представимых модулей ([73], п. 0.11; ср. п. I. 2.1 и VII. 2.2).

Подмодуль N правого R-модуля M называется *существенным* или *большим*, если он имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем модуля M. Другими словами, если $0 \neq a \in M$, то $0 \neq ar \in N$ для подходящего $r \in R$. Если N — существенный подмодуль модуля M, то говорят также, что M — *существенное расширение* модуля N. Подмодуль N правого R-модуля M называется *косущественным* или *малым*, если для любого подмодуля $H \subseteq M$ равенство $N + H = M$ влечет за собой $H = M$.

Говорят, что подмодуль D R-модуля M является *дополнительным для подмодуля* $A \subseteq M$ или *A-высоким*, если $A \cap D = 0$, но $(D + xR) \cap A \neq 0$ для любого $x \in M \setminus D$. Подмодуль $B \subseteq M$ оказывается дополнительным для подмодуля $A \subseteq M$, если $A \cap B = 0$ и $A + B$ — существенный подмодуль модуля M. Подмодуль модуля M называется *замкнутым*, если он не имеет отличных от него существенных расширений, принадлежащих M. Подмодуль модуля M оказывается замкнутым тогда и только тогда, когда он является дополнительным для некоторого подмодуля модуля M.

Подмодуль A модуля M называется *минимальным* [*максимальным*], если для любого подмодуля $X \subseteq M$ соотношение $0 \neq X \subseteq A$ $[A \subseteq X \neq M]$ влечет за собой $X = A$. Таким образом, минимальный [максимальный] подмодуль является минимальным [максимальным] элементом частично упорядоченного по включению множества ненулевых [отличных от M] подмодулей модуля M. Пересечение [сумма] двух различных

минимальных [максимальных] подмодулей модуля M равна $\{0\}$ [совпадает с M]. Сумма всех минимальных подмодулей модуля M называется его цоколем и обозначается через $\operatorname{Soc} M$. Если модуль не содержит минимальных подмодулей, то его цоколь считается равным нулю. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля называется его *радикалом* (точнее, *радикалом Джекобсона*; подробнее см. п. 4.4). Радикал модуля M, не содержащего максимальных подмодулей, считается равным M. Отметим, что цоколь является вполне приводимым модулем (см. п. 4.2).

Множество всех гомоморфизмов правого R-модуля M в правый R-модуль M' превращается в абелеву группу, если для любых гомоморфизмов φ и ψ из M в M' и любого $x \in M$ положить

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \text{и} \quad (-\varphi)(x) = -\varphi(x).$$

Нулем этой группы служит гомоморфизм $O_{MM'}$, где $O_{MM'}(x) = 0$ для всех $x \in M$. Определенная таким образом абелева группа называется *группой гомоморфизмов* из M в M' и обозначается через $\operatorname{Hom}_R(M, M')$. В частности, абелевой группой оказывается и множество $\operatorname{Hom}_R(M, M)$. Поскольку произведение гомоморфизмов является гомоморфизмом, то это множество оказывается кольцом с единицей, которое называется *кольцом эндоморфизмов модуля* M и обычно обозначается через $\operatorname{End} M_R$ или просто $\operatorname{End} M$. Как отмечалось в п. I.1.4, произведение отображений множества в себя можно определить как $\varphi\psi$ и как $\varphi \circ \psi$. Это дает две возможности для превращения множества $\operatorname{End} M$ в кольцо. Тождественное отображение множества $\operatorname{End} M$ на себя является антиавтоморфизмом этих колец. Если M — простой правый [левый] R-модуль, то $\operatorname{End} M$ — тело (*лемма Шура* — см. [90], п. 3.10.1 (в); [96], теорема 1.1.1). Некоторые специальные свойства колец эндоморфизмов рассматриваются в [225] и [252].

Пусть V — линейное пространство над телом D. Подкольцо R кольца линейных преобразований пространства V называется *плотным*, если для любого конечного линейно независимого множества $x_1, \ldots, x_n$ из V и любых $y_1, \ldots, y_n \in V$ имеем $\varphi(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ для подходящего $\varphi \in R$. Говорят, что

ранг линейного преобразования φ *конечен*, если подпространство $\mathrm{Im}\,\varphi$ конечномерно. Совокупность всех линейных преобразований конечного ранга оказывается двусторонним идеалом кольца всех линейных преобразований. Имеет место *теорема плотности*: если M — простой правый R-модуль, $S = \mathrm{End}_R M$ (напомним, что S — тело), $x_1, \ldots, x_n \in M$ — линейно независимые над S элементы из M и $y_1, \ldots, y_n \in M$, то существует $r \in R$ такой, что $x_i r = y_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Отсюда вытекает, что кольцо R примитивно справа в том и только том случае, когда оно изоморфно плотному кольцу линейных преобразований некоторого линейного пространства над телом ([90], пп. 19.22, 19.23A; [96], теорема 2.1.2; [31], § II. 2).

Любой левый [правый] R-модуль M можно превратить в правый [левый] $(\mathrm{End}\,R)$-модуль, если $x\varphi$ $[\varphi x]$, где $x \in M$ и $\varphi \in \mathrm{End}\,R$ определить как образ элемента x при отображении φ. При этом в первом случае нужно иметь в виду произведение отображений $\varphi\psi$, а во втором $\varphi \circ \psi$ (см. п. I.1.4). Свойства $(\mathrm{End}\,M)$-модуля M часто называют *эндосвойствами* модуля M. Так, *эндоконечность*, *эндопроективность*, *эндоинъективность* и т. п. модуля M означает, что M является конечно порожденным, проективным, инъективным и т. п. $(\mathrm{End}\,M)$-модулем. Всякий правый R-модуль M является $(\mathrm{End}\,M)$-R-бимодулем. Вполне инвариантные подмодули модуля M — это в точности подбимодули этого бимодуля. Правый R-модуль M эндоплоский тогда и только тогда, когда левый $(\mathrm{End}\,M)$-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, Q)$ инъективен для любого кообразующего R-модуля Q (Onodera T.//Hokkaido Math. J. — 1978. — V. 7, N 2. — P. 179—182).

Кольцо эндоморфизмов левого $(\mathrm{End}_R\,M)$-модуля M, где M — правый R-модуль, называется *бикоммутатором* или *кольцом биэндоморфизмов*, а также *вторым централизатором* правого R-модуля M и обозначается через $\mathrm{Biend}\,M$. Равенство $\Gamma_M(r)(x) = xr$, где $r \in R$ и $x \in M$, определяет гомоморфизм Γ_M кольца R в кольцо $\mathrm{Biend}\,M$, который называется *гомотетией* модуля M.

Если A — абелева группа, то гомоморфизм Φ кольца R в кольцо $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\,A$ называется *представлением кольца* R, если $\Phi(1) = 1_A$. Если задано такое представление Φ, то абелеву группу A можно превратить в правый R-модуль, положив $ar = a\Phi(r)$ для любых

$a \in A$ и $r \in R$ (разумеется, надо считать, что произведение $\varphi\psi$ в $\mathrm{End}_Z A$ задается равенством $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$. Наоборот, если A — правый R-модуль, то можно определить представление Φ кольца R в $\mathrm{End}_Z A$, положив $a\Phi(r) = ar$ для любых $a \in A$ и $r \in R$.

Если A и B — соответственно T-R-бимодуль и S-R-бимодуль (т. е. имеет место ситуация ${}_TA_R$ и ${}_SB_R$), то для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, $s \in S$, $t \in T$, $a \in A$ положим

$$(s\varphi)(a) = s\varphi(a) \quad \text{и} \quad (\varphi t)(a) = \varphi(ta).$$

Тогда $s\varphi$, $\varphi t \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, и это позволяет рассматривать $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ как S-T-бимодуль. В частности, для любого правого R-модуля A приведенные выше определения превращают $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ в левый, а $\mathrm{Hom}_R(R, A)$ в правый R-модуль. При этом отображение Φ: $\mathrm{Hom}_R(R, A) \to A$, где $\Phi(\varphi) = \varphi(1)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R, A)$, оказывается изоморфизмом правых R-модулей. В ситуации ${}_RA_S$ и ${}_SB_T$ абелева группа $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ превращается в S-T-бимодуль, если для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, $s \in S$, $t \in T$ и $a \in A$ положить $(\varphi s)(a) = \varphi(as)$ и $t\varphi(a) = \varphi(a)t$. В частности, если M — правый [левый] R-модуль, то абелева группа $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ оказывается левым [правым] R-модулем, который называется *дуальным к модулю* M. Более того, M^{**} — снова правый [левый] R-модуль. Он называется *бидуальным к модулю* M. При этом отображение Φ_M: $M \to M^{**}$, где $\Phi_M(x)(f) = f(x)$ для любых $f \in M^*$ и $x \in M$, оказывается гомоморфизмом правых [левых] R-модулей. Левые [правые] R-модули M^* и M^{***} изоморфны. Если φ: $A \to B$ — гомоморфизм правых R-модулей, то определим гомоморфизм φ^*: $B^* \to A^*$ левых R-модулей, положив $\varphi^*(g)(x) = g(\varphi(x))$ для любых $g \in B^*$ и $x \in A$. Если φ — наложение, то φ^* оказывается вложением. Если ψ: $B \to C$ — гомоморфизм, то $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$. Для любого правого R-модуля M имеет место $M^{***} = (\mathrm{Im}\,\Phi_{M^*}) \oplus (\mathrm{Ker}\,\Phi_M^*)$ (см. [45] п. 12.2).

Пусть теперь A — правый, а B — левый R-модули. Рассмотрим свободную абелеву группу F с базой $A \times B$, т. е. совокупность всевозможных формальных сумм

$$\sum_{(a, b) \in A \times B} \lambda_{(a, b)}(a, b),$$

где $\lambda_{(a,\, b)} \in \mathbf{Z}$ и лишь конечное множество коэффициентов $\lambda_{(a,\, b)}$ отлично от нуля, с естественным определением сложения. На F можно смотреть как на прямую сумму $|A \times B|$ экземпляров абелевой группы $\mathbf{Z}$ (ср. п. 4.2). Пусть, далее, K — подгруппа группы F, порожденная всеми элементами вида

$$(a' + a'',\ b) - (a',\ b) - (a'',\ b),$$
$$(a,\ b' + b'') - (a,\ b') - (a,\ b'')$$

и

$$(ar,\ b) - (a,\ rb),$$

где $a, a', a'' \in A$, $b, b', b'' \in B$ и $r \in R$. Факторгруппа F/K называется *тензорным произведением* R-модулей A и B и обозначается через $A \otimes_R B$. Обозначим через τ естественный гомоморфизм F на $A \otimes_R B$ и положим $a \otimes b = \tau(a, b)$. Подчеркнем, что каждый элемент из $A \otimes_R B$ представляется как линейная комбинация элементов вида $a \otimes b$ с целыми коэффициентами. Однако такое представление не является однозначным. В частности, возможно, что $a \otimes b = 0$ при $a, b \neq 0$.

Пример: $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}n = 0$, если н. о. д. $(m, n) = 1$. Действительно, $um + vn = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbf{Z}$, откуда

$$[x]_m \otimes [y]_n = [umx + vnx]_m \otimes [y]_n = [vx]_m\, n \otimes [y]_n =$$
$$= [vx]_m \otimes [ny]_n = [vx]_m \otimes [0_n] = 0,$$

где $[z]_k$ — класс вычетов по модулю k, содержащий z.

Для любых $a,\ a',\ a'' \in A$, $b,\ b',\ b'' \in R$ и $r \in R$ справедливы равенства: 1) $(a' + a'') \otimes b = a' \otimes b + a'' \otimes b$; 2) $a \otimes (b' + b'') = a \otimes b' + a \otimes b''$; 3) $ar \otimes b = a \otimes rb$; 4) $0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$; 5) $(-a) \otimes b = a \otimes (-b) = -(a \otimes b)$.

Пусть A — правый, а B — левый R-модули. Отображение φ множества $A \times B$ в абелеву группу G называется *билинейным*, если для любых $a, a', a'' \in A$, $b, b', b'' \in B$ и $r \in R$ справедливы равенства

$$\varphi(a' + a'',\ b) = \varphi(a',\ b) + \varphi(a'',\ b),$$
$$\varphi(a,\ b' + b'') = \varphi(a,\ b') + \varphi(a,\ b'')$$

и

$$\varphi(ar,\ b) = \varphi(a,\ rb).$$

Если A — правый, а B — левый R-модули, то абелева группа T изоморфна тензорному произведению

$A \otimes_R B$ тогда и только тогда, когда существует такое билинейное отображение σ прямого произведения $A \times B$ в T, что $\operatorname{Im}\sigma$ порождает группу T и для любой абелевой группы T' и любого билинейного отображения $\varphi\colon A \times B \to T'$ найдется такой гомоморфизм абелевых групп $\psi\colon T \to T'$, что $\sigma\psi = \varphi$.

Если имеет место ситуация ${}_RA_S$ и ${}_SB_T$, то абелева группа $A \otimes_S B$ становится R-T-бимодулем, если для любых $a \in A$, $b \in B$, $r \in R$ и $t \in T$ положить $r(a \otimes b) = ra \otimes b$ и $(a \otimes b)t = a \otimes bt$.

В ситуации ${}_RA_S$, ${}_SB_T$ и ${}_TC_U$ существует изоморфизм R-U-бимодулей

$$\Phi\colon (A \otimes_S B) \otimes_T C \to A \otimes_S (B \otimes_T C),$$

где

$$\Phi((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$$

для любых $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$. Если имеет место ситуация ${}_RA_T$, ${}_SB_R$ и ${}_SC_T$, то существует изоморфизм T-U-бимодулей

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_S(B, C)) \to \operatorname{Hom}_S(B \otimes_R A, C),$$

где

$$\Phi(\varphi)(b \otimes a) = \varphi(a)(b)$$

для любых $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_S(B, C))$, $a \in A$ и $b \in B$.

В ситуации ${}_RA_S$, ${}_SB_T$ и ${}_UC_T$ имеет место изоморфизм R-U-бимодулей

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_S(A, \operatorname{Hom}_T(B, C)) \to \operatorname{Hom}_T(A \otimes_S B, C),$$

где

$$\Phi(\varphi)(a \otimes b) = \varphi(a)(b)$$

для любых $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(A, \operatorname{Hom}_T(B, C))$, $a \in A$ и $b \in B$ (см. [44], § II.5).

Если A — правый R-модуль, $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, а $\mathbf{Z}$ — группа целых чисел, то абелева группа $A^{\#} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ становится правым R-модулем, если для любых $r \in R$, $\varphi \in A^{\#}$ и $a \in A$ положить $(\varphi r)(a) = \varphi(ar)$. Этот модуль $A^{\#}$ называется *модулем характеров* модуля A (см. п. 4.3).

На каждом правом R-модуле M для любого n и любого набора $(r_1, \ldots, r_n)$ элементов из R, где $r_1 + \ldots + r_n = 1$, определена n-арная операция $|r_1, \ldots, r_n|$:

$$(a_1, \ldots, a_n)\,|r_1, \ldots, r_n| = a_1r_1 + \ldots + a_nr_n.$$

Возникающая таким образом универсальная алгебра называется *аффинным модулем.* Подробнее см. Ostermann F., Schmidt J.//J. reine and angew. Math. — 1966. — V. 224. — P. 44—57; Csakany B.// Acta Sci. Math. — 1975. — V. 37, N 1—2. — P. 3—10; Сафуанов И. С.//Абелевы группы и модули. — Вып. 4. — Томск, 1986. — С. 118—150.

Систематическое изложение основ теории модулей на русском языке можно найти в учебниках [18], [44], [45], [47], [48], [57], [62], [76], [87], [88], [90]. Из зарубежных монографий отметим [105], [108], [115], [142], [173], [188], [237], [242], [272]. Теоретико-множественным и теоретико-модельным методам в теории модулей и теории абелевых групп посвящены монографии [99], [141], [231]. Интерес к этому направлению связан, в частности, с тем, что, как выяснилось, ряд результатов гомологической алгебры и теории абелевых групп зависит от выбора аксиоматики теории множества. Модули над групповыми алгебрами рассматривались в [201], над цепными кольцами — в [150], а над коммутативными кольцами — в [235], [247] и [267]. Поведение модулей при расширении основного кольца обсуждается в [166]. Теория линейных автоматов, широко использующая модули над коммутативными кольцами, изложена в [121]. Регулярно публиковались обзоры по новейшим результатам теории модулей (см. [65], [66], где указаны и все предыдущие обзоры).

4.2. Специальные классы модулей. Если x — элемент, а X — подмножество правого R-модуля M, то полагаем

$$\mathrm{Ann}\, x = \{r \mid r \in R,\ xr = 0\}$$

и

$$\mathrm{Ann}\, X = \{r \mid r \in R,\ xr = 0 \text{ для всех } x \in X\}.$$

Как $\mathrm{Ann}\, x$ так и $\mathrm{Ann}\, X$ — правые идеалы кольца R. Они называются *аннуляторами элемента* x и *множества* X соответственно. Аннулятор любого подмодуля модуля M оказывается двусторонним идеалом. Двусторонний идеал I кольца R оказывается аннулятором некоторого неприводимого правого [левого] R-модуля тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I примитивно справа [слева] ([90], п. 26.12). Если $\mathrm{Ann}\, M = 0$, то модуль M называется *точным.* Каждый правый

R-модуль M можно рассматривать как правый $(R/\operatorname{Ann} M)$-модуль, если для любых $x \in M$ и $r \in R$ положить $x(r + \operatorname{Ann} M) = xr$. Этот $(R/\operatorname{Ann} M)$-модуль оказывается точным. Правый R-модуль M точен тогда и только тогда, когда соответствующее представление кольца R в $\operatorname{End}_{\mathbf{Z}} M$ оказывается вложением. Всякий модуль, содержащий точный подмодуль, точен. В частности, точен любой правый R-модуль, содержащий R в качестве подмодуля. Модуль M называется *конечно точным*, если R как подмодуль содержится в прямой сумме некоторого конечного множества экземпляров модуля M, и *ограниченным*, если $\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} x$ для некоторого $x \in M$.

Правый R-модуль M оказывается точным тогда и только тогда, когда его гомотетия Γ_M является вложением. Если же Γ_M является наложением R на $\operatorname{Biend} M$, то модуль M называется *сбалансированным*.

Пусть M^{**} — модуль, бидуальный к правому R-модулю M и Φ_M: $M \to M^{**}$ — описанный в п. 4.1 гомоморфизм. Модуль M называется *полурефлексивным* [*рефлексивным*], если Φ_M — вложение [изоморфизм]. Полурефлексивный модуль называется также *модулем без кручения в смысле Басса* (torsion less). Эквивалентны следующие свойства правого R-модуля M: (1) M полурефлексивен; (2) если $0 \neq x \in M$, то $\varphi(x) \neq 0$ для некоторого $\varphi \in M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$; (3) M изоморфен подмодулю прямого произведения некоторого множества экземпляров модуля R (см. [73], с. 112, п. 2.38). Прямая сумма конечного числа модулей рефлексивна тогда и только тогда, когда рефлексивны все слагаемые. Если M — рефлексивный модуль, то модули M^*, M^{**}, M^{***}, ... также рефлексивны ([45], п. 12.2).

Множество $\mathscr{E}$ элементов правого R-модуля F называется *базой*, если каждый элемент a из F единственным способом представляется в форме $a = \sum_{e \in \mathscr{E}} er_e$, где $r_e \in R$, причем почти все r_e равны 0. Ясно, что база содержит лишь ненулевые элементы и что правый R-модуль R обладает одноэлементной базой $\{1\}$. Модуль, обладающий базой, называется *свободным*. Следующие свойства правого R-модуля F равносильны: (1) F свободен; (2) F содержит такое подмножество $\mathscr{E}$, что, каков бы ни был правый R-мо-

дуль M и отображение φ множества $\mathscr{E}$ в M, найдется такой гомоморфизм ψ модуля F в M, что $\psi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \mathscr{E}$; (3) F изоморфен внешней прямой сумме некоторого множества экземпляров правого R-модуля R. Всякий ненулевой правый модуль над телом свободен и все его базы равномощны. Однако существуют такие кольца R, что некоторые свободные модули над ними (правда, обязательно обладающие конечной базой!) допускают базы, содержащие различное число элементов ([87], с. 61—62). Про свободный конечно порожденный модуль, все базы которого содержат одно и то же число элементов, говорят, что он обладает *инвариантным базисным числом.* Инвариантным базисным числом обладают, например, все конечно порожденные свободные модули над коммутативными кольцами, над PI-кольцами, над кольцами, артиновыми [нётеровыми] слева или справа, над такими кольцами R, что все кольца матриц $M_n(R)$ конечны по Дедекинду ([90], п. 7.23.6). Каждый правый R-модуль является гомоморфным образом свободного. В частности, любой правый R-модуль M, порожденный n элементами, изоморфен фактормодулю правого R-модуля n-мерных строк над кольцом R.

Если F — свободный правый R-модуль с базой $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и в качестве умножения в $\mathrm{End}_R F$ принято $\varphi \circ \psi$ (см. п. I. 1.4), то кольцо $\mathrm{End}_R F$ изоморфно кольцу матриц $M_n(R)$, причем изоморфизм $\mathscr{M}$: $\mathrm{End}_R F \to M_n(R)$ определяется условием, что i-м столбцом матрицы $\mathscr{M}(\varphi)$, где $\varphi \in \mathrm{End}_R F$, служит столбец

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

где $\varphi(e_i) = e_1 a_{1i} + \ldots + e_n a_{ni}$. Если же F — свободный левый R-модуль с базой $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и в качестве умножения в $\mathrm{End}_R F$ взято $\varphi\psi$, то изоморфизм $\mathscr{M}$: $\mathrm{End}_R F \to \mathrm{Mat}_n R$ определяется требованием, что i-й строкой матрицы $\mathscr{M}(\varphi)$ служит $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, где $e_i\varphi = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$.

Если придерживаться второго определения умножения и F — свободный левый R-модуль с базой $\mathscr{E}$, то эндоморфизм φ принадлежит радикалу Джекобсона кольца $\mathrm{End}_R F$ в том и только том случае, когда

для базы $\mathscr{E}$ или, что равносильно, для любой базы модуля F из равенств $\varphi(e)=\sum_{g\in\mathscr{E}} r_{eg}g$, где $e\in\mathscr{E}$ и $r_{eg}\in R$, вытекает, что r_{eg} принадлежит радикалу Джекобсона кольца R, и если $L_\iota=\sum_{\varkappa\in\mathscr{E}} Rr_{\iota\varkappa}$, то для любой последовательности $\iota_1, \iota_2, \ldots$ различных индексов из $\mathscr{E}$ и любых $a_k\in L_{\iota_k}$ найдется такой номер n, что $a_1\ldots a_n=0$. Заметим, что в случае конечного множества $\mathscr{E}$ второе условие выполняется автоматически (Ware R., Zelmanowitz J.//Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — V. 26, N 1. — P. 15—20). Если A — правый R-модуль, а F — свободный левый R-модуль с базой $\mathscr{E}$ и $A_l=A$ для всех $l\in\mathscr{E}$, то отображение

$$\varphi\colon A\otimes_R F\to \sum_{e\in\mathscr{E}}^{\otimes} A_e,$$

где

$$\varphi\Big(a\otimes\sum_{e\in\mathscr{E}} r_e e\Big)=(\ldots, ar_e, \ldots),\quad a\in A,\ r_e\in R,$$

является изоморфизмом абелевых групп. Более того, если F рассматривать как R-R-бимодуль, то φ оказывается изоморфизмом правых R-модулей. В частности, изоморфизмом правых R-модулей является отображение $\varphi\colon A\to A\otimes_R R$, где $\varphi(a)=a\otimes 1$. Если A — левый R-модуль, то отображение $\psi\colon A\to R\otimes_R A$, где $\psi(a)=1\otimes a$, оказывается изоморфизмом левых R-модулей.

Правый R-модуль называется *конечно порожденным*, если он является линейной оболочкой некоторого конечного множества.

Примером конечно порожденного модуля служит модуль n-мерных строк над произвольным кольцом R. Действительно, положив

$$e_i=(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{i-1},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

для любой строки $a=(r_1,\ \ldots,\ r_n)$, $r_i\in R$, будем иметь

$$a=e_1r_1+\ldots+e_nr_n.$$

Для получения примера модуля, не являющегося конечно порожденным, рассмотрим множество всех счетных последовательностей элементов некоторого кольца R и определим на нем операции, полагая

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots)+(b_1,\ b_2,\ \ldots)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots)$$

и

$$(a_1, a_2, \ldots) r = (a_1 r, a_2 r, \ldots).$$

Заметим, что поскольку каждое кольцо с единицей, рассматриваемое как модуль над собой, порождается одним элементом 1, то ясно, что подмодуль конечно порожденного модуля может не быть конечно порожденным.

Каждый подмодуль конечно порожденного модуля M отличный от M содержится в некотором максимальном подмодуле. Фактормодуль конечно порожденного модуля конечно порожден. Если подмодуль H модуля M и фактормодуль M/H конечно порождены, то конечно порожденным оказывается и модуль M. Над коммутативным кольцом главных идеалов всякий конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму циклических подмодулей. Конечно порожденные модули над нётеровыми кольцами исследуются в [107].

Правый R-модуль M называется *конечно копорожденным*, если в любом множестве $\{M_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ его подмодулей, удовлетворяющих условию $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} M_\iota = 0$ для подходящего конечного подмножества $\mathfrak{I}_0 \subseteq \mathfrak{I}$ имеет место $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}_0} M_\iota = 0$. Фактормодуль M/H произвольного модуля M оказывается конечно копорожденным тогда и только тогда, когда для любого множества $\{M_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ подмодулей модуля M удовлетворяющих условию $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} M_\iota = H$ имеем $H = \bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{I}_0} M_\iota$ для подходящего конечного подмножества $\mathfrak{I}_0 \subseteq \mathfrak{I}$ (см. [45], с. 52, следствие 3.1.11).

Если модуль $M = A \oplus B$ разлагается в прямую сумму счетно порожденных подмодулей, то то же самое верно и для модулей A и B (см. [45], с. 348, теорема 13.6.4).

Модуль, порожденный одним элементом, называется *циклическим*. К числу циклических правых R-модулей принадлежат все главные правые идеалы кольца.

Правый R-модуль M называется *конечно представимым* или *конечно определенным*, если существует такой свободный правый R-модуль F, что M изоморфен фактормодулю F/K, где K — конечно порожденный подмодуль модуля F. Если фактормодуль M/A

конечно представим, а M конечно порожден, то A конечно порожден. Модуль, изоморфный фактормодулю R/aR, называется *циклически представимым*. Конечно представимый правый модуль над цепным кольцом разлагается в прямую сумму циклически представимых подмодулей ([90], п. 20.41).

Модуль, являющийся своим минимальным подмодулем, называется *неприводимым* или *простым*. Други и словами, неприводимым называется модуль, отличный от нуля и не содержащий никаких подмодулей, кроме себя самого и нулевого. Разумеется, всякий минимальный подмодуль является неприводимым модулем. Ясно также, что всякий неприводимый модуль является циклическим и порождается любым из своих ненулевых элементов. Фактормодуль M/A оказывается неприводимым тогда и только тогда, когда A — максимальный подмодуль модуля M. Простые правые R-модули и только они изоморфны фактормодулям R/H, где H — максимальный правый идеал кольца R.

Примером неприводимого модуля над кольцом целых чисел служат группы простого порядка. Поле (и даже тело) является неприводимым модулем над самим собой. Минимальными идеалами кольца $P \times P$, где P — поле, служат множества $\{(x, 0) \mid x \in P\}$, $\{(0, x) \mid x \in P\}$ и $\{(x, x) \mid x \in P\}$.

Модуль называется *вполне приводимым* или *полупростым*, если он разлагается в прямую сумму некоторого множества неприводимых модулей. Если модуль M равен сумме неприводимых модулей, то он вполне приводим (но это не означает, что данная сумма оказывается прямой!). Если M — вполне приводимый модуль и $M = \sum_{\iota \in \mathfrak{I}}{}^{\oplus} M_\iota$ — одно из его разложений в прямую сумму неприводимых модулей, то: 1) все ненулевые подмодули и фактормодули модуля M вполне приводимы, причем каждое из их неприводимых слагаемых изоморфно одному из модулей M_ι; 2) каждый подмодуль модуля M выделяется прямым слагаемым; 3) каждый фактормодуль модуля M изоморфен его подмодулю. Если

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_m = M_1' \oplus \ldots \oplus M_n'$$

— два разложения вполне приводимого правого модуля M в прямую сумму неприводимых подмодулей,

то $m=n$ и при подходящей нумерации $M_i \simeq M_i'$ для всех i.

Кольцо R с единицей называется *вполне приводимым справа*, если R — вполне приводимый правый R-модуль. Другими словами, кольцо вполне приводимо справа, если оно разлагается в прямую сумму своих минимальных правых идеалов (число слагаемых автоматически оказывается конечным). Вполне приводимыми справа [слева] оказываются классически полупростые кольца и только они (см. п. 2.5). Из указанных выше результатов вытекает, что любой правый модуль над таким кольцом R вполне приводим и, более того, изоморфен внешней прямой сумме некоторых минимальных правых идеалов кольца R.

Правый R-модуль M называется *локальным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных друг другу свойств: 1) M содержит наибольший собственный (т. е. отличный от M) подмодуль; 2) $M/\operatorname{rad} M$ — простой модуль. Модуль M называется *локально представимым*, если $M \simeq M'/M''$, где M' и M'' — локальные модули.

Ненулевой правый R-модуль M называется *неразложимым*, если $M = A \oplus B$ влечет за собой $A=0$ или $B=0$.

Неразложимость модуля M равносильна тому, что 0 и 1 являются единственными идемпотентами кольца $\operatorname{End}_R M$. В частности, M неразложим, если $\operatorname{End}_R M$ — локальное кольцо. Обратное верно, например, если модуль M инъективен (см. ниже). Имеет место *теорема Круля—Ремака—Шмидта*: если $M = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota = \sum\limits_{\varkappa \in \mathfrak{K}}^{\oplus} B_\varkappa$, кольца $\operatorname{End}_R A_\iota$ локальны для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ и модули $B_\varkappa$ неразложимы для всех $\varkappa \in \mathfrak{K}$, то существует такое взаимно однозначное отображение $\sigma\colon \mathfrak{J} \to \mathfrak{K}$, что $A_\iota \simeq B_{\sigma(\iota)}$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ (см. [45], гл. 7). Подробному рассмотрению неразложимых модулей посвящена монография [212]. Неразложимые модули над кольцом $\Phi[x, y]/I$, где Φ — поле, а идеал I порожден элементами x^2, xy и y^2, рассматриваются в [164].

Если A и B — правые R-модули, то гомоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$ называется *тотальным неизоморфизмом*, если из условий $A = A_0 \oplus A_1$, где $A_0 \neq 0$, $B = B_0 \oplus B_1$ и $\varphi(A_0) \subseteq B_0$, вытекает, что ограничение φ

на A_0 не является изоморфизмом. Положим

$$\mathrm{Tot}(A, B) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B),\ \varphi \text{ — тотальный неизоморфизм}\}.$$

Модуль M называется *тотальным*, если $\varphi, \psi \in \mathrm{Tot}(A, B)$ влечет $\varphi + \psi \in \mathrm{Tot}(A, B)$. К числу тотальных относятся все модули с локальным кольцом эндоморфизмов. Подробнее см. [250].

Модуль называется *однородным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение или, что то же самое, если все его ненулевые подмодули существенны. Однородность модуля равносильна неразложимости всех его ненулевых подмодулей.

Натуральное число n называют *размерностью Голди*-модуля M, если M содержит прямую сумму какихлибо n своих ненулевых подмодулей и не содержит таких прямых сумма, содержащих большее число слагаемых.

Если модуль M обладает размерностью Голди, то он называется *конечномерным* (*в смысле Голди*). Эквивалентны следующие свойства модуля M: (1) M — конечномерный модуль; (2) M содержит конечное множество однородных подмодулей $U_1, \ldots, U_n$ такое, что сумма $U_1 + \ldots + U_n$ оказывается прямой и является существенным подмодулем модуля M; (3) каждый подмодуль модуля M удовлетворяет условию максимальности для подмодулей, выделяющихся прямыми слагаемыми; (4) для каждой последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ подмодулей модуля M, где A_i выделяется прямым слагаемым в A_{i+1}, имеем $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$ для некоторого номера n; (5) для каждой последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ подмодулей модуля M, где A_{i+1} выделяется прямым слагаемым в A_i, имеем $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$ для некоторого номера n; (6) каждый подмодуль модуля M содержит конечно порожденный существенный подмодуль; (7) M удовлетворяет условию минимальности [максимальности] для подмодулей, являющихся дополнительными для каких-либо подмодулей; (8) M удовлетворяет условию минимальности [максимальности] для замкнутых подмодулей. Если подмодуль A модуля M и фактормодуль M/A конечномерны, то M

также конечномерен. При этом $\dim M \leqslant \dim A + \dim(M/A)$, где $\dim X$ обозначает размерность Голди модуля X. Если M_1, M_2 и $M_1 \oplus M_2$ — конечномерные модули, то $\dim(M_1 \oplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$ (см. [90], ч. 1, с. 260, предложение 4.19; [45], с. 166, упр. 11, с. 185, упр. 4; Loonstra F.//Lect. Notes Math. — 1983. — V. 1006. — С. 630—638).

Правый R-модуль называется *нётеровым* [*артиновым*], если частично упорядоченное множество всех подмодулей этого модуля удовлетворяет условию максимальности [минимальности]. Кольцо R с единицей называется *нётеровым* [*артиновым*] *справа*, если оно нётерово [артиново] как правый R-модуль.

Наиболее популярный пример нётерова кольца — кольцо целых чисел. Нётеровыми являются кольцо многочленов над полем и, как уже отмечалось, любые конечномерные алгебры с единицей. Последние оказываются и артиновыми кольцами. Кольцо целых чисел не артиново, ибо содержит бесконечную убывающую цепь идеалов

$$\mathbf{Z} \supsetneqq 2\mathbf{Z} \supsetneqq 4\mathbf{Z} \supsetneqq \ldots \supsetneqq 2^n\mathbf{Z} \supsetneqq \ldots$$

Как нётеровыми, так и артиновыми является любое конечное кольцо, а также кольцо матриц над телом. Кольцо действительных функций на отрезке [0, 1] не является ни артиновым, ни нётеровым. Для доказательства достаточно рассмотреть идеалы

$$I_n = \left\{ f \mid f(x) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \right\}$$

и

$$J_n = \left\{ f \mid f(x) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \right\}$$

для $n = 1, 2$.

Конечно порожденные правые модули над нётеровым [артиновым] справа кольцом нётеровы [артиновы]. Прямая сумма конечного числа нётеровых [артиновых] модулей нётерова [артинова].

Пусть M — правый R-модуль и A — его подмодуль. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) M — нётеров модуль; (2) A и M/A — нётеровы модули; (3) каждый подмодуль модуля M конечно порожден; (4) если $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — непустое множество подмодулей модуля M, то $\sum_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota = \sum_{\iota \in \mathfrak{J}_0} A_\iota$, где $\mathfrak{J}_0$ — некоторое конечное подмножество множества $\mathfrak{J}$. Оказываются эквивалентными и следующие условия: (1) M — артинов модуль; (2) A и M/A — артиновы модули;

(3) каждый фактормодуль модуля M конечно копорожден; (4) если $\{A_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — непустое множество подмодулей модуля M, то $\bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} A_\iota = \bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}_0} A_\iota$, где $\mathfrak{J}_0$ — некоторое конечное подмножество множества $\mathfrak{J}$; (5) цоколь любого фактормодуля модуля M нётеров и является существенным подмодулем. Если модуль M нётеров [артинов], то всякий его сюръективный [инъективный] эндоморфизм оказывается автоморфизмом ([45], с. 146, теорема 6.1.2; [90], ч. 2, с. 113, следствие 19.16B; [76], с. 99, лемма).

Модуль M, являющийся нётеровым и артиновым одновременно, обладает *композиционным рядом*, т. е. содержит такую цепочку подмодулей $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ $\ldots \subseteq A_n = M$, что A_{i+1}/A_i — простой модуль или, что равносильно, A_i — максимальный подмодуль модуля A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В этом случае говорят также, что M — *модуль конечной длины*. Фактормодули A_{i+1}/A_i называются *факторами* композиционного ряда. Если $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_m = M$ — другой композиционный ряд модуля M, то $m = n$ и между факторами этих двух композиционных рядов можно так установить взаимно однозначное соответствие, что соответствующие друг другу факторы будут изоморфными модулями (*теорема Жордана—Гёльдера*). Обзор результатов, связанных с длиной модуля, дан в [165].

Возрастающим [*убывающим*] *рядом Лёви* (Лоева, Loewy) называется такая трансфинитная последовательность

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset \ldots$$
$$[M = M^{(0)} \supset M^{(1)} \supset \ldots \supset M^{(\alpha)} \supset M^{(\alpha+1)} \supset \ldots]$$

подмодулей модуля M, что фактормодули $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ $[M^{(\alpha)}/M^{(\alpha+1)}]$ — полупростые модули. Если $M = M_\alpha$ для некоторого α, то модуль M называется *модулем Лёви*, а наименьшее из α с указанным свойством — его *длиной Лёви*. Если M — правый R-модуль Лёви конечной длины Лёви n и J — радикал Джекобсона кольца R, то $MJ^n = 0$. Если R полулокально, то верно и обратное ([90], т. 2, с. 265). О длине Лёви проективных модулей см. [184].

Для вполне приводимого модуля M равносильны следующие условия: (1) M — сумма конечного числа

простых модулей; (2) M — прямая сумма конечного числа простых модулей; (3) M — модуль конечной длины; (4) M нётеров; (5) M артинов; (6) M конечно порожден; (7) M конечно копорожден ([45], с. 191, теорема 8.1.6). Если радикал Джекобсона J кольца R нильпотентен, а R/J классически полупросто, то свойства (3), (4) и (5) остаются равносильными для любого правого R-модуля M (см. [45], с. 223, теорема 9.3.11). Если M — модуль конечной длины и $\varphi \in \mathrm{End}_R M$, то найдутся такие подмодули $A, B \subseteq M$, что $M = A \oplus B$, $\varphi(A) \subseteq A$, $\varphi(B) \subseteq B$, ограничение φ на A является автоморфизмом модуля A, а ограничение φ на B — нильпотентным эндоморфизмом этого модуля (т. е. для некоторого n имеем $\varphi^n(x) = 0$ для всех $x \in B$ (*лемма Фитинга*). Отсюда вытекает, что модуль конечной длины неразложим тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов локально. Отметим еще, что для модуля M конечной длины любая подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца $\mathrm{End}\, M$, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов, оказывается нильпотентной полугруппой ([76], § 5.3; [90], ч. 2, п. 17.16—17.27).

Модуль называется *коатомарным*, если всякий его собственный подмодуль вкладывается в максимальный. К числу коатомарных принадлежат вполне приводимые модули и модули конечной длины. Модуль называется *полуартиновым* [*полунётеровым*], если все его ненулевые фактормодули обладают ненулевым цоколем [если ни один из его ненулевых подмодулей не совпадает со своим радикалом Джекобсона]. Нётеров модуль оказывается полуартиновым тогда и только тогда, когда он артинов ([45], с. 236—237).

Размерность Крулля $\text{K-dim}\, M$ модуля M определяется по индукции. Именно, размерность Крулля артинова модуля считается, по определению, равной нулю. Далее, полагаем, что размерность Крулля модуля M равна n, если M не имеет размерности Крулля, меньшей, чем n, и для любой убывающей последовательности $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ подмодулей модуля M все фактормодули M_i/M_{i+1}, за исключением, быть может конечного числа их, имеют размерность Крулля, меньшую чем n. Это определение распространяется на произвольные трансфиниты. Модуль может не иметь размерности Крулля. Однако она есть у любого

нётерова модуля. Более того, если модуль M представлен как объединение трансфинитной последовательности модулей с размерностью Крулля, не превосходящей α, то и сам модуль M обладает размерностью Крулля, не превосходящей α. *Размерность Габриэля* $\text{G-dim}\, M$ модуля M также определяется по индукции. Именно, если $M=0$, то $\text{G-dim}\, M=0$, а $\text{G-dim}\, M=\alpha$, если $\text{G-dim}\, M \nless \alpha$ и для всякого отличного от M подмодуля N модуля M найдется такой подмодуль $N' \subseteq M$, что $N \subseteq N'$ и $N \subseteq X \subseteq N'$ влечет $\text{G-dim}\, (X/N) \nless \beta$ и $\text{G-dim}\, (N'/X) < \beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Если N — подмодуль модуля M, то M обладает размерностью Крулля [Габриэля] в том и только том случае, когда ею обладают и M/N. Имеет место

$$\text{K-dim}\,(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) = \sup \{\text{K-dim}\, M_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$\text{G-dim}\left(\sum_{\iota \in \mathfrak{I}}^{\oplus} M_\iota\right) = \sup \{\text{K-dim}\, M_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$$

и

$$\text{K-dim}\, M \leqslant \text{G-dim}\, M \leqslant (\text{K-dim}\, M) + 1,$$

а если M нётеров или $\text{K-dim}\, M$ конечна, то $\text{G-dim}\, M = \text{K-dim}\, M + 1$. Если $\text{K-dim}\left(\sum_{\iota \in \mathfrak{I}}^{\oplus} M_\iota\right)$ существует, то второе из рассмотренных выше равенств справедливо и для размерности Крулля. Кольцо R обладает размерностью Крулля [Габриэля] тогда и только тогда, когда соответствующей размерностью обладает всякий конечно порожденный [всякий] R-модуль. При этом $\text{K-dim}\, M \leqslant \text{K-dim}\, R$ для любого конечно порожденного R-модуля M и $\text{G-dim}\, M \leqslant \text{G-dim}\, R$ для любого R-модуля ([223], §§ 3.1, 3.4, 4.1).

О размерности Гельфанда—Кириллова для модулей см. [197], гл. 5.

Если S, T, U — подмодули модуля M и $S \subseteq U$, то $(S+T) \cap U = S + T \cap U$ (ср. п. V. 2.2). Если для любых подмодулей S, T и U модуля M имеет место $(S+T) \cap U = S \cap U + T \cap U$, то он называется *дистрибутивным*.

Не всякий модуль дистрибутивен. Например, если M — двумерное пространство над полем P,

$$U = \{(x, 0) \mid x \in P\}, \quad S = \{(0, y) \mid y \in P\} \quad \text{и} \quad T = \{(x, x) \mid x \in P\},$$

то

$$(S+T) \cap U = U \neq \{0\} + \{0\} = (S \cap U) + (T \cap U).$$

Примером дистрибутивного модуля может служить кольцо целых чисел, рассматриваемое как модуль над собой, а также любой неприводимый модуль и любой цепной модуль.

Эквивалентны следующие свойства правого R-модуля M: (1) M дистрибутивен; (2) если A и B — подмодули модуля M и φ: $A/A \cap B \to B/A \cap B$ — гомоморфизм, то φ — нулевой; (3) $aR + bR = (a+b)R + aR \cap bR$ для любых $a, b \in M$; (4) $(a+b)R = aR \cap (a+b)R + bR \cap (a+b)R$ для любых $a, b \in M$; (5) $bR = aR \cap bR + (b-a)R \cap bR$ для любых $a, b \in M$; (6) $(a : bR) + (b : aR) = R$ для любых $a, b \in M$ (здесь $a : bR = \{r \mid r \in R,\ ar \in bR\}$); (7) для любых $a, b \in R$ существует правый идеал H кольца R такой, что $(a + b)R = aH + bH$; (8) если f: $M \to M'$ — гомоморфизм и A, B — подмодули модуля M, то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$; (9) любые два различных минимальных подмодуля любого фактормодуля модуля M не изоморфны. Если R инвариантно справа, то к этому списку можно добавить: (10) $R = (A : B) + (B : A)$ для любых конечно порожденных подмодулей A и B модуля M (здесь $A : B = \{r \mid r \in R,\ Ar \leqslant B\}$; (11) $A = B(B : A)$ для любого конечно порожденного подмодуля B и любого подмодуля A модуля B; (12) $((A + B) : C) = (A : C) + (B : C)$, где A, B, C — подмодули модуля M, причем A и B конечно порождены; (13) $(A : (B \cap C)) = (A : B) + (A : C)$, где A, B, C — подмодули модуля M, причем B и C конечно порождены. Отметим еще несколько свойств произвольного дистрибутивного правого R — модуля M: 1) все максимальные [минимальные] подмодули модуля M вполне инвариантны; 2) если каждый ненулевой фактормодуль любого подмодуля модуля M содержит максимальный [минимальный] подмодуль, то все подмодули модуля M вполне инвариантны; 3) если R полулокально, то M — *модуль Безу*, т. е. все его конечно порожденные подмодули циклические; 4) если R — полуцепное справа кольцо, то M разлагается в прямую сумму однородных подмодулей; 5) если R инвариантно справа и M конечно порожден, то все его подмодули вполне инвариантны ([48], [66], § 13; [9], п. 4.2).

Модуль называется *цепным*, если для любых его подмодулей A и B имеет место $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$, и *полуцепным*, если он разлагается в прямую сумму

цепных подмодулей. Модуль, разлагающийся в прямую сумму дистрибутивных подмодулей, называется *полудистрибутивным.*

4.3. Элементы гомологической алгебры. Строка $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, где A, B, C — модули, а φ и ψ — гомоморфизмы, называется *точной последовательностью*, если $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Нетрудно заметить, что точность последовательности $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B$ $\left[A \xrightarrow{\psi} B \to 0\right]$ означает, что φ — мономорфизм [ψ — эпиморфизм]. Напомним, что в случае модулей мономорфизмами [эпиморфизмами] являются гомоморфные вложения и только они. Последовательность $A_0 \to A_1 \to \ldots \to A_n$ называется *точной*, если точны последовательности $A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Точность* бесконечной последовательности определяется точно так же. В частности, последовательность $0 \to A \to B \to$ $\to C \to 0$ точна, если точны последовательности $0 \to$ $\to A \to B$, $A \to B \to C$ и $B \to C \to 0$. Следующие свойства точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ эквивалентны: (1) $\iota\varphi = 1_A$ для некоторого $\varphi\colon B \to A$; (2) $\psi\pi = 1_C$ для некоторого $\psi\colon C \to B$; (3) $B =$ $= (\operatorname{Im}\iota) \oplus H$ для некоторого подмодуля $H \subseteq B$; (4) существует такой эндоморфизм f модуля B, что $f^2 = f$ и $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\iota$. Последовательность, обладающая перечисленными свойствами, называется *расщепляющейся.*

Напомним, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ C \arrow[r, "\sigma"'] & D \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & B \arrow[d, "\chi"] \\ & C \end{tikzcd}$$

где A, B, C, D — модули, а φ, ψ, χ, ρ, σ — гомоморфизмы модулей, называются *коммутативными*, если $\varphi\psi = \rho\sigma$ и $\varphi\chi = \psi$ соответственно. Часто оказывается полезной *лемма о пяти гомоморфизмах*: если строки диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_2"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_1"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_0"] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{-1}"] & A_{-2} \arrow[d, "\chi_{-2}"] \\ B_2 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_{-1} \arrow[r] & B_{-2} \end{tikzcd}$$

точны, а все ее квадраты коммутативны, то справедливы следующие импликации: 1) если χ_2 — эпиморфизм, а χ_1 и χ_{-1} — мономорфизмы, то χ_0 — мономорфизм; 2) если χ_1 и χ_{-1} — эпиморфизмы, а χ_{-2} — мономорфизм, то χ_0 — эпиморфизм. Отсюда вытекает, что для диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\chi_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\chi_0"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точными строками и коммутативными квадратами из того, что χ_1 и χ_{-1} — мономорфизмы [эпиморфизмы] вытекает, что χ_0 — мономорфизм [эпиморфизм]. Отметим еще, что для диаграмм

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точными строками и коммутативными квадратами существуют гомоморфизмы ρ: $C \to C'$ и σ: $A \to A'$ соответственно, такие, что квадраты

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "\rho"'] \\ B' \arrow[r] & C' \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

также оказываются коммутативными. В этом случае говорят, что гомоморфизмы ρ и σ *дополняют* данные диаграммы до коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

соответственно ([44], с. 20, предложение 1.1).

Приведем еще *лемму о змее*: если

$$\begin{array}{ccccccc} & & N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N_2 & \xrightarrow{\psi_2} & N_3 \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} \\ 0 & \to & M_1 & \xrightarrow[\chi_1]{} & M_2 & \xrightarrow[\chi_2]{} & M_3 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма гомоморфизмов модулей с точными строками, то существуют такие гомоморфизмы модулей ρ_1, ρ_2, τ_1, τ_2 и ∂, что последовательность

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 \xrightarrow{\rho_1} \operatorname{Ker}\varphi_2 \xrightarrow{\rho_2} \operatorname{Ker}\varphi_3 \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker}\varphi_1 \to$$
$$\xrightarrow{\tau_1} \operatorname{Coker}\varphi_2 \xrightarrow{\tau_2} \operatorname{Coker}\varphi_3$$

точна. При этом если ψ_1 — мономорфизм, то ρ_1 также мономорфизм, а если χ_2 — эпиморфизм, то τ_2 также эпиморфизм ([76], § 11.3).

Модуль P называется *проективным*, если всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ A & \to & B & \to & 0 \end{array}$$

с точной строкой дополняется до коммутативной некоторым гомоморфизмом $P \to A$. Меняя в этом определении направление стрелок, приходим к следующему определению: модуль Q называется *инъективным*, если всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & A & \to & B \\ & & \downarrow & & \\ & & Q & & \end{array}$$

с точной строкой дополняется до коммутативной некоторым гомоморфизмом $B \to Q$. Следующие свойства правого R-модуля P эквивалентны: (1) P проективен; (2) всякая точная последовательность $0 \to A \to B \to$ $\to P \to 0$ расщепляется; (3) существует такой свободный модуль F, что $F = P \oplus H$ для некоторого подмодуля $H \subseteq F$; (4) если $P = \sum_{\iota \in \mathfrak{I}} a_\iota R$, то существуют $\varphi_\iota \in P^* = \operatorname{Hom}_R(P, R)$ такие, что для каждого $x \in P$

множество $\{\iota \mid \iota \in \mathfrak{J},\ \varphi_\iota(x) \neq 0\}$ конечно и $x = \sum_{\iota \in \mathfrak{J}} a_\iota \varphi_\iota(x)$; (5) P содержит такое подмножество $\mathscr{E}$, что $P = \sum_{e \in \mathscr{E}} eR$, и существуют $\varphi_l \in P^*$ такие, что для каждого $x \in P$ множество $\{e \mid e \in \mathscr{E},\ \varphi_e(x) \neq 0\}$ конечно и $x = \sum_{e \in \mathscr{E}} e\varphi_e(x)$ ([45], с. 120). Эквивалентными оказываются и следующие свойства правого R-модуля Q: (1) Q — инъективен; (2) всякая точная последовательность $0 \to Q \to A \to B \to 0$ расщепляется; (3) существует такой инъективный модуль $\bar{Q}$, что $\bar{Q} = Q \oplus H$ для некоторого подмодуля $H \subseteq \bar{Q}$. Свойство (2) можно сформулировать и так: модуль Q выделяется прямым слагаемым из всякого модуля, содержащего его в качестве подмодуля. Прямая сумма модулей проективна в том и только том случае, когда проективно каждое слагаемое, а инъективность прямого произведения равносильна инъективности каждого сомножителя. Всякая абелева группа, являющаяся проективным $\mathbf{Z}$-модулем, свободна. Если P' и P'' — проективные модули, а фактормодули P'/K' и P''/K'' изоморфны, то $P' \oplus K'' \cong P'' \oplus K'$ (*лемма Шануэля* — см. [49], с. 398). Абелева группа Q является инъективным $\mathbf{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда она *делима* (т. е. уравнение $mx = q$ разрешимо в ней для любых $0 \neq m \in \mathbf{Z}$ и $q \in Q$). Во многих случаях оказывается полезным *критерий Бэра*: если всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varkappa} & R \\ \downarrow & & \\ Q & & \end{array}$$

где $\varkappa$ — естественное вложение правого идеала I в кольцо R, дополняется до коммутативной некоторым гомоморфизмом $R \to Q$, то правый R-модуль Q инъективен.

Инъективным модулям посвящены монографии [143] и [253], а также обзор [206]. См. также [194].

Всякий свободный правый модуль проективен и, следовательно, всякий правый модуль является гомоморфным образом проективного. С другой стороны, всякий правый R-модуль M можно вложить в инъективный правый R-модуль Q. Это вложение можно осу-

ществить наиболее экономным способом: модуль Q может быть выбран так, что M является существенным подмодулем модуля Q. В этом случае говорят, что Q — *инъективная оболочка модуля* M. Мономорфизм $\psi\colon A\to Q$ оказывается вложением модуля A в его инъективную оболочку тогда и только тогда, когда любое вложение модуля Q в его существенное расширение оказывается изоморфизмом. Если Q' и Q'' — инъективные оболочки модуля M, то они *изоморфны над* M, т. е. существует изоморфизм $\varphi\colon Q'$—Q'' такой, что $\varphi(x)=x$ для всех $x\in M$. Любой инъективный модуль, содержащий модуль M, содержит и его инъективную оболочку.

Можно говорить и о минимальном представлении модуля как гомоморфного образа проективного: правый проективный R-модуль P называется *проективным накрытием* или *проективной оболочкой* правого R-модуля M, если существует такой эпиморфизм $\pi\colon P\to M$, что $\operatorname{Ker}\pi$ — косущественный подмодуль модуля P. В отличие от инъективной оболочки не всякий модуль обладает проективным накрытием (см. п. 3.6). Однако если $\pi'\colon P'\to M$ и $\pi''\colon P''\to M$ — проективные накрытия модуля M, то $\chi\pi''=\pi'$ для некоторого изоморфизма $\chi\colon P'\to P''$. Проективное накрытие конечно порожденного модуля конечно порождено ([90], п. 22.11(a)).

Правый R-модуль называется *полусовершенным*, если все его фактормодули обладают проективным накрытием. Каждый гомоморфный образ полусовершенного модуля, а также проективное накрытие такого модуля полусовершенны. Полусовершенность модуля равносильна полусовершенности его проективного накрытия. Проективный модуль полусовершенен тогда и только тогда, когда для каждого из его подмодулей существует дополнительный ([45], § 11.1).

Каждый проективный модуль разлагается в прямую сумму счетно порожденных подмодулей. Любой однородный подмодуль проективного правого R-модуля изоморфен некоторому правому идеалу кольца R. Если P — проективный правый модуль над полусовершенным кольцом R, J — радикал Джекобсона кольца R и подмодуль PJ мал в P (в силу леммы Накаямы это имеет место, если P конечно порожден), то P изоморфен прямой сумме главных неразложимых правых

R-модулей. Проективные правые модули P' и P'' над артиновым справа кольцом R с радикалом Джекобсона J изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны правые R/J-модули $P'/P'J$ и $P''/P''J$ (см. [45], следствие 13.6.5; [90], п. 20.16, 22.23; [76], § 6.2, 6.3).

Инъективная оболочка неприводимого модуля неразложима. Неразложимый инъективный модуль содержит не более одного минимального подмодуля. Инъективный правый модуль над нётеровым справа кольцом разлагается в прямую сумму неразложимых подмодулей. Если каждый из инъективных модулей Q' и Q'' изоморфен подмодулю другого, то модули Q' и Q'' изоморфны. Равносильны следующие свойства ненулевого инъективного правого R-модуля Q: (1) Q неразложим, (2) Q является инъективной оболочкой любого своего ненулевого подмодуля: (3) каждый подмодуль в Q однороден; (4) Q является инъективной оболочкой некоторого своего ненулевого однородного подмодуля ([45], § 6.6).

Эндоморфизм φ проективного [инъективного] модуля M принадлежит радикалу Джекобсона кольца $\operatorname{End} M$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi$ — косущественный [$\operatorname{Ker}\varphi$ — существенный] подмодуль модуля Q. Кольцо эндоморфизмов неразложимого инъективного модуля локально, а факторкольцо кольца эндоморфизмов любого инъективного модуля по его радикалу Джекобсона регулярно ([45], теоремы 7.2.8, 9.6.1, 9.6.2).

Правый R-модуль, являющийся проективным и инъективным одновременно, разлагается в прямую сумму конечно порожденных подмодулей. Если такой модуль неразложим, то он изоморфен некоторому правому идеалу eR, где $e^2 = e \in R$. Если инъективная оболочка конечно порожденного модуля проективна, то она конечно порождена ([45], следствия 13.6.6, 13.6.7; [90], п. 20.15).

Модуль называется Σ-*инъективным*, если инъективна прямая сумма любого множества экземпляров этого модуля. Эквивалентны следующие свойства правого R-модуля Q: (1) Q Σ-инъективный; (2) прямая сумма счетного множества экземпляров модуля Q инъективна; (3) R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов, являющихся аннуляторами

некоторых подмножеств модуля Q (см. [90], ч. 2, с. 179, предложение 20.3А).

Если $\sigma\colon A \to B$ — гомоморфизм модулей, то говорят, что модуль Q *инъективен* [*проективен*] *относительно* σ, если для любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to Q$ [$\varphi\colon Q \to B$] имеем $\varphi = \sigma\psi$ для подходящего гомоморфизма $\psi\colon B \to Q$ [$\varphi = \psi\sigma$ для подходящего гомоморфизма $\psi\colon Q \to A$]. В этой терминологии модуль оказывается инъективным [проективным] тогда и только тогда, когда он инъективен относительно всех мономорфизмов [проективен относительно всех эпиморфизмов]. Критерий Бэра говорит, что для инъективности правого R-модуля достаточно, чтобы он был инъективен относительно естественных вложений в кольцо R всех его правых идеалов.

Правый R-модуль P называется *стабильно свободным*, если существуют такие натуральные r и s, что $P \oplus R^s \simeq R^{r+s}$ (напомним, что $R^s = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{s}$). Наименьшее из таких r называется *стабильным рангом модуля* P. Стабильно свободный модуль, разумеется, проективен. Стабильно свободный модуль стабильного ранга 1 над коммутативным кольцом свободен. О стабильно свободных модулях см. [90], гл. 11.

Группа Гротендика кольца R, обозначаемая как $K_0(R)$, определяется как абелева группа, порожденная множеством всех попарно неизоморфных конечно порожденных проективных правых R-модулей с определяющими соотношениями $[P' + P''] = [P'] + [P'']$, где $[P]$ — класс модулей, изоморфных модулю P. Для конечно порожденных проективных правых R-модулей P' и P'' эквивалентны следующие условия: (1) $[P'] = [P'']$; (2) существует такой конечно порожденный проективный правый R-модуль P, что $P' \oplus P \simeq P'' \oplus P$; (3) существует такое натуральное s, что $P' \oplus R^s \simeq P'' \oplus R^s$ (см. [90], гл. 12).

Модуль называется *квазиинъективным*, если он инъективен относительно естественных вложений в него всех его подмодулей. Кроме инъективных, к числу квазиинъективных относятся все вполне приводимые модули. Модуль оказывается квазиинъективным тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным подмодулем своей инъективной оболочки. Пря-

мое слагаемое квазиинъективного модуля квазиинъективно, но прямая сумма даже двух квазиинъективных модулей может не быть квазиинъективной. По аналогии с инъективной оболочкой можно определить *квазиинъективную оболочку*. Факторкольцо кольца эндоморфизмов квазиинъективного модуля по его радикалу Джекобсона регулярно, причем идемпотенты можно поднимать по модулю радикала. Если Q — антисингулярный квазиинъективный модуль, то кольцо $\operatorname{End} Q$ регулярно и самоинъективно справа. Эквивалентны следующие свойства квазиинъективного правого R-модуля Q; (1) Q эндоконечен; (2) Q конечно точен; (3) Q эндоконечен и инъективен как $(R/\operatorname{Ann} Q)$-модуль. При выполнении этих условий Q оказывается инъективным модулем ([90], ч. 2, 104—111, 123, 126).

Самопроективные или *квазипроективные* модули, т. е. модули, проективные относительно естественных гомоморфизмов на свои фактормодули, — предмет монографии [171].

Модуль M называется *малоинъективным*, если для каждого эндоморфизма φ любого его подмодуля A найдется такой эндоморфизм ψ модуля M, что $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in A$. Назовем модуль M *малопроективным*, если для любого его подмодуля A и любого эндоморфизма φ фактормодуля M/A найдется такой эндоморфизм ψ модуля M, что $\pi\varphi = \psi\pi$, где π — естественный гомоморфизм модуля M на M/A.

Правый R-модуль G называется *образующим* [*кообразующим*], если всякий правый R-модуль изоморфен фактормодулю прямой суммы [подмодулю прямого произведения] некоторого множества экземпляров модуля G. Образующим является, например, само кольцо $\boldsymbol{R}$, рассматриваемое как правый R-модуль. Примером кообразующего служит прямое произведение инъективных оболочек всех попарно неизоморфных простых правых R-модулей. Этот кообразующий вкладывается в любой другой кообразующий. Следующие свойства правого R-модуля G эквивалентны: (1) G — образующий; (2) G сбалансирован и является конечно порожденным проективным $(\operatorname{End} G)$-модулем (т. е. сбалансирован, эндоконечен и эндопроективен); (3) существует гомоморфизм модуля G в прямое произведение некоторого множества экземпляров правого

R-модуля R; (4) существует эпиморфизм G на R; (5) $M = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(G,\, M)} \mathrm{Im}\, \varphi$ для любого правого R-модуля M; (6) для любого ненулевого гомоморфизма правых R-модулей $\varphi\colon A \to B$ имеем $\pi\varphi \neq 0$ для некоторого $\pi\colon G \to A$; (7) прямая сумма некоторого множества экземпляров модуля G — образующий; (8) прямая сумма любого множества экземпляров модуля G — образующий; (9) любой проективный правый R-модуль изоморфен прямому слагаемому прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля G. Оказываются эквивалентными и следующие свойства правого R-модуля G: (1) G — кообразующий; (2) $\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, G)} \mathrm{Ker}\, \varphi = 0$ для любого правого R-модуля M; (3) для любого ненулевого гомоморфизма правых R-модулей $\varphi\colon A \to B$ имеем $\varphi\sigma \neq 0$ для некоторого гомоморфизма $\sigma\colon B \to G$; (4) прямое произведение некоторого множества экземпляров модуля G — кообразующий; (5) прямое произведение любого множества экземпляров модуля G — кообразующий; (6) любой инъективный правый R-модуль изоморфен прямому слагаемому прямого произведения некоторого множества экземпляров модуля G; (7) G содержит инъективную оболочку любого прямого правого R-модуля ([90], ч. 1, с. 217, 404, 405; [45], с. 57—58, 101—102, 132—138; см. также обзор [273]).

Правый R-модуль D называется *плоским*, если для любого мономорфизма $\sigma\colon A \to B$ левых R-модулей, любых $x_1, \ldots, x_n \in D$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ равенство $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi(a_i) = 0$ в абелевой группе $D \otimes_R B$ влечет за собой равенство $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i = 0$ в абелевой группе $D \otimes_R A$ (это означает, что гомоморфизм $D \otimes_R \sigma$ — см. ниже — является мономорфизмом). Эквивалентны следующие свойства правого R-модуля D; (1) D — плоский модуль; (2) для любого левого идеала L кольца R, любых $x_1, \ldots, x_n \in D$ и любых $r_1, \ldots, r_n \in L$ равенство $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$ влечет за собой равенство $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i = 0$ в абелевой группе $D \otimes_R L$

(это означает, что гомоморфизм $D \otimes_R \sigma$, где σ — естественное вложение L в R, является мономорфизмом); (3) для любого равенства $\sum_{i=1}^{m} x_i r_i = 0$, где $x_i \in D$ и $r_i \in R$, найдутся такие элементы $y_1, \ldots, y_n \in D$ и $r_{i1}, \ldots, r_{im} \in R$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $a_i = \sum_{j=1}^{n} y_j r_{ij}$ и $\sum_{i=1}^{m} r_{ij} r_i = 0$; (4) модуль D изоморфен фактормодулю P/K, где P — проективный правый R-модуль и $KL = K \cap PL$ для любого левого идеала L кольца R; (5) если $0 \to K \xrightarrow{\sigma} F \to D \to 0$ — точная последовательность и F — свободный правый R-модуль, то для любого $u \in K$ найдется такой гомоморфизм φ: $F \to K$, что $\pi(\sigma(u)) = u$; (6) модуль характеров $D^{\#}$ инъективен; (7) D является прямым пределом проективных [свободных] правых R-модулей; (8) любой конечно порожденный подмодуль модуля D принадлежит плоскому подмодулю модуля D.

Прямая сумма модулей оказывается плоской тогда и только тогда, когда плоскими являются все слагаемые. Прямой предел плоских модулей — плоский модуль. Если A — подмодуль плоского правого R-модуля D, то фактормодуль D/A оказывается плоским тогда и только тогда, когда $AL = A \cap DL$ для любого конечно порожденного левого идеала L кольца R. Конечно представимый плоский модуль проективен. Плоские абелевы группы — это в точности абелевы группы без кручения.

С любыми двумя правыми R-модулями A и B связана абелева группа $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ (см. п. 4.2). Если $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B', B'')$, то обозначим через $\mathrm{Hom}_R(A, \varphi)$ гомоморфизм абелевой группы $\mathrm{Hom}_R(A, B')$ в абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(A, B'')$, определяемый равенством

$$\chi \, \mathrm{Hom}_R(A, \varphi) = \chi\varphi$$

для всех $\chi \in \mathrm{Hom}_R(A, B')$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\chi} & B' \\ {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A & \xrightarrow[\chi \, \mathrm{Hom}_R(A, \varphi)]{} & B'' \end{array}$$

Если $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A', A'')$, то рассмотрим гомоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_R(\varphi, B)\colon \mathrm{Hom}_R(A'', B) \to \mathrm{Hom}_R(A', B),$$

где

$$\chi\,\mathrm{Hom}_R(\varphi, B) = \varphi\chi$$

для всех $\chi \in \mathrm{Hom}_R(A'', B)$:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\chi\,\mathrm{Hom}_R(\varphi,\, B)"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A'' \arrow[r, "\chi"'] & B \end{tikzcd}$$

Если $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B', B'')$ и $\psi \in \mathrm{Hom}_R(B'', B''')$, то

$$\mathrm{Hom}_R(A, \varphi\psi) = \mathrm{Hom}_R(A, \varphi)\,\mathrm{Hom}_R(A, \psi),$$

а при $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A', A'')$ и $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A'', A''')$ имеем

$$\mathrm{Hom}_R(\varphi\psi, B) = \mathrm{Hom}_R(\psi, B)\,\mathrm{Hom}_R(\varphi, B).$$

В теоретико-категорных терминах это означает, что $\mathrm{Hom}_R(A, —)$ и $\mathrm{Hom}_R(—, B)$ являются, соответственно, ковариантным и контравариантным функторами из категории правых R-модулей в категорию абелевых групп (см. п. VII. 2.1).

Если $\varphi\colon A' \to A$ и $\psi\colon B \to B'$ — гомоморфизмы правых R-модулей, то оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(A, B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\varphi,\, B)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(A,\, \psi)"'] & \mathrm{Hom}_R(A', B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(A',\, \psi)"] \\ \mathrm{Hom}_R(A, B') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\varphi,\, B')"'] & \mathrm{Hom}_R(A', B') \end{tikzcd}$$

Это позволяет положить

$$\mathrm{Hom}_R(\varphi, \psi) = \mathrm{Hom}_R(\varphi, B)\,\mathrm{Hom}_R(A', \psi) = \\ = \mathrm{Hom}_R(A, \psi)\,\mathrm{Hom}_R(\varphi, B').$$

Если $A = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota$ — прямая сумма правых R-модулей, то для любого правого R-модуля B имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\sum_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota, B\Big) \simeq \prod_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathrm{Hom}_R(A_\iota, B).$$

Если A — правый R-модуль, а $B=\prod_{\iota\in\mathfrak{J}} B_\iota$ — прямое произведение правых R-модулей, то имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_R\left(A, \prod_{\iota\in\mathfrak{J}} B_\iota\right)\simeq\prod_{\iota\in\mathfrak{J}}\mathrm{Hom}_R(A, B_\iota).$$

Если $\varphi\colon A'\to A''$ — гомоморфизм левых R-модулей и B — правый R-модуль, то имеется гомоморфизм абелевых групп

$$\varphi\otimes_R B\colon\ A'\otimes_R B\to A''\otimes_R B,$$

определяемый равенством

$$(a'\otimes b)(\varphi\otimes_R B)=(a'\varphi)\otimes_R B$$

для любых $a'\in A'$ и $b\in B$. Аналогично, для любого левого R-модуля A и гомоморфизма $\psi\colon B'\to B''$ правых R-модулей равенство

$$(a\otimes b')(A\otimes_R\psi)=a\otimes(b'\psi)$$

определяет гомоморфизм абелевых групп

$$A\otimes_R\psi\colon\ A\otimes_R B'\to A\otimes_R B''.$$

Если $\varphi\colon A\to A'$ и $\psi\colon B\to B'$ — гомоморфизмы левых и правых R-модулей соответственно, то оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{CD}
A\otimes_R B @>{\varphi\otimes_R B}>> A'\otimes_R B\\
@V{A\otimes_R\psi}VV @VV{A'\otimes_R\psi}V\\
A\otimes_R B' @>>{\varphi\otimes_R B'}> A'\otimes_R B'
\end{CD}$$

Это дает возможность положить

$$\varphi\otimes_R\psi=(\varphi\otimes_R B)(A'\otimes_R\psi)=(A\otimes_R\psi)(\varphi\otimes_R B').$$

Если $A=\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota$ — прямая сумма правых [левых] R-модулей, то для любого левого [правого] R-модуля B имеет место изоморфизм абелевых групп

$$B\otimes_R\left(\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota\right)\simeq\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}(B\otimes_R A_\iota),$$

$$\left[\left(\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota\right)\otimes_R B\simeq\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}^{\oplus}(A_\iota\otimes_R B)\right].$$

Аналогичный результат справедлив и для прямых пределов:

$$B \otimes_R (\varinjlim A_\iota) \simeq \varinjlim (B \otimes_R A_\iota)$$

$$[(\varinjlim A_\iota) \otimes_R B \simeq \varinjlim (A_\iota \otimes_R B)].$$

Если $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ — точная последовательность правых R-модулей, то для любых правого R-модуля X и левого R-модуля Y оказываются точными последовательности абелевых групп

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X,\,\iota)} \mathrm{Hom}_R(X, B) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X,\,\pi)} \mathrm{Hom}_R(X, C),$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi,\,X)} \mathrm{Hom}_R(B, X) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota,\,X)} \mathrm{Hom}_R(A, X),$$

$$A \otimes_R Y \xrightarrow{\iota \otimes_R Y} B \otimes_R Y \xrightarrow{\pi \otimes_R Y} C \otimes_R Y \to 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для точной последовательности левых R-модулей. Проективность [инъективность] модуля X равносильна сюръективности гомоморфизма $\mathrm{Hom}_R(X, \pi)$ [гомоморфизма $\mathrm{Hom}_R(\iota, X)$] для любой точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ или, что то же самое, возможности дополнить первую [вторую] последовательность стрелкой $\to 0$. Как уже отмечалось, модуль Y является плоским, если $\iota \otimes_R Y$ — мономорфизм, что равносильно возможности дополнить стрелкой $0 \to$ третью диаграмму. Для правого R-модуля X имеем: X — плоский модуль тогда и только тогда, когда для любой точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ левых R-модулей оказывается точной последовательность

$$0 \to X \otimes_R A \xrightarrow{X \otimes_R \iota} X \otimes_R B \xrightarrow{X \otimes_R \pi} X \otimes C \to 0.$$

Для каждого модуля M могут быть построены точные последовательности

$$\ldots \to P_3 \xrightarrow{\pi_3} P_2 \xrightarrow{\pi_2} P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \xrightarrow{\pi_0} M \to 0 \qquad (*)$$

и

$$0 \to M \xrightarrow{\sigma_0} Q_0 \xrightarrow{\sigma_1} Q_1 \xrightarrow{\sigma_2} Q_2 \xrightarrow{\sigma_3} Q_3 \to \ldots, \qquad (**)$$

где P_i — проективные, а Q_i — инъективные модули. Эти последовательности называются *проективной* и *инъективной резольвентой* модуля M соответственно. Если $P_{n-1} \neq 0$ и $P_k = 0$ при $k \geqslant n$ [$Q_{n-1} \neq 0$ и $Q_k = 0$ при $k \geqslant n$], то число n называется *длиной* соответствующей резольвенты. Если модуль M обладает проективной [инъективной] резольвентой длины n, но не обладает соответствующей резольвентой меньшей длины, то говорят, что *проективная* [*инъективная*] *размерность* модуля M равна n и пишут $\mathrm{p.dim}\, M = n$ [$\mathrm{i.dim}\, M = n$]. *Правая* [*левая*] *глобальная размерность* кольца R определяется как максимум проективных или, что то же самое, инъективных размерностей правых [левых] R-модулей. Правая и левая глобальные размерности нётерова справа и слева кольца совпадают ([90], п. 8.23.1). Правая глобальная размерность кольца R равна нулю [единице] тогда и только тогда, когда R классически полупросто [наследственно справа].

Если даны R-модуль B и проективная резольвента (*) R-модуля M, то возникает последовательность абелевых групп

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_0, B)} \mathrm{Hom}_R(P_1, B) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_1, B)} \mathrm{Hom}_R(P_2, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_2, B)} \mathrm{Hom}_R(P_3, B) \to \ldots$$

При этом

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\pi_n, B)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\pi_{n+1}, B))$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

что позволяет рассмотреть факторгруппы

$$H^n(M, B) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\pi_{n+1}, B))/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\pi_n, B)),$$

которые, как оказывается, не зависят от выбора проективной резольвенты модуля M. Аналогично, имея модуль A и инъективную резольвенту (**) модуля M получим последовательность абелевых групп

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A, \sigma_0)} \mathrm{Hom}_R(A, Q_0) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A, \sigma_1)} \mathrm{Hom}_R(A, Q_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A, \sigma_2)} \mathrm{Hom}_R(A, Q_2) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A, \sigma_3)} \mathrm{Hom}_R(A, Q_3) \to \ldots$$

При этом

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_R(A, \sigma_n) \subseteq \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_R(A, \sigma_{n+1}))$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

и факторгруппы

$$H_n(A, M) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_R(A, \sigma_{n+1}))/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_R(A, \sigma_n))$$

не зависят от выбора инъективной резольвенты. Более того, для любых модулей A и B имеет место изоморфизм

$$H^n(A, B) \simeq H_n(A, B),$$

что позволяет положить

$$\operatorname{Ext}_R^n(A, B) = H^n(A, B).$$

Если $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ — точная последовательность, то для любого модуля M существуют такие гомоморфизмы абелевых групп

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, \iota)\colon \operatorname{Ext}_R^n(M, A) \to \operatorname{Ext}_R^n(M, B),$$
$$\operatorname{Ext}_R^n(M, \pi)\colon \operatorname{Ext}_R^n(M, B) \to \operatorname{Ext}_R^n(M, C),$$
$$\Delta_0\colon \operatorname{Hom}_R(M, C) \to \operatorname{Ext}_R^1(M, A),$$
$$\Delta_n\colon \operatorname{Ext}_R^n(M, C) \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, A),$$
$$\operatorname{Ext}_R^n(\iota, M)\colon \operatorname{Ext}_R^n(B, M) \to \operatorname{Ext}_R^n(A, M),$$
$$\operatorname{Ext}_R^n(\pi, M)\colon \operatorname{Ext}_R^n(C, M) \to \operatorname{Ext}_R^1(C, M),$$
$$\Delta^0\colon \operatorname{Hom}_R(A, M) \to \operatorname{Ext}_R^1(C, M),$$

и

$$\Delta^n\colon \operatorname{Ext}_R^n(A, M) \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(C, M),$$

что оказываются точными последовательности

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(M, \iota)} \operatorname{Hom}_R(M, B) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(M, \pi)} \operatorname{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{\Delta_0} \operatorname{Ext}_R^1(M, A) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Ext}_R^1(M, \iota)} \operatorname{Ext}_R^1(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Ext}_R^1(M, \pi)} \operatorname{Ext}_R^1(M, C) \to$$
$$\xrightarrow{\Delta_1} \operatorname{Ext}_R^2(M, A) \to \ldots \to \operatorname{Ext}_R^{n-1}(M, C) \to$$
$$\xrightarrow{\Delta_{n-1}} \operatorname{Ext}_R^n(M, A) \xrightarrow{\operatorname{Ext}_R^n(M, \iota)} \operatorname{Ext}_R^n(M, B) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Ext}_R^n(M, \pi)} \operatorname{Ext}_R^n(M, C) \xrightarrow{\Delta_n} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, A) \to \ldots$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi, M)} \mathrm{Hom}_R(B, M) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota, M)} \mathrm{Hom}_R(A, M) \xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}^1_R(C, M) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\pi, M)} \mathrm{Ext}^1_R(B, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\iota, M)} \mathrm{Ext}^1_R(A, M) \to$$
$$\xrightarrow{\Delta^1} \mathrm{Ext}^2_R(C, M) \to \ldots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(A, M) \to$$
$$\xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n_R(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(\pi, M)} \mathrm{Ext}^n_R(B, M) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(\iota, M)} \mathrm{Ext}^n_R(A, M) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(C, M) \to \ldots$$

Модуль M проективен [инъективен] тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^1_R(M, X) = 0$ $[\mathrm{Ext}^1_R(X, M) = 0]$ для любого модуля X. Правая [левая] глобальная размерность кольца R равна n тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(A, B) = 0$ для любых правых [левых] R-модулей A и B, но $\mathrm{Ext}^n_R(C, D) \neq 0$ для некоторых C и D. Для любых абелевых групп A и B имеет место $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}}(A, B) = 0$, т. е. глобальная размерность кольца $\mathbf{Z}$ равна 1. Если $\mathrm{gl.\,dim}\, R$ — глобальная размерность кольца R, то для кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных над R имеет место *теорема Гильберта о сизигиях*:

$$\mathrm{gl.\,dim}\, R[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{gl.\,dim}\, R + n.$$

В частности, $\mathrm{gl.\,dim}\, \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n] = n + 1$, а $\mathrm{gl.\,dim}\, \Phi[x_1, \ldots, x_n] = n$ и $\mathrm{gl.\,dim}\, \Phi[x_1, x_2, \ldots] = \infty$, если Φ — поле.

Если $(*)$ — проективная резольвента правого [левого] R-модуля M, а A — произвольный левый [правый] R-модуль, то возникают точные последовательности абелевых групп

$$\ldots \to A \otimes_R P_2 \xrightarrow{A \otimes_R \pi_2} A \otimes_R P_1 \to$$
$$\xrightarrow{A \otimes_R \pi_1} A \otimes_R P_0 \xrightarrow{A \otimes_R \pi_0} A \otimes_R M \to 0$$

$$\Big[\ldots \to P_2 \otimes_R A \xrightarrow{\pi_2 \otimes_R A} P_1 \otimes_R A \to$$
$$\xrightarrow{\pi_1 \otimes_R A} P_0 \otimes_R A \xrightarrow{\pi_0 \otimes_R A} M \otimes_R A \to 0\Big].$$

При этом

$$\operatorname{Im}(A \otimes_R \pi_{n+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(A \otimes_R \pi_n)$$
$$[\operatorname{Im}(\pi_{n+1} \otimes_R A) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi_n \otimes_R A)]$$

и факторгруппы

$$T_n(A, B) = \operatorname{Ker}(A \otimes_R \pi_n)/\operatorname{Im}(A \otimes_R \pi_{n+1})$$
$$[T'_n(A, B) = \operatorname{Ker}(\pi_n \otimes_R A)/\operatorname{Im}(\pi_{n+1} \otimes_R A)]$$

не зависят от выбора проективной резольвенты. Для любых левого R-модуля A и правого R-модуля B имеет место изоморфизм

$$T_n(A, B) \simeq T'_n(A, B),$$

что позволяет определить абелеву группу

$$\operatorname{Tor}_n^R(A, B) = T_n(A, B).$$

Если $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ — точная последовательность правых [левых] R-модулей, то для любого левого [правого] модуля M существуют такие гомоморфизмы абелевых групп

$$\operatorname{Tor}_n^R(M, \iota)\colon \operatorname{Tor}_n^R(M, A) \to \operatorname{Tor}_n^R(M, B),$$
$$\operatorname{Tor}_n^R(M, \pi)\colon \operatorname{Tor}_n^R(M, B) \to \operatorname{Tor}_n^R(M, C),$$
$$\nabla_0\colon \operatorname{Tor}_1^R(M, C) \to M \otimes_R A,$$

и

$$\nabla_n\colon \operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, C) \to \operatorname{Tor}_n^R(M, A)$$
$$[\operatorname{Tor}_n^R(\iota, M)\colon \operatorname{Tor}_n^R(A, M) \to \operatorname{Tor}_n^R(B, M),$$

и

$$\operatorname{Tor}_n^R(\pi, M)\colon \operatorname{Tor}_n^R(B, M) \to \operatorname{Tor}_n^R(C, M),$$
$$\nabla'_0\colon \operatorname{Tor}_1^R(C, M) \to A \otimes_R M,$$

и

$$\nabla'_n\colon \operatorname{Tor}_{n+1}^R(C, M) \to \operatorname{Tor}_n^R(A, M)],$$

что последовательность

$$\ldots \to \operatorname{Tor}^R_{n+1}(M, C) \xrightarrow{\nabla_n} \operatorname{Tor}^R_n(M, A) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(M,\iota)} \operatorname{Tor}^R_n(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(M,\iota)} \operatorname{Tor}^R_n(M, B) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(M,\pi)} \operatorname{Tor}^R_n(M, C) \xrightarrow{\nabla_{n-1}} \operatorname{Tor}^R_{n-1}(M, A) \to \ldots$$
$$\ldots \to \operatorname{Tor}^R_2(M, C) \xrightarrow{\nabla_1} \operatorname{Tor}^R_1(M, A) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_1(M,\iota)} \operatorname{Tor}^R_1(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_1(M,\pi)} \operatorname{Tor}^R_1(M, C) \to$$
$$\xrightarrow{\nabla_0} M \otimes_R A \xrightarrow{M \otimes_R \iota} M \otimes_R B \xrightarrow{M \otimes_R \pi} M \otimes_R C \to 0$$

$$\Big[\ldots \to \operatorname{Tor}^R_{n+1}(C, M) \xrightarrow{\nabla'_n} \operatorname{Tor}^R_n(A, M) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(\iota, M)} \operatorname{Tor}^R_n(B, M) \xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(\pi, M)} \operatorname{Tor}^R_n(C, M) \to$$
$$\xrightarrow{\nabla'_{n-1}} \operatorname{Tor}^R_{n-1}(A, M) \to \ldots \to \operatorname{Tor}^R_2(C, M) \to$$
$$\xrightarrow{\nabla'_1} \operatorname{Tor}^R_1(A, M) \xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_1(\iota, M)} \operatorname{Tor}^R_1(B, M) \to$$
$$\xrightarrow{\operatorname{Tor}_1(\pi, M)} \operatorname{Tor}^R_1(C, M) \xrightarrow{\nabla'_0} A \otimes_R M \to$$
$$\xrightarrow{\iota \otimes_R M} B \otimes_R M \xrightarrow{\pi \otimes_R M} C \otimes_R M \to 0\Big]$$

оказывается точной. Правый [левый] R-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tor}^R_1(X, M) = 0$ $[\operatorname{Tor}^R_1(M, X) = 0]$ для любого левого [правого] R-модуля X. Если $\operatorname{Tor}^R_{n+1}(A, B) = 0$ для любых левого R-модуля A и правого R-модуля B, но $\operatorname{Tor}^R_n(C, D) \neq 0$ для некоторых C и D, то говорят, что *слабая глобальная размерность* кольца R равна n. Слабая глобальная размерность кольца может быть определена и с помощью рассмотрения плоских резольвент, определяемых аналогично проективным. Слабая глобальная размерность кольца не превосходит его правую [левую] глобальную размерность.

Слабая глобальная размерность кольца R равна нулю тогда и только тогда, когда R — регулярное кольцо.

Группа $\mathrm{Ext}^1_R(A, B)$ допускает и другую интерпретацию. Именно, пусть $\mathfrak{A}(A, B)$ — множество всех точных последовательностей π: $0 \to B \to G \to A \to 0$. Если $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{A}(A, B)$, то положим $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2$, если диаграмма

$$\begin{array}{rccccccccc}
\mathfrak{a}_1\colon & 0 & \to & B & \xrightarrow{\iota_1} & G_1 & \xrightarrow{\pi_1} & A & \to & 0 \\
 & & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & \\
\mathfrak{a}_2\colon & 0 & \to & B & \xrightarrow{\iota_2} & G_2 & \xrightarrow{\pi_2} & A & \to & 0
\end{array}$$

коммутативна для некоторого изоморфизма φ. Отношение $\sim$ оказывается эквивалентностью, и фактормножество $\mathfrak{A}(A, B)/\sim$ превращается в абелеву группу, если в качестве $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ принять класс, содержащий нижнюю строку коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{1_K} & K & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & {\scriptstyle \sigma'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma''} & & \downarrow & & \\
0 & \to & B \oplus B & \xrightarrow{\rho} & H & \longrightarrow & A & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle \tau'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau''} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\
0 & \to & B & \to & H/K & \longrightarrow & A & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

где

$$H = \{(g_1, g_2) \mid (g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2,\ \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\},$$

$$K = \{(b, -b) \mid b \in B\},$$

$$\sigma'(b, -b) = (b, -b), \qquad \sigma''(b, -b) = (\iota_1(b), -\iota_2(b)),$$

$\tau'(b', b'') = b' + b''$, τ'' — естественный гомоморфизм,

$$\rho(b', b'') = (\iota_1(b'), \iota_2(b'')), \qquad \tau(g_1, g_2) = \pi_1(g_1).$$

Возникающая таким образом абелева группа изоморфна группе $\mathrm{Ext}^1_R(A, B)$ (см. [62], гл. III; [86]). О кольце $\mathrm{Ext}^*_R(M, M)$ см. [253].

Каждый модуль можно рассматривать как функтор из однообъектной предаддитивной категории в категорию абелевых групп. Поэтому естественным обобщением модуля служит функтор из предаддитивной малой категории (ее называют также *кольцом с несколькими объектами*) в категорию абелевых групп. Соответствующая теория развита в [214] и [215].

4.4. Радикалы, кручения, чистота. Будем говорить, что на классе Mod-R всех правых R-модулей задан *предрадикал* $\mathfrak{r}$, если в каждом модуле A из Mod-R выделен подмодуль $\mathfrak{r}(A)$, причем $\varphi(\mathfrak{r}(A))\subseteq\mathfrak{r}(B)$ для любого гомоморфизма $\varphi\colon A\to B$. Предрадикал $\mathfrak{r}$ называется *идемпотентным*, если $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(A))=\mathfrak{r}(A)$ для любого $A\in$ Mod-R. С каждым предрадикалом $\mathfrak{r}$ связаны два класса модулей

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{r})=\{F\mid\mathfrak{r}(F)=0\}$$

и

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{r})=\{T\mid\mathfrak{r}(T)=T\},$$

которые называются $\mathfrak{r}$-*полупростыми* ($\mathfrak{r}$-torsion-free) и $\mathfrak{r}$-*радикальными* соответственно. Любой предрадикал $\mathfrak{r}$ обладает следующими свойствами: 1) класс $\mathfrak{f}(\mathfrak{r})$ замкнут относительно подмодулей и прямых произведений; 2) класс $\mathfrak{T}(\mathfrak{r})$ замкнут относительно фактормодулей и прямых сумм; 3) $\mathfrak{f}(\mathfrak{r})\cap\mathfrak{T}(\mathfrak{r})=\{0\}$; 4) если $A\in\mathfrak{T}(\mathfrak{r})$ и $B\in\mathfrak{f}(\mathfrak{r})$, то $\mathrm{Hom}_R(A,B)=0$; 5) сумма любого множества $\mathfrak{r}$-радикальных подмодулей любого модуля $\mathfrak{r}$-радикальна; 6) если $\{A_\iota\mid\iota\in\mathfrak{J}\}$ — множество подмодулей произвольного модуля A и все фактормодули A/A_ι $\mathfrak{r}$-полупросты, то $\mathfrak{r}$-полупрост и фактормодуль $A/\left(\bigcap_{\iota\in\mathfrak{J}}A_\iota\right)$; 7) $\mathfrak{r}(A)$ — вполне характеристический подмодуль модуля A; 8) $\mathfrak{r}(R)$ — двусторонний идеал кольца R; 9) $A\mathfrak{r}(R)\subseteq\mathfrak{r}(A)$ для любого правого R-модуля A; 10) если P — проективный правый R-модуль, то $\mathfrak{r}(P)=P\mathfrak{r}(R)$ (см. [46], с. 7—8).

Идемпотентный предрадикал $\mathfrak{r}$ называется *радикалом* или *идемпотентным радикалом*, если $\mathfrak{r}(A/\mathfrak{r}(A))=0$ для любого $A\in$ Mod-R. Подмодуль $\mathfrak{r}(A)$ называется $\mathfrak{r}$-*радикалом* модуля A. Если $\mathfrak{r}(A)=0$ [$\mathfrak{r}(A)=A$] для всех $A\in$ Mod-R, то радикал $\mathfrak{r}$ называется *нулевым* [*единичным*]. Каждый из этих радикалов называется *тривиальным*. Примером нетривиального радикала на Mod-$\mathbf{Z}$ служит $\mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s}(A)$ — пе-

риодическая часть абелевой группы A. В качестве другого примера можно указать радикал $\mathfrak{d}$, где $\mathfrak{d}(A)$ — наибольшая делимая подгруппа абелевой группы A. Фактормодуль $\mathfrak{r}$-радикального модуля всегда $\mathfrak{r}$-радикален, а любой подмодуль $\mathfrak{r}$-полупростого модуля $\mathfrak{r}$-полупрост. Для любого радикала $\mathfrak{r}$ и любого правого R-модуля A эквивалентны следующие свойства подмодуля $T \subseteq A$: (1) $T = \mathfrak{r}(A)$; (2) $T \subseteq \mathfrak{r}(A)$ и $\mathfrak{r}(A/T) = 0$; (3) T — наибольший среди $\mathfrak{r}$-радикальных подмодулей модуля A; (4) T — максимальный среди $\mathfrak{r}$-радикальных подмодулей модуля A; (5) $T = \bigcap\{B \mid B \subseteq A,\ \mathfrak{r}(A/B) = 0\}$. Класс $\mathfrak{T}$ правых R-модулей совпадает с классом всех $\mathfrak{r}$-радикальных модулей для некоторого радикала $\mathfrak{r}$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{r}$ замкнут относительно гомоморфных образов и обладает хотя бы одним (а значит, и всеми) из следующих эквивалентных друг другу свойств: (1) $\mathfrak{T}$ замкнут относительно прямых сумм $\left(\text{т. е. } A_\iota \in \mathfrak{T} \text{ для всех } \iota \in \mathfrak{J} \text{ влечет } \sum_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} A_\iota \in \mathfrak{T}\right)$ и расширений (т. е. для любой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ из $A, C \in \mathfrak{T}$ вытекает, что $B \in \mathfrak{T}$); (2) если всякий ненулевой гомоморфный образ модуля A содержит ненулевой подмодуль из $\mathfrak{T}$, то $A \in \mathfrak{T}$; (3) если модуль A обладает возрастающим рядом подмодулей

$$0 = A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\Omega = A,$$

где $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in \mathfrak{T}$ при любом α и $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ для предельных α, то $A \in \mathfrak{T}$. Для того чтобы класс $\mathfrak{F}$ правых R-модулей совпадал с классом всех $\mathfrak{r}$-полупростых модулей для некоторого радикала $\mathfrak{r}$, необходимо и достаточно, чтобы класс $\mathfrak{F}$ был замкнут относительно подмодулей и удовлетворял хотя бы одному (а значит, и всем) из следующих эквивалентных друг другу свойств: (1) $\mathfrak{F}$ замкнут относительно прямых произведений и расширений; (2) если любой ненулевой подмодуль модуля A имеет ненулевой гомоморфный образ, принадлежащий $\mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F}$; (3) если модуль A обладает убывающим рядом подмодулей

$$A = A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_\alpha \supseteq A_{\alpha+1} \supseteq \ldots \supseteq A_\Omega = 0,$$

где $A_\alpha/A_{\alpha+1} \in \mathfrak{F}$ для всех α и $A_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ для предельных α, то $A \in \mathfrak{F}$. Для данной пары $(\mathfrak{F}, \mathfrak{T})$ классов правых R-модулей радикал $\mathfrak{r}$ такой, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T}$ совпадают с классами всех $\mathfrak{r}$-полупростых и $\mathfrak{r}$-радикальных модулей соответственно, существует в том и только том случае, когда $F \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hom}_R(X, F) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{T}$, и $T \in \mathfrak{T}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hom}_R(T, Y) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{F}$. В свою очередь это равносильно выполнению следующих условий: 1) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{T} = \{0\}$; 2) $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подмодулей; 3) $\mathfrak{T}$ замкнут относительно гомоморфных образов; 4) для всякого правого R-модуля A существует точная последовательность $0 \to T \to A \to F \to 0$, где $T \in \mathfrak{T}$ и $F \in \mathfrak{F}$. Если заданы классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T}$, обладающие этими свойствами, то говорят, что задана *теория кручения* (см. [73], [74], [46], [157], [158], [257]).

Если A — правый R-модуль, то обозначим через $\operatorname{rad} A$ пересечение всех максимальных подмодулей модуля A, а если таких подмодулей нет, то полагаем $\operatorname{rad} A = A$. Тогда rad оказывается радикалом. При этом $\operatorname{rad} A$ называется *радикалом Джекобсона* модуля A, а часто просто *радикалом* модуля A. Отметим некоторые свойства этого радикала: 1) если A — вполне приводимый модуль, то $\operatorname{rad} A = 0$; 2) (*лемма Накаямы*) если модуль A конечно порожден, J — радикал Джекобсона кольца R и $AJ = A$, то $A = 0$; 3) следующие свойства ненулевого модуля A равносильны: (а) $\operatorname{rad} A = 0$; (б) для всякого ненулевого элемента $a \in A$ существуют простой модуль M и гомоморфизм φ: $A \to M$, для которых $\varphi(a) \neq 0$; (в) модуль A вкладывается в прямое произведение $\prod\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} (A/M_\iota)$, где $\{M_\iota \mid \iota \in \mathfrak{I}\}$ — множество всех максимальных подмодулей модуля A; (г) модуль M можно вложить в произведение простых модулей; 4) если P — проективный правый R-модуль, то $\operatorname{rad} P = PJ$, где J — радикал Джекобсона кольца R, и $P \neq \operatorname{rad} P$, если $P \neq 0$; 5) если P — проективный правый R-модуль, A — его подмодуль, $A \subseteq \operatorname{rad} P$ и P/A — плоский правый R-модуль, то $A = 0$.

Модуль A разлагается в прямую сумму конечного числа неприводимых подмодулей в том и только том

случае, когда A артинов и $\operatorname{rad} A = 0$. Модуль A оказывается конечно порожденным тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} A$ — косущественный подмодуль модуля A, а фактормодуль $A/\operatorname{rad} A$ кон чно порожден ([45], гл. 9, § 10.5).

Радикал $\mathfrak{r}$ называется *кручением* или *наследственным радикалом*, если любой подмодуль $\mathfrak{r}$-радикального модуля $\mathfrak{r}$-радикален. Равносильны следующие свойства радикала $\mathfrak{r}$: (1) $\mathfrak{r}$ — кручение; (2) инъективная оболочка любого $\mathfrak{r}$-полупростого модуля $\mathfrak{r}$-полупроста; (3) если A — подмодуль модуля B, то $\mathfrak{r}(A) = A \cap \mathfrak{r}(B)$; (4) если $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность правых R-модулей, то последовательность $0 \to \mathfrak{r}(A) \to \mathfrak{r}(B) \to \mathfrak{r}(C)$ также точна. Если $\mathfrak{r}$ — кручение, то $\mathfrak{r}$-радикальный модуль часто называют $\mathfrak{r}$-*периодическим*. Кручение $\mathfrak{r}$ называется *стабильным*, если инъективная оболочка любого $\mathfrak{r}$-периодического модуля $\mathfrak{r}$-периодична. Если класс $\mathfrak{r}$-полупростых модулей замкнут относительно перехода к фактормодулям, то кручение $\mathfrak{r}$ называется *конаследственным*. Конаследственность кручения $\mathfrak{r}$ равносильна существованию такого кручения $\mathfrak{s}$, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ (см. [158], гл. 5).

Оба тривиальных радикала являются кручениями. В классе Mod-$\mathbf{Z}$ радикал $\mathfrak{s}$ оказывается кручением, а $\mathfrak{d}$ нет. Класс всех полуартиновых модулей является $\mathfrak{r}$-периодическим классом кручения, которое называется *кручением Диксона*. Почти очевидна эквивалентность следующих свойств кольца R: (1) радикал rad на Mod-R оказывается кручением; (2) $\operatorname{rad} A = 0$ для любого $A \in$ Mod-R; (3) R — классически полупростое кольцо.

Для всякого кручения $\mathfrak{r}$ совокупность

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{r}} = \{H \mid H \text{ — правый идеал в } R \text{ и } \mathfrak{r}(R/H) = R/H\}$$

оказывается *радикальным фильтром*, т. е. удовлетворяет следующим условиям: 1) если $H \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$, K — правый идеал кольца R и $H \subseteq K$, то $K \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$; 2) если $H \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$ и $r \in R$, то

$$(H : r) = \{s \mid s \in R,\ rs \in H\} \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}:$$

3) если K — правый идеал в R, $H \subseteq K \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$ и $(H : r) \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$ для любого $r \in K$, то $H \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$. При этом

$$\mathfrak{r}(A) = \{a \mid a \in A,\ \operatorname{Ann} a \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}\}$$

для любого $A \in \text{Mod-}R$. Радикальный фильтр называется также *идемпотентным топологизирующим фильтром* и *топологией Габриэля*. Наоборот, если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр и

$$\mathfrak{r}_{\mathscr{E}}(A) = \{a \mid a \in A,\ \operatorname{Ann} a \in \mathscr{E}\}$$

для всех $A \in \text{Mod-}R$, то $\mathfrak{r}_{\mathscr{E}}$ оказывается кручением на $\text{Mod-}R$ и $H \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}_{\mathscr{E}}(R/H) = R/H$. Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр и H, $K \in \mathscr{E}$, то $H \cap K \in \mathscr{E}$. Тривиальным кручениям соответствуют фильтры, состоящие из всех правых идеалов и из одного нулевого идеала соответственно.

Кручение называется *идеальным*, если его радикальный фильтр совпадает с множеством всех правых идеалов, содержащих фиксированный двусторонний идеал. Если среди правых идеалов, принадлежащих радикальному фильтру $\mathscr{E}$, имеется наименьший правый идеал I, то I оказывается двусторонним идеалом, $I^2 = I$ и $\mathfrak{r}(A) = A$ в том и только том случае, когда $AI = 0$. Разумеется, кручение $\mathfrak{r}_{\mathscr{E}}$ оказывается идеальным.

Класс $\mathfrak{R}$ правых R-модулей называется *радикально полупростым*, если для некоторых радикалов $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ на $\text{Mod-}R$ $\mathfrak{R}$ совпадает как с классом $\mathfrak{r}$-радикальных, так и с классом $\mathfrak{r}'$-полупростых правых R-модулей. Если $\mathfrak{r}$ — кручение, то класс $\mathfrak{r}$-периодических правых R-модулей оказывается радикально полупростым в том и только том случае, когда $\bigcap\limits_{I \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}} I \in \mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$. Такое кручение иногда называют *кручением Джанса*. Если $\mathfrak{R}$ — радикально полупростой класс, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T}'$ — классы всех $\mathfrak{r}$-полупростых и $\mathfrak{r}'$-радикальных модулей соответственно, то оказываются эквивалентными следующие условия: (1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{T}'$; (2) $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}'(A)) = 0$ и $\mathfrak{r}'(A/\mathfrak{r}(A)) = A/\mathfrak{r}(A)$ для всех $A \in \text{Mod-}R$; (3) $A = \mathfrak{r}(A) \oplus \mathfrak{r}'(A)$ для любого $A \in \text{Mod-}R$; (4) $R = \mathfrak{r}(R_R) \oplus \mathfrak{r}'(R_R)$; (5) $\mathfrak{r}(R_R) = eR$, где e — центральный идемпотент (см. [73], с. 93, п. 2.20; [46], с. 26—27, теорема 4.6).

Если $\mathfrak{r}$ — кручение на $\operatorname{Mod} R$, то существуют такие правые R-модули U и V, что

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{r}) = \{X \mid \operatorname{Hom}_R(X, U) = 0\}$$

и

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{r}) = \{Y \mid \operatorname{Hom}_R(V, Y) = 0\},$$

причем модуль U может быть выбран инъективным ([73], с. 89, п. 2.16).

На классе всех радикалов категории правых R-модулей может быть введен порядок $\leqslant$: $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{s}$, если $\mathfrak{r}(M) \subseteq \mathfrak{s}(M)$ для любого правого R-модуля M. Тривиальные радикалы являются наибольшим и наименьшим элементами этого частично упорядоченного класса. Более того, в нем для любого подмножества существует точная нижняя, а значит, и точная верхняя грань. Именно,

$\mathfrak{r} = \inf\{\mathfrak{r}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$, если $\mathfrak{r}(M) = \bigcap_{\iota \in \mathfrak{J}} \mathfrak{r}_\iota(M)$ для любого правого R-модуля M, и

$$\sup\{\mathfrak{r}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\} = \inf\{\mathfrak{s} \mid \mathfrak{r}_\iota \leqslant \mathfrak{s} \text{ для всех } \iota \in \mathfrak{J}\}.$$

Если $\{\mathfrak{r}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — множество кручений, то $\inf\{\mathfrak{r}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ оказывается кручением и, следовательно, является точной нижней гранью в частично упорядоченном множестве кручений (обратим внимание на то, что совокупность всех кручений является множеством). Следовательно, совокупность кручений в категории правых R-модулей оказывается полной решеткой — *решеткой кручений.* При этом, если $\mathfrak{r} = \sup\{\mathfrak{r}_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ в этой решетке, то $\mathfrak{r}(M) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}_\iota(M) = 0$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$ (см. [158], ч. 2). Если $\mathfrak{X}$ — некоторое множество правых R-модулей, то про кручение $\sup\{\mathfrak{r}\langle X\rangle \mid X \in \mathfrak{X}\}$, где $\mathfrak{r}\langle X\rangle$ — наименьшее из таких кручений $\mathfrak{s}$, что $\mathfrak{s}(X) = X$, говорят, что оно *порождено множеством* $\mathfrak{X}$. Кручение, порожденное множеством всех простых правых R-модулей [одним простым правым R-модулем], называется *полупростым* [*простым*].

Если W — произвольный правый R модуль, то для любого $A \in \text{Mod-}R$ положим

$$\mathfrak{r}^W(A) = \sum_{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(W, A)} \operatorname{Im} \varphi$$

и

$$\mathfrak{r}_W(A) = \bigcap_{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(A, W)} \operatorname{Ker} \varphi.$$

Тогда $\mathfrak{r}^W$ оказывается идемпотентным предрадикалом, причем $T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{r}^W)$ тогда и только тогда, когда T яв-

ляется гомоморфным образом прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля W, а

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{r}^W) = \{X \mid \mathrm{Hom}_R(W, X) = 0\}.$$

При этом $\mathfrak{r}^W$ оказывается наименьшим среди предрадикалов $\mathfrak{r}$, для которых $W \in \mathfrak{T}(\mathfrak{r})$ (мы говорим, что $\mathfrak{r}' \leqslant \mathfrak{r}''$, если $\mathfrak{r}'(A) \subseteq \mathfrak{r}''(A)$ для всех $A \in \text{Mod-}R$). В свою очередь, $\mathfrak{r}_W$ оказывается предрадикалом, причем $\mathfrak{r}_W(A/\mathfrak{r}_W(A)) = 0$ для всех $A \in \text{Mod-}R$. Кроме того, $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{r}_W)$ в том и только том случае, когда F вкладывается в прямое произведение некоторого множества экземпляров модуля W, а

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{r}_W) = \{X \mid \mathrm{Hom}_R(X, W) = 0\}.$$

Более того, $\mathfrak{r}_W$ оказывается наибольшим среди таких предрадикалов $\mathfrak{r}$, то $W \in \mathfrak{F}(\mathfrak{r})$. Предрадикал $\mathfrak{r}_W$ оказывается кручением тогда и только тогда, когда инъективная оболочка модуля W вкладывается в прямое произведение некоторого множества экземпляров модуля W. Кручение $\mathfrak{r}_{\widehat{R}}$, где $\widehat{R}$ — инъективная оболочка правого R-модуля R, называется *кручением Ламбека*. Радикальный фильтр кручения Ламбека состоит из всех *плотных* правых идеалов кольца R, т. е. таких правых идеалов I, что для любых $0 \neq a \in R$ и $b \in R$ при подходящем $r \in R$ имеем $ar \neq 0$ и $br \in I$ (см. [46], § 5; с. 41—42; см. также [57]).

Для любого правого R-модуля A положим

$$\operatorname{sing} A = \{x \mid x \in A,\ \operatorname{Ann} x \text{ — существенный правый идеал}\}.$$

Оказывается, что $\operatorname{sing} A$ — подмодуль модуля A, который называется *сингулярным*. Если $\operatorname{sing} A = 0$, то модуль A называется *антисингулярным* (non-singular). Кроме того, sing оказывается идемпотентным предрадикалом, а если правый R-модуль R антисингулярен,— то и радикалом. Если для каждого $A \in \text{Mod-}R$ определить $\mathfrak{r}(A)$ как полный прообраз подмодуля $\operatorname{sing}(A/\operatorname{sing} A)$ модуля $A/\operatorname{sing} A$ при естественном гомоморфизме A на $A/\operatorname{sing} A$ (т. е. $\mathfrak{r}(A)/\operatorname{sing} A = \operatorname{sing}(A/\operatorname{sing} A)$), то $\mathfrak{r}$ оказывается кручением, которое называется *кручением Голди*. Это кручение оказывается наименьшим среди кручений, радикальный фильтр которых содержит все существенные правые

идеалы кольца R (см. [90], теорема 19.46А; [46], с. 58).

Кручениям и радикалам посвящены монографии [46], [73], [74], [113], [157], [158], [179], [200], [257], [262].

Скажем, что на классе всех правых R-модулей задана *чистота* ω, если выделен класс мономорфизмов $\mathfrak{H}_\omega$ со свойствами: 1) естественное вложение в любой модуль его прямого слагаемого принадлежит $\mathfrak{H}_\omega$; 2) если $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$; 3) если $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$ и ψ — мономорфизм, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$; 4) если строки и столбцы коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1_K"'] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varkappa"] & B \arrow[r, "\tau"] & D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

точны и $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$; 5) если в указанной выше диаграмме $\varkappa, \varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$. Мономорфизмы из $\mathfrak{H}_\omega$ называются *ω-чистыми*. Из 1) — 5) вытекает следующее усиление свойства 3): если $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$.

Условимся писать $A \subseteq_\omega B$, если A — подмодуль модуля B и естественное вложение A в B принадлежит $\mathfrak{H}_\omega$. Используя это обозначение, условия 1) — 5) можно выразить так: 1) если подмодуль A модуля B выделяется прямым слагаемым, то $A \subseteq_\omega B$; 2) если $A \subseteq_\omega B$ и $B \subseteq_\omega C$, то $A \subseteq_\omega C$; 3) если $A \subseteq B \subseteq C$ и $A \subseteq_\omega C$, то $A \subseteq_\omega B$; 4) если $A \subseteq_\omega B$ и $K \subseteq B$, то $A/K \subseteq_\omega B/K$; 5) если $K \subseteq A \subseteq B$, $K \subseteq_\omega B$ и $A/K \subseteq_\omega B/K$, то $A \subseteq_\omega B$.

Если ω — чистота, то обозначим через $\mathfrak{H}^*_\omega$ совокупность всех таких эпиморфизмов π: $A \to B$, что $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq_\omega A$. Эти эпиморфизмы назовем *ω-кочистыми*. Условие 4) равносильно условию 4*): если $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$ и σ — эпиморфизм, то $\tau \in \mathfrak{H}^*$, а условие 5) — условию 5*): если $\sigma, \tau \in \mathfrak{H}^*$, то $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$. Кроме того, если $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$.

Если ω — чистота, то для любой точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$, где $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, можно

построить точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X, \varphi)} \mathrm{Hom}_R(X, B) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X, \pi)} \mathrm{Hom}_R(X, C) \xrightarrow{\Delta_0} \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(X, A) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X, \varphi)} \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X, \pi)} \omega\,\mathrm{Ext}_R(X, C)$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi, X)} \mathrm{Hom}_R(B, X) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\varphi, X)} \mathrm{Hom}_R(A, X) \xrightarrow{\Delta^0} \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(C, X) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\pi, X)} \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\varphi, X)} \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(A, X),$$

где X — произвольный правый R-модуль, а $\omega\,\mathrm{Ext}^1_R(U, V)$ — некоторая подгруппа абелевой группы $\mathrm{Ext}^1_R(U, V)$. Наоборот, если в каждой из абелевых групп $\mathrm{Ext}^1_R(U, V)$ выделена подгруппа $\Phi(U, V)$, причем $\mathrm{Ext}(\varphi, \psi)(\Phi(U, V)) \subseteq \Phi(U', V')$ для любых $\varphi\colon U' \to U$ и $\psi\colon V \to V'$ и для любых $X \in \text{Mod-}R$ и точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$, определяющей элемент из $\Phi(A, C)$ (см. п. 3.3), последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X, \iota)} \mathrm{Hom}_R(X, B) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(X, \pi)} \mathrm{Hom}_R(X, C) \xrightarrow{\Delta_0} \Phi(X, A) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X, \iota)} \Phi(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X, \pi)} \Phi(X, C)$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi, X)} \mathrm{Hom}_R(B, X) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota, X)} \mathrm{Hom}_R(A, X) \xrightarrow{\Delta^0} \Phi(C, X) \to$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\pi, X)} \Phi(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(\iota, X)} \Phi(A, X)$$

точны, то существует такая чистота ω, что $\Phi(U, V) = \omega\,\mathrm{Ext}^1_R(U, V)$ для любых $U, V \in \text{Mod-}R$ (см. [73], п. (1.1) — (1.4)).

Имея чистоту ω, можно строить *относительную гомологическую алгебру*, т. е. рассматривать понятия, в определении которых мономорфизмы и эпиморфизмы заменяются на ω-чистые мономорфизмы и ω-кочистые эпиморфизмы соответственно. Например, модуль называется ω-*инъективным* [ω-*проективным*], если он инъективен относительно всех ω-чистых мономорфизмов [проективен относительно всех ω-кочистых эпиморфизмов] (см. [73], [74], [82], [157], [158], [257]). Вопросам относительной конечности посвящена монография [101].

Кольцо R называется *чисто полупростым справа*, если каждый правый R-модуль разлагается в прямую сумму нётеровых подмодулей. Кольцо R чисто полупросто справа и слева в том и только том случае, когда R — артиново справа кольцо конечного типа (Simson D.//J. Algebra. — 1977. — V. 48, № 2. — P. 290—294; ibid. — 1980. — V. 67, N 1. — P. 254—256; см. также [277]).

Если U — подмодуль свободного правого R-модуля F и χ: $U \to F$ — естественное вложение, то скажем, что модуль A *FU-чист* в B (в обозначениях $A \subseteq_{FU} B$), если $A \subseteq B$ и для всякой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\chi} & F \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ A & \xrightarrow{\iota} & B \end{array}$$

где ι — естественное вложение, найдется такой гомоморфизм ψ: $F \to A$, что $\varphi = \chi\psi$. Оказывается, что отношение $\subseteq_{FU}$ обладает свойствами 1)—5), т. е. FU-чистота действительно является чистотой. При этом $A \subseteq_{FU} B$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(F/U, \pi)$, где π: $B \to B/A$ — естественный гомоморфизм, является эпиморфизмом. Если $\Gamma = \{(F, U)\}$ — некоторое множество пар, где F — свободный правый R-модуль, а U — его подмодуль, то, положив $A \subseteq_\Gamma B$, если $A \subseteq_{FU} B$ для всех $(F, U) \in \Gamma$, получим чистоту, которую будем называть Γ-чистотой. Если Γ состоит из всех таких пар, где F — конечно порожденные свободные правые R-модули, а U — все их конечно порожденные подмодули, то соответствующая Γ-чистота называется *уни-*

версальной чистотой, а часто просто *чистотой*. Для любой точной последовательности $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ правых R-модулей эквивалентны следующие утверждения: (1) ι — универсально чистый мономорфизм; (2) $\iota \otimes_R M$ — мономорфизм для всякого конечно представимого левого R-модуля M; (3) $\iota \otimes_R \otimes_R M$ — мономорфизм для любого левого R-модуля M; (4) каждый конечно представимый правый R-модуль проективен относительно π; (5) любая система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij} = a_j \quad (j = 1, \ldots, m, \quad a_j \in A, \quad r_{ij} \in R),$$

разрешимая в B, разрешима в A; (6) если $\theta\colon G' \to G''$ — гомоморфизм конечно порожденных свободных левых R-модулей, то

$$\operatorname{Im}(\iota \otimes_R \theta) = \operatorname{Im}(B \otimes_R \theta) \cap \operatorname{Im}(\iota \otimes G'').$$

Любой правый R-модуль является универсально чистым подмодулем модуля, допускающего компактную топологию. Если ω — универсальная чистота, то оказываются эквивалентными следующие свойства правого R-модуля Q: (1) Q ω-инъективен; (2) Q является прямым слагаемым некоторого модуля, допускающего компактную топологию; (3) Q *алгебраически компактен*, т. е. любая система линейных уравнений разрешима в Q, если в Q разрешима всякая ее конечная подсистема ([74], п. 1.45—1.47).

Если $\Gamma = \{(R, U) \mid U \in \mathscr{E}\}$, где $\mathscr{E}$ — некоторое множество правых идеалов в R, то такую Γ-чистоту назовем *$\mathscr{E}$-чистотой* и будем писать $A \subseteq_{\mathscr{E}} B$ вместо $A \subseteq_{\Gamma} B$. Если множество $\mathscr{E}$ вместе с каждым правым идеалом включает в себя и все содержащие его правые идеалы (в частности, если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр), то соотношение $A \subseteq_{\omega} B$ равносильно каждому из следующих свойств: 1) если $b \in B$ и $(A : b) = \{r \mid r \in R,\ br \subseteq A\} \in \mathscr{E}$, то $(0 : a - b) = (A : b)$ для некоторого $a \in A$; 2) A выделяется прямым слагаемым в любом модуле C, где $A \subseteq C \subseteq B$, $C/A = \sum_{\iota \in \mathfrak{J}}^{\oplus} \bar{c}_\iota R$ и $(0 : \bar{c}_\iota) \in \mathscr{E}$ для всех $\iota \in \mathfrak{J}$; 3) A выделяется прямым

слагаемым в любом модуле C таком, что $A \subseteq C \subseteq B$, $C/A = \bar{c}R$ и $(0:\bar{c}) \in \mathscr{E}$; 4) всякий циклический правый R-модуль uR, где $(0:u) \in \mathscr{E}$, проективен относительно естественного гомоморфизма $B \to B/A$ (см. [73], п. 1.48). Активно изучалась относительная гомологическая алгебра, связанная с $\mathscr{E}$-чистотой для случая, когда $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр (см. [46], [157], [158], [257]). Чистота подробно изучается в [73] и [74]. См. также обзор [82].

Гомоморфизм φ: $M \to Q$ называется *локализацией* модуля M относительно радикала $\mathfrak{r}$, если $\mathfrak{r}(Q) = 0$, $\mathfrak{r}(\operatorname{Ker}\varphi) = \operatorname{Ker}\varphi$, $\mathfrak{r}(\operatorname{Coker}\varphi) = \operatorname{Coker}\varphi$ и Q *$\mathfrak{r}$-инъективен* (т. е. инъективен относительно всех таких мономорфизмов σ, что $\mathfrak{r}(\operatorname{Coker}\sigma) = \operatorname{Coker}\sigma$). Каждый правый R-модуль обладает локализацией относительно радикала $\mathfrak{r}$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{r}$ — кручение. При этом $\mathfrak{r}$-инъективность равносильна $\mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$-инъективности ([46], гл. II). О кольцах частных относительно кручений см. п. 2.8.

Говорят, что правый R-модуль A является *рациональным расширением* своего подмодуля U или что A *рационален над* U, если для любых $a, b \in A$, где $b \neq 0$, найдется такой элемент $r \in R$, что $ar \in U$ и $br \neq 0$. Всякое рациональное расширение существенно. Обратное верно, если $\operatorname{sing} U = 0$. Модуль A является рациональным расширением своего подмодуля U тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hom}_R(K/U, A) = 0$ всякий раз, когда $U \subseteq K \subseteq A$. Если $\hat{U}$ — инъективная оболочка модуля U, то модуль $\bar{U} = \{x \mid x \in \hat{U},\ \varphi(x) = 0,$ если $\varphi \in \operatorname{End}_R \hat{U}$ и $\varphi(U) = 0\}$ оказывается рациональным расширением модуля U. Этот модуль $\bar{U}$ оказывается *рационально замкнутым подмодулем* модуля $\hat{U}$, т. е. всякое рациональное расширение модуля $\bar{U}$, лежащее в $\hat{U}$, совпадает с $\bar{U}$. Модуль $\bar{U}$ является $\mathfrak{r}_{\hat{U}}$-инъективной оболочкой модуля U. Если $\operatorname{sing} U = 0$, то $\bar{U} = \hat{U}$ (см. [90], ч. 2, с. 123, теорема 19.32; с. 129, следствие 19.33; [46], с. 80—81).

4.5. Абелевы группы *). Группа называется *абелевой* или *коммутативной*, если ее операция коммутативна. Обычно эта операция называется сложением и

---

*) Автор благодарен А.П. Мишиной за помощь при написании этого пункта.

обозначается знаком $+$. Если G — абелева группа, n — целое число и $a \in G$, то

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{n}, & \text{если} \quad n > 0, \\ 0, & \text{если} \quad n = 0, \\ \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{|n|}, & \text{если} \quad n < 0. \end{cases}$$

Тогда $(m+n)a = ma + na$ и $(mn)a = m(na)$. Эти соотношения показывают, что каждая абелева группа является левым модулем над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$. Поскольку $\mathbf{Z}$ — коммутативное кольцо, то можно говорить просто о $\mathbf{Z}$-модуле.

Порядком элемента a абелевой группы G называется наименьшее из таких положительных целых чисел n, что $na = 0$. Если n — порядок элемента a и $ma = 0$, то n делит m. Если a — элемент порядка p^k, где p — простое число, то k называется *экспонентой* элемента a. Если снова $a \in G$ и p — простое число, то наибольшее неотрицательное целое число r, для которого уравнение $p^r x = a$ имеет решение $x \in G$, называется p-высотой элемента a и обозначается через $h_p(a)$. Если уравнение $p^r x = a$ разрешимо при любом r, то элемент a называется элементом *бесконечной p-высоты* (в обозначениях $h_p(a) = \infty$).

Группа G называется *циклической*, если $G = \{na \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Элемент a называется *порождающим* или *образующим* этой группы G. Всякая конечная циклическая группа изоморфна группе вычетов по некоторому модулю n, т. е. факторгруппе $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$. Класс $m + \mathbf{Z}n$ является образующим группы $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$ тогда и только тогда, когда числа m и n взаимно просты. Любая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbf{Z}$. Ее образующими служат числа 1 и -1. Циклическая подгруппа любой группы, порожденная элементом a, часто обозначается через $\langle a \rangle$. *Квазициклической группой* или *группой типа p^∞*, где p — простое число, называется группа, являющаяся объединением возрастающей последовательности циклических подгрупп

$$\langle c_1 \rangle \subset \langle c_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle c_n \rangle \subset \ldots,$$

где $pc_1 = 0$ и $pc_n = c_{n-1}$, если $n > 1$. Группами типа p^∞ являются факторгруппа $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Q}_p$ — совокупность всех рациональных чисел со знаменателями вида p^n, и группа всех корней степени p^n из единицы (в обоих случаях n — произвольные целые числа). Любые подгруппа и факторгруппа циклической группы оказываются циклическими. Любая подгруппа группы типа p^∞ совпадает с одной из циклических подгрупп $\langle c_n \rangle$.

Совокупность всех элементов конечного порядка любой абелевой группы G образует подгруппу $T(G)$, которая называется *периодической частью* группы G. При этом $T(G/T(G)) = 0$. Если $G = T(G)$, то группа G называется *периодической*, а если $T(G) = 0$, то — *группой без кручения*. Абелева группа G называется *смешанной*, если $0 \neq T(G) \neq G$. Если $G = T(G) \oplus H$, то группа G называется *расщепляющейся*. Разумеется, $T(H) = 0$. Примером нерасщепляющейся абелевой группы служит прямое произведение $\prod_p (\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p)$, где p пробегает все простые числа. Любая смешанная абелева группа с периодической частью T оказывается расщепляющейся в том и только том случае, когда T — прямая сумма *ограниченной группы* (т. е. такой группы G, что $nG = 0$ для подходящего n) и некоторого множества квазициклических групп ([92], § 100). Абелевым группам без кручения посвящены монографии [106] и [111], а их группам автоморфизмов — [11].

Абелева группа D называется *делимой*, если для любого $a \in D$ и любого натурального числа n уравнение $nx = a$ имеет в группе G хотя бы одно решение. Всякая делимая группа разлагается в прямую сумму квазициклических групп и групп, изоморфных группе $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел (однозначно с точностью до изоморфизма). Любую абелеву группу G можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу, причем в любой делимой группе, содержащей G, имеется минимальная делимая подгруппа, в которой лежит G. Эта подгруппа называется *делимой оболочкой* группы G и определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Всякая абелева группа G содержит наибольшую делимую подгруппу $D(G)$, причем $D(G/D(G)) = 0$. Делимая подгруппа выделяется прямым слагаемым в любой содержащей ее абелевой

группе и, следовательно, является инъективным $\mathbf{Z}$-модулем. Если $D(G)=0$, то группа G называется *редуцированной* ([92], § 23, 24).

Свободной абелевой группой называется прямая сумма некоторого множества экземпляров группы $\mathbf{Z}$. Свободная абелева группа имеет базу и все ее базы равномощны. Всякая ненулевая подгруппа свободной абелевой группы F свободна и мощность ее базы не превосходит мощности базы группы F (ср. п. 3.2). Всякая абелева группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы. Всякая конечно порожденная абелева группа без кручения свободна. Абелева группа F свободна в том и только том случае, когда для любой абелевой группы G точная последовательность $0 \to T(G) \to G \to F \to 0$ расщепляется ([92], § 100; ср. п. 3.3).

Если все элементы абелевой группы G имеют порядок, равный степени некоторого фиксированного числа p, то G называется *p-группой* или *примарной группой*. В любой периодической абелевой группе G совокупность всех элементов, порядок которых имеет вид p^n (p — фиксированное простое число), представляет собой подгруппу G_p, называемую *p-компонентой* группы G. При этом $G=\sum^{\oplus} G_p$. Если G — счетная p-группа, все ненулевые элементы которой имеют конечную высоту, то G — прямая сумма циклических групп ([92], § 17.3). Но, например, совокупность всех элементов конечного порядка в прямом произведении $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z}$ оказывается p-группой без ненулевых элементов конечной высоты, которая в прямую сумму циклических групп не раскладывается ([54], с. 156).

Абелева группа называется *элементарной*, если порядки ее ненулевых элементов не делятся на квадрат. Порядок любого ненулевого элемента элементарной p-группы равен p. Такие группы можно рассматривать как линейные пространства над полем вычетов $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ и, следовательно, каждая из них разлагается в прямую сумму циклических групп порядка p (см. [92], теорема 8.5).

Любая конечно порожденная абелева группа изоморфна прямой сумме циклических групп, причем в качестве конечных прямых слагаемых могут быть

выбраны примарные циклические группы. Любая подгруппа прямой суммы циклических групп сама разлагается в прямую сумму циклических групп. В прямую сумму циклических групп разлагается всякая ограниченная группа, а также, как сказано выше, всякая счетная примарная группа, не содержащая ненулевых элементов бесконечной высоты. Более того, примарная группа разлагается в прямую сумму циклических подгрупп тогда и только тогда, когда она является объединением счетной возрастающей последовательности подгрупп, высоты ненулевых элементов каждой из которых ограничены в совокупности (*критерий Куликова* — см. [92], § 17; [54], с. 144).

Существует p-группа мощности $\aleph_1$, не являющаяся прямой суммой циклических групп, всякая счетная подгруппа которой содержится в прямом слагаемом этой группы, равном прямой сумме циклических групп ([92], § 75). Существует пример неизоморфных между собой p-групп без ненулевых элементов бесконечной высоты, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой ([69], с. 14). В прямую сумму циклических групп не разлагается никакая p-группа, содержащая ненулевые элементы бесконечной высоты. В такой группе G эти элементы образуют подгруппу G^1. В свою очередь в G^1 можно аналогичным образом выделить подгруппу $G^2=(G^1)^1$ и т. д., беря на предельных местах пересечение уже построенных подгрупп. В возникающей таким образом цепочке подгрупп

$$G=G^0\supset G^1\supset G^2\supset\ldots\supset G^\alpha\supset G^{\alpha+1}\supset\ldots$$

последовательность факторов $G^\alpha/G^{\alpha+1}$ называется *последовательностью Ульма* группы G. Имеет место *теорема Ульма*: счетные редуцированные p-группы G и H изоморфны, если факторы их последовательностей Ульма изоморфны при любом α (см. [54], с. 164; [92], § 77).

В любой p-группе G подмножество $G[p]=\{g\,|\,g\in G,\ pg=0\}$ является подгруппой, которая называется *цоколем* группы G. Рассмотрим в G цепочку подгрупп

$$G=p^0G\supseteq p^1G\supseteq p^2G\supseteq\ldots\supseteq p^\alpha G\supseteq p^{\alpha+1}G\supseteq\ldots,$$

где $p^{\alpha+1}G = p(p^{\alpha}G)$ и $p^{\alpha}G = \bigcap_{\beta<\alpha} p^{\beta}G$, если α — предельный трансфинит. При любом $\alpha \geqslant 0$ факторгруппа $(p^{\alpha}G)[p]/(p^{\alpha+1}G)[p]$ — прямая сумма циклических групп порядка p. Мощности этих факторгрупп обозначаются через $f_{\alpha}(G)$ и называются *инвариантами Ульма—Капланского группы* G. Две счетные редуцированные p-группы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые инварианты Ульма—Капланского. То же самое верно и для двух групп, являющихся прямыми суммами счетных редуцированных p-групп ([92], § 77, 78).

Назовем p-группу A *тотально проективной*, если она может быть порождена множеством X, элементы которого связаны лишь соотношениями $px = 0$ и $px' = x''$, где $x, x', x'' \in X$ и $x' \neq x''$. Для тотальной проективности p-группы A необходимо и достаточно, чтобы $p^{\alpha}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(A/p^{\alpha}A,\ B) = 0$ для любых группы B и трансфинита α. Имеется и конструктивное описание тотально проективных групп. Всякий класс редуцированных p-групп, содержащий все тотально проективные p-группы и замкнутый относительно взятия прямых сумм и такой, что в нем неизоморфные группы имеют различные инварианты Ульма—Капланского, совпадает с классом тотально проективных p-групп ([92], §§ 81—83).

Если G — абелева группа без кручения, то *характеристикой элемента* $a \in G$ называется последовательность $\chi(a) = (h_{p_1}(a), h_{p_2}(a), \ldots)$ его высот по всем простым числам $p_1, p_2, \ldots$ Две характеристики называются *эквивалентными*, если символ ∞ в них стоит на одних и тех же местах и на почти всех остальных местах стоит также одно и то же. Класс всех характеристик, эквивалентных $\chi(a)$, называется *типом элемента* a. *Рангом* абелевой группы без кручения называется мощность ее максимальной линейно независимой подсистемы (линейные комбинации элементов группы рассматриваются лишь с целыми коэффициентами). Абелевы группы без кручения ранга 1 — это в точности *рациональные группы*, т. е. группы, изоморфные подгруппам аддитивной группы рациональных чисел. Все такие группы неразложимы, а все ненулевые элементы каждой из них имеют один и тот же тип, называемый *типом* этой *группы*. Две группы без кручения ранга 1

изоморфны тогда и только тогда, когда их типы совпадают.

Прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 называются *вполне разложимыми группами*. Любые два разложения вполне разложимой группы в прямую сумму рациональных групп изоморфны. Прямое слагаемое вполне разложимой группы само вполне разложимо. Однако произвольная подгруппа — не обязательно. Всякая абелева группа без кручения конечного ранга, очевидно, — прямая сумма неразложимых групп. При этом для любого натурального числа $k \geqslant 2$ существует группа конечного ранга, обладающая прямыми разложениями как на 2, так и на k неразложимых слагаемых. Для любых натуральных чисел m и n, где $k \leqslant n$, существует такая группа G без кручения ранга n, что для всякого разбиения числа n на k целых положительных слагаемых, $n = r_1 + \ldots + r_k$, найдется прямое разложение $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$, где G_i — неразложимая группа ранга r_i ($i = 1, \ldots, k$). Существуют счетные абелевы группы без кручения, не являющиеся прямыми суммами неразложимых групп (и даже не имеющие ни одного ненулевого неразложимого прямого слагаемого). Прямые слагаемые прямых сумм групп конечного ранга не обязаны снова быть прямыми суммами групп конечного ранга. Среди абелевых групп, не являющихся группами без кручения, лишь примарные циклические группы и группы типа p^∞ не разлагаются в прямую сумму каких-либо подгрупп. Напротив, существуют неразложимые группы без кручения любого ранга, меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа. Для счетных абелевых групп без кручения может быть построена полная система инвариантов ([92], §§ 27, 85, 86, 88, 90, 91, 93; [69], с. 12; [70], с. 10).

Подгруппа A группы G называется *сервантной*, если из $a = nx$, где $a \in A$, $x \in G$ и n — натуральное число, всегда следует существование такого элемента $b \in A$, что $a = nb$. Пример сервантной подгруппы — периодическая часть $T(G)$ группы G. В группах без кручения сервантными являются те и только те подгруппы, факторгруппы по которым — группы без кручения. В любой p-группе G существует сервантная подгруппа B, равная прямой сумме циклических под-

групп, факторгруппа по которой — делимая группа. Такая подгруппа B называется *базисной подгруппой* группы G. Все базисные подгруппы данной p-группы изоморфны между собой. Если $B=\sum^{\oplus} B_i$, где B_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i, а в G нет ненулевых элементов бесконечной высоты, то группа G изоморфна сервантной подгруппе группы $\prod B_i$, содержащей $\sum^{\oplus} B_i$. Если в сервантной подгруппе A группы G порядки элементов ограничены в совокупности, то она всегда выделяется прямым слагаемым. То же самое верно, если G/A — прямая сумма циклических групп. Если все ненулевые элементы вполне разложимой группы G конечного ранга имеют один и тот же тип, то любая сервантная подгруппа группы G выделяется прямым слагаемым и потому вполне разложима. Если и сама группа без кручения, и все ее сервантные подгруппы неразложимы, то мощность этой группы не превосходит мощности континуума ([54], с. 154—157; [92], §§ 27, 28, 86, 88).

Прямые суммы циклических групп и только они проективны относительно всех естественных гомоморфизмов $A \to A/B$, где B — сервантная подгруппа группы A. Всякая абелева группа изоморфна факторгруппе прямой сумме циклических групп по сервантной подгруппе ([92], § 30; [74], п. 1.50).

Абелева группа C инъективна относительно любого естественного вложения A в B, где A — сервантная подгруппа в B, тогда и только тогда, когда C *алгебраически компактна*, т. е. C обладает любым из следующих эквивалентных между собой свойств: (1) C — прямое слагаемое прямого произведения некоторого множества примарных циклических и квазициклических групп; (2) C — прямое слагаемое некоторой группы, допускающей компактную топологию; (3) C — прямая сумма делимой группы и редуцированной группы, полной в *$\mathbf{Z}$-адической топологии* (т. е. база окрестностей нуля состоит из всех подгрупп nC, где n — натуральные числа); (4) C — прямая сумма делимой группы и редуцированной группы $A=\prod A_p$, где каждая группа A_p полна в своей *p-адической топологии* (т. е. база окрестностей нуля состоит из всех подгрупп p^nA_p), а p пробегает все простые числа. Алгебраически компактной оказывается всякая фактор-

группа $\prod_{i=1}^{\infty} G_i / \sum_{i=1}^{\infty}{}^{\oplus} G_i$, где G_i — произвольные абелевы группы. Редуцированные периодические алгебраически компактные группы — это в точности абелевы группы, порядки которых ограничены в совокупности. Любая абелева группа изоморфна сервантной подгруппе некоторой алгебраически компактной группы, причем среди таких групп существуют минимальные. Все такие минимальные алгебраически компактные группы изоморфны между собой. Алгебраически компактная группа выделяется прямым слагаемым во всякой группе, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы ([92], §§ 38—41).

Периодически полной p-группой называется периодическая часть p-адического пополнения прямой суммы циклических p-групп. Эквивалентны следующие свойства редуцированной p-группы G: (1) G периодически полна; (2) G изоморфна периодической части некоторой алгебраически компактной группы; (3) G инъективна относительно всех сервантных вложений p-групп; (4) G выделяется прямым слагаемым из каждой абелевой p-группы, в которой она содержится в качестве сервантной подгруппы. Прямое слагаемое прямой суммы периодически полных p-групп само разлагается в прямую сумму периодически полных p-групп. Любые два прямых разложения прямой суммы периодически полных p-групп обладают изоморфными продолжениями. Для изоморфизма двух прямых сумм периодически полных p-групп необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфи м их цоколей, сохраняющий высоты элементов, взятые во всей группе. Периодически полные p-группы обладают свойством замены ([92], §§ 68, 72, 73).

Если абелева группа C выделяется прямым слагаемым во всякой группе, содержащей ее в качестве подгруппы, факторгруппа по которой — группа без кручения, то C называется *копериодической* группой. Группа C является копериодической тогда и только тогда, когда она — эпиморфный образ алгебраически компактной группы. Периодическая группа, а также группа без кручения оказывается копериодической тогда и только тогда, когда она алгебраически компактная. Любую абелеву группу G можно вложить в копериодическую группу C так, что C/G будет де-

лимой группой без кручения. Всякую редуцированную абелеву группу можно вложить в минимальную копериодическую группу (ее *копериодическую оболочку*). Абелева группа C является копериодической тогда и только тогда, когда она инъективна относительно любого вложения A в B, где A выделяется прямым слагаемым во всякой такой подгруппе H, что $A \subseteq H \subseteq B$ и H/A — периодическая группа. В этом случае точная последовательность $0 \to A \to B \to B/A \to 0$ называется *периодически расщепляемой*. Для периодической расщепляемости точной последовательности $0 \to A \to B \to \to C \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала подгруппе $D(\operatorname{Ext}(C, A))$. Напомним, что при $n > 1$ $\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{Z}}(A, B) = 0$ для любых абелевых групп A и B. Поэтому вместо $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}}$ пишут просто Ext (см. [92], § 58; [70], с. 31).

Если B — прямое слагаемое абелевой группы G, то пересечение

$$\bigcap \{C \mid C \text{ — подгруппа в } G,\ B \oplus C = G\}$$

оказывается вполне характеристической подгруппой, максимальной среди вполне характеристических подгрупп группы G, имеющих нулевое пересечение с B. Если A — вполне характеристическая подгруппа абелевой группы $G = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{I}}^{\oplus} A_\iota$, то $A = \sum\limits_{\iota \in \mathfrak{I}} (A \cap A_\iota)$ (см. [92], § 9).

Для изоморфизма двух p-групп достаточно, чтобы были изоморфны их кольца эндоморфизмов ([92], § 108). Если $p \geqslant 5$, то достаточно, чтобы были изоморфны их группы автоморфизмов ([92], т. 2, с. 311).

Кольцо эндоморфизмов абелевой группы является телом тогда и только тогда, когда эта группа изоморфна $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p$, где p — простое число. Для простоты кольца эндоморфизмов абелевой группы A необходимо и достаточно, чтобы A была изоморфна или $\underbrace{\mathbf{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}}_{m}$, или $\underbrace{\mathbf{Z}p \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}p}_{m}$, для некоторого m, где p — простое число. Кольцо эндоморфизмов в этом случае изоморфно кольцу всех матриц конечного порядка над простым полем. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы A артиново справа или слева в том и только том случае, когда $A = B \oplus D$, где B — конеч-

ная группа, а D — делимая группа без кручения конечного ранга. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы самоинъективно справа тогда и только тогда, когда $G = D \oplus A$, где D — делимая группа, а A — редуцированная вполне характеристическая сервантная подгруппа прямого произведения прямых сумм изоморфных циклических p-групп, причем в случае, когда $D \neq 0$, A — периодическая группа. Кольцо эндоморфизмов периодической абелевой группы A оказывается нётеровым слева или справа тогда и только тогда, когда A — прямая сумма конечного числа коциклических групп (группа C называется *коциклической*, если существует такой элемент $c \in C$, что всякий гомоморфизм φ: $C \to B$, где $\varphi(c) \neq 0$, является мономорфизмом), — см. [92], § 111; Иванов А. В./Абелевы группы и модули. — Томск, 1981. — С. 93—109.

Если A — периодическая абелева группа, то $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, C)$ оказывается редуцированной алгебраически компактной группой для любой абелевой группы G (см. [92], § 46). Если же C — копериодическая группа, то $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G, C)$ — копериодическая группа при любой абелевой группе G (см. [92], т. 1, с. 271).

Точная последовательность α: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \longrightarrow$ $\xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ называется *сервантно точной*, если $\mathrm{Im}\,\iota$ — сервантная подгруппа в B. Если последовательность α сервантно точна, то для любой абелевой группы G сервантно точны последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(G,\,\iota)} \mathrm{Hom}(G, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(G,\,\pi)} \mathrm{Hom}(G, C)$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\pi,\,G)} \mathrm{Hom}(B, G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\iota,\,G)} \mathrm{Hom}(A, G)$$

Первая [вторая] из этих последовательностей, дополненная нулем справа, оказывается точной для любой сервантно точной последовательности α тогда и только тогда, когда G является прямой суммой циклических групп [G — алгебраически компактная группа]. Из сервантной точности последовательности α вытекает также сервантная точность последовательности

$$0 \to A \otimes G \xrightarrow{\iota \otimes G} B \otimes G \xrightarrow{\pi \otimes G} C \otimes G \to 0$$

для любой абелевой группы G (см. [92], §§ 44, 60).

Если A — группа без кручения, то группа $\operatorname{Ext}(G, A)$ алгебраически компактна для любой группы G (см. [92], т. 1, с. 261). Редуцированные алгебраически компактные группы и только они изоморфны группам вида

$$\operatorname{Ext}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \sum{}^{\oplus} T\Big(\prod_{n\geqslant 1} \alpha_{p,\,n}\mathbf{Z}(p^n)\Big) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Hom}\Big(\mathbf{Q}/\mathbf{Z},\ \sum_p{}^{\oplus} \alpha_{p,\,0}\mathbf{Z}(p^\infty)\Big),$$

где p пробегает все простые числа, $\alpha_{p,\,n}$ — кардинальные числа, $\alpha_{p,\,n}\mathbf{Z}(p^n)$ для $n \geqslant 1$ — прямая сумма $\alpha_{p,\,n}$ циклических групп порядка p^n, $\alpha_{p,\,0}\mathbf{Z}(p^\infty)$ — прямая сумма $\alpha_{p,\,0}$ групп типа p^∞ (см. [70], с. 16). Группа $\operatorname{Ext}(A, B)$ оказывается делимой для любой группы A [для любой группы B] тогда и только тогда, когда B — делимая группа [A — группа без кручения]. Редуцированность группы $\operatorname{Ext}(A, B)$ для любой группы A [для любой группы B] равносильна тому, что группа B [группа A] — прямая сумма редуцированной периодической и делимой группы [периодической и свободной групп] (см. [71], с. 27). Группа W, для которой $\operatorname{Ext}(W, Z) = 0$, называется *группой Уайтхеда*. К числу групп Уайтхеда принадлежат все свободные абелевы группы. Существование других таких групп зависит от присоединения дополнительных аксиом к обычным аксиомам теории множеств ([71], с. 32).

Энциклопедией по абелевым группам может служить [92]. Кольцам эндоморфизмов абелевых групп посвящен обзор [156]. О частично упорядоченных абелевых группах см. [162]. Новейшие результаты теории абелевых групп отражены в обзорах [69]—[71].

4.6. Гомологическая классификация колец. Здесь имеются в виду результаты, устанавливающие связь между свойствами кольца R и свойствами R-модулей. В первую очередь отметим, что кольцо R оказывается телом, если все правые [левые] R-модули или все конечно порожденные правые R-модули свободны. Эквивалентны также следующие свойства кольца R: (1) R классически полупросто; (2) все правые [левые] идеалы кольца R инъективны как правые [левые] R-модули; (3) все правые [левые] R-модули инъективны; (5) все конечно порожденные правые [левые]

R-модули инъективны; (6) все циклические правые [левые] R-модули инъективны; (7) все правые [левые] R-модули проективны; (8) все конечно порожденные правые [левые] R-модули проективны; (9) все циклические правые [левые] R-модули проективны; (10) все правые [левые] R-модули квазиинъективны; (11) каждая максимальная линейно независимая система элементов любого правого [левого] R-модуля порождает этот модуль; (12) все правые [левые] R-модули вполне приводимы; (13) все правые [левые] R-модули малоинъективны; (14) все конечно порожденные правые [левые] R-модули малоинъективны; (15) все правые [левые] R-модули малопроективны; (16) все конечно порожденные правые [левые] R-модули малопроективны; (17) кольцо эндоморфизмов любого свободного правого [левого] R-модуля регулярно; (18) правая [левая] глобальная размерность кольца R равна нулю ([44], с. 27, теорема 4.2; [85], теорема 5; [87], с. 136, теорема 3; Цукерман Г. М.//Мат. заметки.— 1970. — № 3. — С. 369—380).

Кольцо R оказывается регулярным тогда и только тогда, когда все правые [левые] R-модули являются плоскими ([45], теорема 10.49; [57], § 5.4). Регулярность кольца R равносильна также выделяемостью прямым слагаемым каждого конечно порожденного подмодуля любого свободно правого [левого] R-модуля ([87], с. 46, лемма 1).

Теория ненулевых правых [левых] R-модулей модельно полна тогда и только тогда, когда R — бесконечное простое регулярное кольцо (Тюкавкин Л. А.//Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 1. — С. 73—83).

Кольцо R называется *правым V-кольцом*, если каждый простой правый R-модуль инъективен. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R — правое V-кольцо; (2) каждый правый идеал кольца R равен пересечению максимальных правых идеалов; (3) $\operatorname{rad} M = 0$ для любого правого R-модуля M. Коммутативное кольцо является V-кольцом тогда и только тогда, когда оно регулярно ([90], пп. 7.32А, 7.32В). Впрочем, коммутативность здесь можно заменить требованием, что каждый односторонний идеал кольца R является двусторонним (Chandran V. R.//Pure and appl. Math. Sci. — 1976. — V. 4, N 1/2. — P. 125—131).

Нётерово справа кольцо R характеризуется каждым из следующих свойств: (1) все конечно порожденные правые R-модули нётеровы; (2) все конечно порожденные правые R-модули конечно представимы; (3) все циклические правые R-модули конечно представимы; (4) все подмодули любого конечно порожденного правого R-модуля конечно порождены; (5) предел прямого спектра инъективных правых R-модулей инъективен; (6) любая прямая сумма инъективных правых R-модулей инъективна; (7) прямая сумма любого множества экземпляров каждого из инъективных правых R-модулей инъективна; (8) любая прямая сумма инъективных правых R-модулей малоинъективна; (9) любая счетная прямая сумма инъективных оболочек простых правых R-модулей инъективна; (10) каждый инъективный правый R-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых подмодулей; (11) существует такой кообразующий правый R-модуль Q, что прямая сумма любого множества экземпляров модуля Q инъективна; (12) существует такая мощность $\mathfrak{m}$, что каждый правый R-модуль содержится в прямой сумме $\mathfrak{m}$ порожденных модулей; (13) существует такая мощность $\mathfrak{m}$, что каждый инъективный правый R-модуль разлагается в прямую сумму $\mathfrak{m}$-порожденных; (14) класс инъективных правых R-модулей описывается формулами узкого исчисления предикатов на языке теории R-модулей. Напомним, что нётерово справа кольцо не обязано быть нётеровым слева ([45], теоремы 6.5.1 и 6.6.4, с. 227; [90], пп. 20.1, 20.3C, 20.3, 20.6, 20.7, 20.9, 20.19; [85], теорема 18; Eklof P., Sabbagh G.//Ann. Math. Log. — 1971. — V. 2, N 3. — P. 251—295). Кольцо R оказывается кольцом главных правых идеалов тогда и только тогда, когда любой подмодуль свободного правого R-модуля с базой $\{e_1, \ldots, e_n\}$ порождается n элементами ([90], п. 10.22.2).

Если R — нётерово справа кольцо, $\mathrm{r.gl.dim}\, R < \infty$ и все неразложимые проективные правые R-модули изоморфны между собой, то факторкольцо R/N, где N — нильпотентный радикал, изоморфно кольцу матриц над областью целостности. Более того, $\mathrm{gl.dim}\, R \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда для любого конечно порожденного правого R-модуля M левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ проективен. Простое нётерово

кольцо глобальной размерности 2 эквивалентно в смысле Мориты простой нётеровой области. Однако это не так, если глобальная размерность бесконечна ([16], п. 4.8). Если R полупервично, нётерово справа, все конечно порожденные правые R-модули имеют конечную проективную размерность и все конечно порожденные проективные правые R-модули стабильно свободны, то R — область целостности ([16], п. 4.8; [126], теорема 10.6; [233], теорема 37.4). Глобальной размерности посвящена монография [228].

Кольцо R называется *когерентным справа*, если все его конечно порожденные правые идеалы конечно представимы. Правая когерентность кольца R равносильна каждому из следующих свойств: 1) каждый конечно порожденный подмодуль любого проективного правого R-модуля конечно представим; 2) если H — конечно порожденный правый идеал кольца R, то правый идеал $H : r = \{s \mid s \in R, rs \in H\}$ конечно порожден для любого $r \in R$; 3) прямое произведение любого множества плоских левых R-модулей — плоский левый R-модуль; 4) прямое произведение любого множества экземпляров кольца R — плоский левый R-модуль ([90], п. 11.34; [85], теорема 19).

Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R артиново справа; (2) каждый инъективный правый R-модуль изоморфен прямой сумме инъективных оболочек простых правых R-модулей; (3) каждое факторкольцо кольца R содержит существенный артинов правый идеал; (4) каждый точный правый модуль над любым факторкольцом кольца R конечно точен; (5) каждый квазиинъективный правый R-модуль эндоконечен ([45], теорема 6.6.4; [90], пп. 19.13А, 19.16А). Артиново справа кольцо может не быть артиновым слева. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) каждый правый R-модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых подмодулей; (2) R артиново справа, и существует лишь конечное число попарно неизоморфных неразложимых правых R-модулей; (3) все правые R-модули $\aleph_0$-категоричны (Baur W.//J. Symbol. Log. — 1975. — V. 40, N 2. — P. 213—230). Если каждый правый R-модуль разлагается [вкладывается] в прямую сумму конечно порожденных модулей, то R оказывается артиновым справа и каждый неразложимый инъективный правый

R-модуль имеет конечную длину ([85], теорема 20; [90], п. 20.17).

Кольцо R называется *цокольным справа* или *полуартиновым справа*, если каждый ненулевой правый R-модуль имеет ненулевой правый цоколь. Следующие свойства кольца R равносильны: (1) цокольное справа; (2) если I — правый идеал кольца R, отличный от R, то R/I содержит простой подмодуль; (3) каждый правый R-модуль является модулем Лёви; (4) R — правый R-модуль Лёви. Эквивалентны также следующие условия: (1) каждый отличный от M подмодуль любого правого R-модуля M содержится в некотором максимальном подмодуле; (2) если N — отличный от M подмодуль произвольного правого R-модуля M, то радикал фактормодуля M/N отличен от M/N; (3) каждый правый R-модуль M обладает таким убывающим рядом Лёви, что $M^{(\alpha)} = 0$ для некоторого α (см. [90], пп. 18.3, 22.10A, 22.32).

Говорят, что кольцо R имеет *ограниченный* [*конечный*] (правый) тип, если длины неразложимых правых R-модулей ограничены в совокупности [существует лишь конечное число попарно неизоморфных неразложимых правых R-модулей]. Артиново справа кольцо ограниченного правого типа имеет конечный тип ([76], гл. 7). Групповая алгебра конечной группы G над полем простой характеристики p имеет конечный тип тогда и только тогда, когда все силовские p-подгруппы группы G цикличны ([76], с. 244). Самоинъективные алгебры конечного типа над алгебраически замкнутыми полями рассматриваются в [270].

Кольцо R называется *полусовершенным справа*, если все циклические правые R-модули обладают проективным накрытием, или, что то же самое, если R является полусовершенным правым R-модулем. Всякое полусовершенное справа кольцо оказывается полусовершенным слева и наоборот. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R полусовершенно справа; (2) все конечно порожденные правые R-модули обладают проективным накрытием; (3) факторкольцо R/J, где J — радикал Джекобсона кольца R, классически полупросто и для всякого идемпотента $\bar{e} \in R/J$ имеем $\bar{e} = e + J$ для некоторого идемпотента $e \in R$; (4) единица кольца R представляется в виде суммы попарно ортогональных неразложимых идемпо-

тентов; (5) R разлагается в прямую сумму правых [левых] идеалов, каждый из которых содержит в точности один максимальный подмодуль (6) R — полулокальное SBI-кольцо ([45], следствие 11.3.2; [90], п. 22.13, 22.19; [47], теоремы 7.8 и 7.9). Поскольку полусовершенное справа кольцо полусовершенно слева, то можно говорить просто о *полусовершенных кольцах*. Если кольцо эндоморфизмов правого R-модуля M полусовершенно, то M разлагается в прямую сумму неразложимых модулей ([47], теорема 8.7). Если M — неприводимый правый модуль над полусовершенным кольцом, то M изоморфен eR/eJ, где J — радикал Джекобсона кольца R, причем eR оказывается проективным накрытием модуля M (см. [90], п. 22.23(a)).

Если R — полусовершенное кольцо с радикалом Джекобсона J и $1 = e_1 + \ldots + e_n$, где e_i — попарно ортогональные неразложимые идемпотенты, то при подходящей нумерации каждый неразложимый идемпотент кольца R изоморфен в точности одному из идемпотентов $e_1, \ldots, e_r$ (см. п. 2.1). Если $P(e)$ — проективное накрытие правого R-модуля eJ, то

$$P(e_i) \simeq (e_1R)^{t_{i1}} \oplus \ldots \oplus (e_rR)^{t_{ir}} \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где через M^t обозначена прямая сумма t экземпляров модуля M, причем $M^0 = 0$. При этом числа t_{ij} определяются однозначно. Назовем *колчаном* кольца R ориентированный граф $\Gamma(R)$, вершинами которого служат идемпотенты $e_1, \ldots, e_r$, а стрелка $e_i \to e_j$ существует в том и только том случае, когда $t_{ij} \neq 0$. *Схема* кольца R определяется аналогично, только в этом случае считают, что из e_i в e_j идет в точности t_{ij} стрелок. Если R артиново справа, то $\Gamma(R)$ содержит стрелку $e_i \to e_j$ тогда и только тогда, когда $e_jJe_j \neq 0$. Полусовершенное кольцо и его базисное кольцо имеют изоморфные колчаны [схемы]. Нётерово справа и слева полусовершенное кольцо (и, в частности, артиново справа и слева кольцо) неразложимо в прямую сумму двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда неориентированный граф, соответствующий колчану этого кольца, связан ([47], теорема 10.7; [76], с. 128, 131). Дальнейшие результаты о колчанах и схемах можно найти в [34], [47] и [76]. Основные результаты теории представлений конечномерных алгебр, по-

лученные в 70-е годы, кратко излагаются в [244]. При этом широко используются колчаны.

Всякий конечно представимый правый R-модуль обладает проективным накрытием тогда и только тогда, когда R полурегулярно (Nicholson W.//Canad. J. Math. — 1976. — V. 28, N 5. — P. 1105—1120).

Кольцо R называется *совершенным справа*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных между собой условий: (1) каждый правый R-модуль обладает проективным накрытием; (2) каждый плоский правый R-модуль проективен; (3) R удовлетворяет *условию минимальности для главных левых идеалов* (т. е. для любой последовательности $Ra_1 \supseteq \supseteq Ra_2 \supseteq Ra_3 \supseteq \ldots$, где $a_i \in R$, для некоторого номера n имеем $Ra_n = Ra_{n+1} = \ldots$; (4) каждый ненулевой левый R-модуль имеет ненулевой цоколь и левый R-модуль R удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых (т. е. для любой последовательности $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots$ левых идеалов кольца R, где $R = L_i \oplus L_i'$ для подходящих левых идеалов L_i', имеем $L_n = L_{n+1} = \ldots$ для некоторого номера n); (5) R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных левых идеалов; (6) каждый левый R-модуль удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных подмодулей; (7) факторкольцо R/J, где J — радикал Джекобсона кольца R, классически полупросто, а J T-нильпотентен слева; (8) прямая сумма счетного множества правых R-модулей R полусовершенна; (9) R полусовершенно и радикал Джекобсона каждого свободного правого R-модуля косуществен; (10) все плоские правые R-модули малопроективны; (11) кольцо эндоморфизмов любого проективного правого R-модуля полурегулярно ([45], § 11.6; Nicholson W.//Canad. J. Math. — 1976. — V. 28, N 5. — P. 1105—1120). Совершенное справа кольцо может не быть совершенным слева. Совершенное справа кольцо разлагается в прямую сумму простых колец тогда и только тогда, когда оно полупервично ([1], с. 281, теорема 5), а в прямую сумму тел в том и только том случае, когда в нем нет нильпотентных элементов ([1], с. 297—298, теорема 4б).

Все проективные абелевы группы свободны. Свободны и все проективные модули над локальными кольцами ([90], п. 18.20). А. А. Суслин и Квиллен

независимо доказали, что все проективные модули над кольцом многочленов $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$, где Φ — поле, свободны (Суслин А. А.//Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 229, № 5. — С. 1063—1066; [199]).

Для того чтобы все плоские правые R-модули были свободными, необходимо и достаточно, чтобы R было локальным кольцом с T-нильпотентным слева максимальным идеалом ([85], теорема 21). Для проективности всякого циклического плоского правого R-модуля необходимо и достаточно, чтобы для любой цепочки $r_1R \subseteq r_2R \subseteq \ldots$, где $r_{i+1}r_i = r_i \in R$, нашелся такой номер n, что $r_nR = r_{n+1}R = \ldots$ (см. [85], теорема 23).

Кольцо R называется *наследственным* [*полунаследственным*] справа, если всякий [всякий конечно порожденный] правый идеал кольца R проективен как правый R-модуль. Наследственная [полунаследственная] коммутативная область целостности называется *дедекиндовым* [*прюферовым*] кольцом. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R наследственно справа; (2) каждый подмодуль проективного правого R-модуля проективен; (3) каждый фактормодуль инъективного правого R-модуля инъективен. Правая полунаследственность кольца R равносильна каждому из следующих условий: 1) каждый конечно порожденный подмодуль любого проективного правого R-модуля проективен; 2) всякий левый подмодуль прямого произведения любого множества экземпляров кольца R плоский; 3) прямое произведение любого множества экземпляров кольца R является плоским левым R-модулем и $\mathrm{Tor}_2^R(A, B) = 0$ для любых правого R-модуля A и левого R-модуля B; 4) кольцо эндоморфизмов любого свободного правого R-модуля является полунаследственным [риккартовым] слева; 5) кольцо эндоморфизмов любого инъективного правого R-модуля полунаследственно слева. Наследственное [полунаследственное] справа кольцо может не быть наследственным [полунаследственным] слева ([44], §§ 1.5, 1.6; [85], теорема 7, замечание 3; Lenzing H.//Math. Z. — 1970. — Bd. 118, N 3. — S. 219—240). Однако нётерово справа и слева наследственное справа кольцо наследственно слева и разлагается в прямую сумму первичных колец и колец, артиновых справа ([47], теорема 11.4; [126], следствие 8.18, тео-

рема 8.22). Наследственность конечномерной алгебры R над полем равносильна проективности ее радикала Джекобсона, рассматриваемого как правый R-модуль ([34], с. 66, теорема 7.1).

Если F — свободный правый модуль над наследственным справа кольцом R и последовательность

$$\underbrace{R\oplus\ldots\oplus R}_{n}\to F\to M\to 0$$

точна, то каждый подмодуль модуля M является прямой суммой некоторого конечного порожденного модуля и некоторого проективного модуля ([49], с. 225, теорема 1.5). Все счетно порожденные правые [левые] идеалы регулярного кольца оказываются проективными R-модулями. В частности, всякое регулярное кольцо полунаследственно ([85], теорема 3). Наследственным справа является и всякое полупервичное кольцо главных правых идеалов. Если кольцо многочленов $R[x]$ полунаследственно справа или слева, то R — регулярное кольцо (Pillay P.//Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — V. 78, N 4. — P. 473—474).

Кольцо R называется *правым* PP-*кольцом*, если все главные правые идеалы кольца R проективны как правые R-модули, и *риккартовым справа*, если правый аннулятор любого элемента из R является главным правым идеалом, порожденным идемпотентом. Следующие свойства кольца R эквивалентны: (1) R — правое PP-кольцо; (2) R риккартово справа; (3) все циклические подмодули любого проективного правого R-модуля проективны. Риккартово справа кольцо не обязано быть риккартовым слева ([85], теорема 10, замечание 3). Нётерово и риккартово с обеих сторон кольцо изоморфно прямой сумме первичных и артиновых с обеих сторон колец ([90], ч. 2, с. 49, упр. 15, п. 20.30). Полупервичное риккартово справа кольцо, не содержащее бесконечного множества попарно ортогональных идемпотентов, является прямой суммой первичных колец ([126], предложение 8.23).

Все идеалы коммутативного кольца R оказываются плоскими R-модулями в том и только том случае, когда R не содержит нильпотентных элементов, а решетка его идеалов дистрибутивна ([85], теорема 4).

Все [все конечно порожденные, все главные] правые идеалы кольца R являются свободными правыми

R-модулями тогда и только тогда, когда все [все конечно порожденные, все циклические] подмодули любого свободного правого R-модуля свободны. Если все главные правые идеалы кольца R свободны как правые R-модули, то эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R не содержит делителей нуля; (2) всякий правый [левый] делитель нуля из R является левым [правым] делителем нуля; (3) если $a, b \in R$ и $ab = 1$, то $ba = 1$ (т. е. R *конечно по Дедекинду*); (4) R не содержит идемпотентов, отличных от 0 и 1 ([85], теоремы 13 и 11).

Кольцо R называется n-FI-*кольцом*, если оно удовлетворяет одному (а значит, и всем) из следующих эквивалентных друг другу свойств: (1) любой правый [левый] идеал кольца R, порождаемый n элементами, является свободным правым [левым] R-модулем с инвариантным базисным числом; (2) если $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 0$, где x_i, $y_i \in R$ и $m \leqslant n$, то существует такая обратимая $m \times m$-матрица $A = (a_{ij})$ над R, что для каждого j, где $1 \leqslant j \leqslant m$, имеет место или $\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj} = 0$ или $\sum_{l=1}^{m} b_{jl} y_l$, где $(b_{jl}) = A^{-1}$; (3) если $m \leqslant n$, F — свободный правый [левый] R-модуль, $G = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m}$ и φ: $G \to F$ — гомоморфизм, то для подходящих гомоморфизмов ψ и χ и натурального $r \leqslant m$ оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker}\varphi & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Im}\varphi \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{r} & \to & G & \to & \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m-r} \end{array}$$

где в нижней строке имеются в виду естественные вложение и проекция. Заметим, что 1-FI-кольца — это просто кольца без делителей нуля, а 2-FI-кольца могут быть охарактеризованы как кольца без делителей нуля, в которых сумма любых двух главных правых [левых] идеалов, имеющих нулевое пересечение, является главным правым [левым] идеалом. Пересече-

ние любых двух главных правых [левых] идеалов любого 2-FI-кольца является главным правым [левым] идеалом. Кольцо, являющееся n-FI-кольцом для всех натуральных n, называется *полу*-FI-*кольцом*. Кольцо R оказывается полу-FI-кольцом в том и только том случае, когда все конечно порожденные свободные правые [левые] R-модули обладают инвариантным базисным числом, а все конечно порожденные правые [левые] идеалы кольца R свободны как правые [левые] R модули. Всякое коммутативное 2-FI-кольцо является полу-FI-кольцом. Правый модуль над полу-FI-кольцом R оказывается плоским тогда и только тогда, когда все его конечно порожденные подмодули свободны ([49], §§ 1.1, 1.4, 1.5).

Кольцо R, все правые идеалы которого суть свободные правые R-модули с инвариантным базисным числом, называется *кольцом свободных правых идеалов* или *правым* FI-*кольцом*. Коммутативными FI-кольцами являются кольца главных идеалов и только они. Каково бы ни было натуральное n, любая возрастающая цепочка $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ n-порожденных подмодулей любого свободного правого модуля над правым FI-кольцом R обрывается (т. е. $M_r = M_{r+1} = \ldots$ для некоторого r). Если R является правым и левым FI-кольцом одновременно, то всякий элемент из R либо обратим, либо представляется в виде произведения элементов, не представимых в виде произведения двух необратимых элементов ([49], § 1.2).

Кольцо R, инъективное как правый R-модуль, называется *самоинъективным справа*. Для правой самоинъективности кольца R необходимо и достаточно, чтобы каждый точный эндоконечный [точный эндоконечный инъективный] правый R-модуль был образующим правым R-модулем ([90], п. 19.20). Если R самоинъективно справа и J — его радикал Джекобсона, то $J = \operatorname{sing} R$ и R/J самоинъективно справа и регулярно ([90], п. 19.28). Если радикал Джекобсона самоинъективного справа кольца R равен нулю, то R оказывается непрерывным сверху регулярным кольцом ([85], теорема 14). Если R является как правым, так и левым кообразующим R-модулем, то R самоинъективно справа и слева ([90], п. 24.33(c)). Если R полупримарно и является кообразующим правым R-модулем, то R самоинъективно справа ([90], п. 24.10).

Кольцо R называется *правым* QI-*кольцом*, если всякий квазиинъективный правый R-модуль инъективен. Всякое такое кольцо нётерово справа. Кольцо R оказывается QI-кольцом тогда и только тогда, когда прямая сумма любых двух квазиинъективных правых R-модулей квазиинъективна ([90], п. 20.4B).

Артиново справа кольцо называется *квазифробениусовым* или QF-*кольцом*, если $l(r(L))=L$ для любого его левого идеала L и $r(l(H))=H$ для любого его правого идеала H, где обозначено: $r(L)=\mathrm{Ann}_r(L)$, $l(H)=\mathrm{Ann}_l(H)$. Конечномерная алгебра R над полем Φ оказывается квазифробениусовой тогда и только тогда, когда каждое неприводимое прямое слагаемое правого R-модуля $\mathrm{Hom}_\Phi(R, P)$ изоморфно некоторому минимальному правому идеалу алгебры R.

Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R квазифробениусово; (2) отображение $M \mapsto M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ определяет двойственность категорий левых и правых конечно порожденных R-модулей; (3) R артиново справа и слева и модули M^* оказываются простыми для любых простых R-модулей M как правых, так и левых; (4) R артиново справа и слева, правый и левый цоколи кольца R совпадают и для любого примитивного идемпотента e кольца R цоколи модулей eR и Re просты; (5) R самоинъективно слева или справа и артиново [нётерово] слева или справа; (6) R самоинъективно слева или справа и удовлетворяет условию максимальности для левых или правых аннуляторных идеалов; (7) R нётерово слева, $r(l(H))=H$ для каждого его правого идеала H и $r(L_1 \cap L_2)=r(L_1)+r(L_2)$ для любых его левых идеалов L_1 и L_2; (8) R нётерово справа, $l(r(L))=L$ для каждого его левого идеала L и $l(H_1 \cap H_2)=l(H_1)+$ $+l(H_2)$ для любых его правых идеалов H_1 и H_2; (9) каждый инъективный правый [левый] R-модуль проективен; (10) каждый проективный правый [левый] R-модуль инъективен; (11) каждый плоский правый [левый] R-модуль инъективен; (12) R самоинъективно справа и слева и каждый его правый [левый] идеал является правым [левым] аннулятором некоторого конечного множества элементов из R; (13) R совершенно справа [слева] и каждый конечно порожденный левый [правый] R-модуль вкладывается в проективный R-модуль; (14) R когерентно и совер-

шенно справа [слева] и $\mathrm{Ext}_R^n(M, R) = 0$ при любом $n \geqslant 1$ для всех конечно представимых левых [правых] R-модулей M; (15) R удовлетворяет условию максимальности для правых [левых] аннуляторных идеалов и $\mathrm{Ext}_R^n(M, R) = 0$ при любом $n > 1$ для всех конечно представимых правых [левых] R-модулей M; (16) R артиново справа и является инъективным кообразующим правым [левым] R-модулем; (17) R артиново слева и справа, а каждый простой правый [левый] R-модуль рефлексивен; (18) R артиново слева и справа, радикал Джекобсона кольца R является как правым, так и левым аннуляторным идеалом и каждый из минимальных левых и правых идеалов кольца R является левым и правым аннуляторным идеалом соответственно; (19) кольцо эндоморфизмов каждого свободного правого [левого] R-модуля самоинъективно справа; (21) конечно порожденные односторонние идеалы кольца эндоморфизмов любого проективного образующего [инъективного кообразующего] правого R-модуля являются правыми или левыми аннуляторными идеалами соответственно ([45], гл. 13; [90], гл. 24; Геминтерн В. И.//Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 5.— С. 533—540; Бродский Г. М.// Мат. заметки.— 1973.— Т. 14, № 4.— С. 527—534; 1974, 16, № 6, 933—942).

Каждый точный правый модуль над QF-кольцом является образующим. Образующим оказывается и каждый точный конечно порожденный проективный модуль над QF-кольцом. Кольцо эндоморфизмов такого модуля оказывается квазифробениусовым. Инъективные модули над QF-кольцом разлагаются в прямую сумму циклических подмодулей. Для коммутативных колец верно и обратное. Глобальная размерность QF-кольца, не являющегося классически полупростым, бесконечна. Групповое кольцо RG оказывается квазифробениусовым тогда и только тогда, когда G — конечная группа, а R — квазифробениусово кольцо (цит. выше). Всякое счетное самоинъективное справа кольцо квазифробениусово (Lawrence J.//Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 65, N 2.— P. 217—220).

Равносильны следующие свойства кольца R: (1) все факторкольца кольца R квазифробениусовы; (2) все факторкольца S кольца R являются правыми [левы-

ми] кообразующими S-модулями; (3) R совершенно справа [слева] и все его факторкольца самоинъективны; (4) R артиново справа и слева кольцо главных правых и главных левых идеалов (Койфман Л. А.//Весник Моск. ун-та. Сер. мат.-мех. — 1971.— № 5.— С. 7—11; Goursaud J. M.//C. r. Acad. Sci. — 1970. — V. 270, N 6. — P. 364—367; Fuller K. R.//Math. Z. — 1968. — Bd 106, N 4. — S. 248—260; [34], с. 168, теорема 4.1).

Квазифробениусово кольцо R называется *фробениусовым*, если правые или, что равносильно, левые цоколи колец R и R/J, где J — радикал Джекобсона, изоморфны как R-модули. Конечномерная алгебра R над полем Φ оказывается фробениусовой тогда и только тогда, когда R и $\mathrm{Hom}_\Phi(R, \Phi)$ изоморфны как правые [левые] R-модули ([45], §§ 13.4, 13.5). Базисная алгебра конечномерной квазифробениусовой алгебры над полем фробениусова ([34], с. 164, теорема 3.2).

Кольцо R называется *псевдофробениусовым справа* или *правым* PF-*кольцом*, если R — инъективный кообразующий правый R-модуль. Равносильны следующие свойства кольца R: (1) R псевдофробениусово; (2) каждый точный правый R-модуль является образующим; (3) R — кообразующий правый R-модуль, и существует лишь конечное число попарно неизоморфных простых правых R-модулей; (4) R —правый кообразующий R-модуль и каждый простой правый R-модуль изоморфен некоторому минимальному правому идеалу кольца R; (5) каждый кообразующий правый R-модуль является образующим; (6) R — инъективный конечно копорожденный правый R-модуль; (7) R — инъективный полусовершенный правый R-модуль с существенным цоколем; (8) R — самоинъективное справа полулокальное кольцо, каждый ненулевой правый идеал которого содержит минимальный правый идеал; (9) R полулокально и каждый точный правый R-модуль является кообразующим; (10) R самоинъективно справа и левый аннулятор любого максимального правого идеала кольца R отличен от нуля; (11) существует точный правый R-модуль, вкладывающийся в любой точный правый R-модуль в качестве прямого слагаемого (такие кольца названы *правыми* QF-3-*кольцами*) и $r(L) \neq 0$ для любого отличного от R левого

идеала L кольца R (см. [45], теорема 12.5.2; [90], п. 24.32; Osofsky B. L.//J. Algebra. — 1966. — V. 4. — P. 373—387; 1968. — V. 8. — P. 41—44; Utumi Y.// J. Algebra.— 1967.— N. 1.— P. 56—64; Azumaya G.// Nagoya Math. J. — 1966. — V. 27, N 2. — P. 697—708; Sugano A.//Osaka J. Math. — 1967. — V. 4, N 1. — P. 157—160; Kato T.//Tôhoku Math. J.— 1967.— V. 19, N 4. — P. 485—495; Proc. Japan Acad. — 1968. — V. 44, N 3. — P. 114—119; Rutter E. A.//Arch. Math. — 1969. — V. 19, N 6. — P. 608—610). Правое PF-кольцо может не быть левым PF-кольцом (Dischinger F., Müller W.//Commun Algebra. — 1986. — V. 14, N 7.— P. 1223—1227).

Кольцо R называется *правым* FPF-*кольцом*, если каждый конечно порожденный точный правый R-модуль является образующим. Коммутативное кольцо оказывается FPF-кольцом в том и только том случае, когда оно полунаследственно, а его кольцо частных самоинъективно. Подробнее см. [144].

Квазифробениусовым кольцам и их обобщениям посвящена монография [259].

Для того чтобы кольцо R было кообразующим правым R-модулем, необходимо и достаточно, чтобы все конечно порожденные односторонние идеалы кольца эндоморфизмов любого свободного правого R-модуля являлись аннуляторными (Бродский Г. М.//Мат. заметки. — 1973. — Т. 14, № 4. — С. 527—534; 1974. — Т. 16, № 6. — С. 933—942).

Под *правым* SP-*кольцом* или *кольцом с правым сингулярным расщеплением* понимается такое кольцо R, что сингулярный подмодуль выделяется прямым слагаемым в любом правом R-модуле. Обзор относящихся к этим кольцам результатов дан в [261].

Элемент r кольца R называется *тотальным*, если выполнено любое из следующих эквивалентных между собой условий: (1) умножение справа [слева] на r принадлежит $\mathrm{Tot}(R_R, R_R)$ $[\mathrm{Tot}({}_RR, {}_RR)]$; (2) если $0 = e^2 = e \in R$ и $s \in R$, то $e = sre$ $[e \neq rse]$; (3) если $s \in R$ и $(sr)^2 = sr$, то $sr = 0$ $[rs = 0]$. Кольцо R называется *тотальным*, если тотальность элементов $r, s \in R$ влечет тотальность их суммы $r + s$. О тотальных кольцах см. [250], гл. VI.

Отметим некоторые результаты, касающиеся характеризации колец свойствами кручений над ними:

1) все кручения категории правых R-модулей тривиальны тогда и только тогда, когда R изоморфно кольцу $M_n(T)$, где T — артиново справа кольцо с единственным максимальным правым идеалом; 2) все кручения категории правых R-модулей конаследственны в том и только том случае, когда R изоморфно конечной прямой сумме совершенных слева колец, над каждым из которых все неприводимые правые модули изоморфны друг другу; 3) следующие свойства кольца R эквивалентны: (1) R полуартиново справа; (2) R полунётерово справа и его размерность Габриэля равна 0; (3) радикал Джекобсона J кольца R T-нильпотентен слева, а R/J полуартиново справа; (4) полупростое кручение в категории правых R-модулей конаследственно; (5) полупростое кручение в категории правых R-модулей стабильно и джансово; 4) если R — нётерово справа кольцо, то следующие условия эквивалентны: (1) всякий ненулевой первичный правый идеал содержит ненулевой двусторонний идеал; (2) любой конечно порожденный правый R-модуль конечно копорожден; (3) любое кручение в категории правых R-модулей *симметрично* (т. е. каждый ненулевой правый идеал из соответствующего радикального фильтра содержит ненулевой идеал, также принадлежащий этому радикальному фильтру). Подробнее см. [158], ч. VII.

Выше приводились результаты, характеризующие те или иные свойства колец теоретико-модельными свойствами модулей над ними. Известны также описания колец, проективные или плоские модули над которыми определяются формулами узкого исчисления предикатов. Эти вопросы освещены в монографии [238].

Отметим еще, что любой правый модуль над счётным кольцом R оказывается $\aleph_0$-категоричным в том и только том случае, когда каждый правый и каждый левый R-модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых (Baur W.//J. Symb. Log. — 1975. — V. 40, N 2. — P. 213—230).

Пусть M — правый или левый R-модуль и $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. Если X и Ξ — подмодули модулей M и M^* соответственно, то положим

$$X^{\top} = \{f \mid f \in M^*,\ f(x) = 0 \text{ для всех } x \in X\}$$

и

$$\Xi^{\perp} = \{a \mid a \in M,\ f(a) = 0 \text{ для всех } f \in \Xi\}.$$

Кольцо R называется *кольцом с полной дуальностью*, если для любого подмодуля A произвольного R-модуля M (левого или правого) справедливо равенство $(A^{\top})^{\perp} = A$. Следующие свойства кольца R эквивалентны: (1) R — кольцо с полной дуальностью; (2) каждый конечно порожденный R-модуль (как правый, так и левый) рефлексивен; (3) всякий циклический R-модуль (как правый, так и левый) рефлексивен; (4) каждый конечно копорожденный R-модуль (как правый, так и левый) рефлексивен; (5) R — правый и левый кообразующий R-модуль; (6) R самоинъективно справа и является левым кообразующим R-модулем; (7) R самоинъективно слева и является правым кообразующим R модулем; (8) R самоинъективно справа и слева, а каждый как правый, так и левый простой R-модуль изоморфен минимальному правому или левому идеалу кольца R соответственно ([45], теорема 12.1.1).

Кольцо R, являющееся правым полуцепным R-модулем, называется *полуцепным справа*. Артиново справа полуцепное справа кольцо называется *обобщенно однорядным справа*. Кольцо, обобщенно однорядное справа и слева, называется *обобщенно однорядным* или *рядным*. Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R обобщенно однорядное; (2) все правые [левые] R-модули полуцепные; (3) каждый правый [левый] R-модуль разлагается в прямую сумму конечно порожденных цепных подмодулей; (4) R артиново справа [слева] и все правые [левые] конечно порожденные R-модули полуцепные ([90], п. 25.4.2; Скорняков Л. А.//Мат. заметки. — 1969. — № 2. — С. 173—182; см. также Eisenbud D., Griffith P.//Pacif. J. Math. — 1971. — V. 36, N 1. — P. 109—121). Если R — конечномерная алгебра над полем, то к этому списку могут быть присоединены: (6) всякий неразложимый правый [левый] R-модуль изоморфен фактормодулю главного неразложимого правого [левого] R-модуля; (7) всякий неразложимый правый [левый] R-модуль M является проективным правым [левым] $(R/\operatorname{Ann} M)$-модулем; (8) всякий неразложимый правый [левый] R-модуль M является инъективным правым [левым] $(R/\operatorname{Ann} M)$-модулем;

(9) для любого двустороннего идеала I алгебры R существует ненулевой правый [левый] R/I-модуль, являющийся проективным и инъективным одновременно ([34], с. 172—173, теорема 1.1). Самобазисная конечномерная алгебра над полем оказывается обобщенно однорядной тогда и только тогда, когда ее радикал является главным левым и главным правым идеалом ([34], с. 182, теорема 3.3).

Для полусовершенного кольца R равносильны следующие свойства: (1) R полуцепное справа и слева; (2) каждый конечно представимый правый [левый] R-модуль разлагается в прямую сумму локально представимых подмодулей; (3) каждый конечно представимый правый [левый] R-модуль является полуцепным ([90], п. 25.2.6). Полуцепным справа и слева оказывается всякое полусовершенное наследственное справа полупервичное нётерово справа и слева кольцо ([47], теорема 11.8). Нётерово справа и слева полуцепное справа и слева кольцо изоморфно прямой сумме артиновых и наследственных первичных колец ([90], п. 25.3.6). Нётерово справа кольцо оказывается полуцепным справа тогда и только тогда, когда все конечно порожденные правые R-модули полуцепные. Такие кольца представляются как прямые суммы обобщенно однорядных колец, полусовершенных наследственных первичных колец и колец, эквивалентных в смысле Мориты факторкольцам колец матриц специального вида над цепными кольцами (Кириченко В. В.//Ин-т мат. АН УССР. Препринт ИМ-75-1.— Киев, 1975. — 57 с.; Докл. АН УССР. — 1976. — № 1.— С. 9—12). Все конечно порожденные модули над коммутативным кольцом R оказываются полуцепными (такое кольцо часто называют *кольцом Кёте*) тогда и только тогда, когда оно представляется в виде прямой суммы линейно компактных цепных колец, почти максимальных областей Безу (*кольцом Безу* называется коммутативное кольцо, в котором сумма любых двух главных идеалов является главным идеалом, а *почти максимальность* означает, что факторкольцо по любому идеалу, отличному от всего кольца, линейно компактно) и *факельных колец*. Последние определяются следующими свойствами: 1) R не локально; 2) существует наименьший простой идеал P обладающий следующими свойствами: а) P — ненулевой цеп-

ной R-модуль; б) каждый ненулевой элемент фактор-кольца R/P принадлежит лишь конечному множеству максимальных идеалов, а каждый его ненулевой простой идеал содержится лишь в одном максимальном идеале; в) локализация R_P является почти максимальным кольцом Безу (см. [118]).

Левая дистрибутивность кольца равносильна тому, что все его инъективные неразложимые левые модули являются цепными правыми модулями над своими кольцами эндоморфизмов. Левая дистрибутивность инвариантного справа и слева полупервичного кольца равносильна тому, что все его идеалы являются плоскими. Все левые [правые] идеалы дистрибутивного справа и слева полупервичного кольца, целого над своим центром, являются плоскими. Описаны кольца, над которыми каждый модуль разлагается в прямую сумму дистрибутивных модулей ([9], п. 2.6; [65], § 13).

Пусть A — алгебра над коммутативным кольцом Φ. Положим $A^e = A^\circ \otimes_\Phi A$, где A° — алгебра, инверсная алгебре A, и превратим A^e в Φ-алгебру, положив

$$(x' \otimes y')(x'' \otimes y'') = x''x' \otimes y'y''$$

и

$$\lambda(x' \otimes y') = \lambda x' \otimes y'$$

для любых $x', x'', y', y'' \in A$ и $\lambda \in \Phi$. Алгебра A^e называется *обертывающей алгеброй* алгебры A. Алгебра A становится правым A^e-модулем, если положить $a(x \otimes y) = xay$ для любых $a, x, y \in A$. Гомоморфизм $\rho\colon A^e \to A$ правых A^e-модулей, где $\rho(x \otimes y) = xy$ для любых $x, y \in A$, называется *пополняющим отображением* алгебры A. Алгебра A называется *сепарабельной*, если правый A^e-модуль A проективен. Эквивалентны следующие свойства алгебры A: (1) A сепарабельна; (2) точная последовательность правых A^e-модулей $0 \to \operatorname{Ker} \rho \to A^e \to A \to 0$ расщепляется; (3) существует такой элемент $e = \sum_{i=1}^{m} (e_i' \otimes e_i'') \in A^e$, что $\rho(e) = 1$ и $\sum_{i=1}^{m} e_i' a e_i'' = \sum_{i=1}^{m} e_i' e_i'' a$ для любого $a \in A$. Сепарабельная алгебра, являющаяся проективным Φ-модулем, оказывается конечно порожденным Φ-модулем. Если Φ — поле, то любая сепарабельная Φ-алгебра классически полупроста. В этом случае для сепара-

бельности Ф-алгебры A необходимо и достаточно, чтобы она была конечномерной и для любого расширения Φ' поля Φ была классически полупростой Φ'-алгебра $\Phi' \otimes_\Phi A$ (см. [76], гл. 10).

Центральная сепарабельная Ф-алгебра называется *алгеброй Адзумаи*. Следующие свойства алгебры A, являющейся конечно порожденным Ф-модулем, эквивалентны: (1) A — алгебра Адзумаи; (2) A — проективный Ф-модуль и φ: $A \otimes_{\mathfrak{Z}(A)} A \to \mathrm{End}_{\mathfrak{Z}(A)} A$, где $\varphi(a \otimes \otimes b)(r) = arb$, — изоморфизм; (3) для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца Φ факторалгебра $\Phi A/\mathfrak{m}A$ — центральная простая алгебра над полем $\Phi/\mathfrak{m}$. Любая алгебра Адзумаи оказывается и PI-кольцом, а любая центральная простая алгебра — алгеброй Адзумаи. Если A — коммутативная алгебра Адзумаи, то $M_n(A)$ — тоже алгебра Адзумаи. Если A — алгебра Адзумаи, то эквивалентны следующие условия: (1) A удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов; (2) A нётерово слева и справа; (3) кольцо $\mathfrak{Z}(A)$ нётерово. Алгебры Адзумаи подробно рассматриваются в монографии [137]. См. также [208].

Скажем, что кольца R и S *эквивалентны в смысле Мориты* или *подобны*, если эквивалентны категории правых R- и S-модулей, что равносильно эквивалентности категорий левых R- и S-модулей. Кольцо R эквивалентно в смысле Мориты кольцу S в том и только том случае, когда существует такой конечно порожденный проективный правый [левый] R-модуль W, что $\mathrm{End}_R W \simeq S$. При этом каждому левому R-модулю M ставится в соответствие левый S-модуль $\mathrm{Hom}_R(W, M)$, причем в качестве умножения в $\mathrm{End}_R W$ принимается $\cdot$ (см. п. I. 1.4), а sf, где s: $W \to W$ и f: $W \to W$, — произведение гомоморфизмов. Для правого R-модуля M нужно в качестве умножения в $\mathrm{End}_R W$ принять $\circ$, а в качестве произведения fs — композицию $f \circ s$. Далее, заметим, что $\mathrm{End}_S W^* \simeq R$, где $W^* = \mathrm{Hom}_R(W, R)$, и что для любой правый [левый] R-модуль M изоморфен $\mathrm{Hom}_S(W^*, \mathrm{Hom}_R(W, M))$. Поэтому каждому правому [левому] S-модулю M' можно поставить в соответствие R-модуль $\mathrm{Hom}_S(W^*, M')$. Каждое кольцо эквивалентно в смысле Мориты кольцу матриц над ним, а каждое полусовершенное справа кольцо — своему базисному кольцу. Решетки двусторонних идеалов колец, эквивалентных в смысле

Мориты, изоморфны. Для эквивалентности колец R и R' в смысле Мориты достаточно, чтобы существовали проективный образующий правый R-модуль W и проективный образующий правый R'-модуль W' такие, что кольца $\mathrm{End}_R W$ и $\mathrm{End}_{R'} W'$ изоморфны ([87], § VIII. 2, предложение 3 и 5; [90], пп. 4.29, 4.30, 4.36, 18.24; Bolla M. L.//J. Algebra. — 1984. — V. 87, N 1.— P. 261—281). Заметим еще, что из эквивалентности категорий аффинных R- и S-модулей вытекает изоморфизм колец R и S (Жожикашвили А. В.// Мат. заметки. — 1978. — Т. 24, № 4. — С. 475—486).

Если U есть R-S-бимодуль, X — левый R-модуль и Y — правый S-модуль, то абелевы группы $X^*_U = \mathrm{Hom}_R(X, U)$ и $Y^*_U = \mathrm{Hom}_S(Y, U)$ можно рассматривать как правый S- и левый R-модуль соответственно (см. п. 3.1). При этом отображение $\Phi^U_M\colon M \to M^{**} = (M^*_U)^*_U$, где $\Phi^U_M(x)(f) = f(x)$ для любых $x \in M$ и $f \in M^*_U$, оказывается гомоморфизмом левых R-модулей, если M — левый R-модуль, и правых S-модулей, если M — правый S-модуль. Если Φ^U_M оказывается изоморфизмом, то модуль M называется U-рефлексивным. Если U — инъективный кообразующий левый R-модуль и инъективный кообразующий правый S-модуль, R — U-рефлексивный левый R-модуль и S — U-рефлексивный правый S-модуль, то U называется *контекстом двойственности* для R и S. Если такой контекст двойственности существует, то R и S оказываются полусовершенными кольцами. При этом отображения, ставящие в соответствие каждому U-рефлексивному левому R-модулю X правый S-модуль X^*_U, а каждому U-рефлексивному правому S-модулю Y левый R-модуль Y^*_U, осуществляют двойственность между категорией U-рефлексивных левых R-модулей и категорией U-рефлексивных правых S-модулей. Если кольцо R артиново слева, то эквивалентны следующие свойства R-S-бимодуля U: (1) U — контекст двойственности для R и S; (2) кольцо S артиново справа, все конечно порожденные левые R-модули и все конечно порожденные правые S-модули U-рефлексивны; (3) соответствия $X \longmapsto X^*_U$ и $Y \longmapsto Y^*_U$, где X — конечно порожденные левые R-модули, а Y — конечно порожденные правые S-модули, осуществляют двойственность между кате-

горией конечно порожденных левых R-модулей и категорией конечно порожденных правых S-модулей. Эта двойственность называется *двойственностью Мориты* ([90], пп. 23.16, 23.18, 23.25).

С теми или иными аспектами двойственности для модулей связаны работы [169], [194], [195], [218], [275], [276].

Если M — правый R-модуль, то условимся обозначать через $\mathfrak{L}(M)$ решетку его подмодулей. Зафиксируем правый R-модуль U и положим $S = \operatorname{End}_R U$. Рассмотрим треугольную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}_S(\operatorname{Hom}_R(U,M)) \arrow[rr, shift left, "\mathfrak{L}"] \arrow[dr, shift left, "I"] & & \mathfrak{L}_S(\operatorname{Hom}_R(M,U)) \arrow[ll, shift left, "\mathfrak{N}"] \arrow[dl, shift left, "K"] \\
& \mathfrak{L}_R(M) \arrow[ul, shift left, "Q"] \arrow[ur, shift left, "N"] &
\end{tikzcd}$$

где

$$Q(A) = \{\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(U, M),\ \operatorname{Im}\varphi \subseteq A\},$$
$$I(\Xi) = \sum_{\varphi \in \Xi} \operatorname{Im}\varphi,$$
$$N(A) = \{\psi \mid \psi \in \operatorname{Hom}_R(M, U),\ A \subseteq \operatorname{Ker}\psi\},$$
$$K(\Omega) = \bigcap_{\psi \in \Omega} \operatorname{Ker}\psi,$$
$$\mathfrak{L}(\Xi) = \{\psi \mid \psi \in \operatorname{Hom}_R(M, U),\ \psi\varphi = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Xi\},$$
$$\mathfrak{N}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(U, M),\ \psi\varphi = 0 \text{ для всех } \psi \in \Omega\}.$$

Отображения I и Q оказываются изоморфизмами решеток в том и только том случае, когда U удовлетворяет следующим условиям: 1) если X — подмодуль модуля M и фактормодуль модуля U, то X конечно порожден; 2) каждый подмодуль модуля M изоморфен фактормодулю прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля U; 3) если X — подмодуль модуля M, π: $U \to X$ — эпиморфизм и φ: $U^n \to X$ — гомоморфизм, то $\varphi = \psi\pi$ для подходящего ψ: $U^n \to U$:

$$\begin{tikzcd}
& U^n \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
U \arrow[r, "\pi"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Для того чтобы отображения N и K были антиизоморфизмами решеток, необходимо и достаточно выполнение следующих требований: 1) если X — фактормодуль модуля M и подмодуль модуля U, то X конечно копорожден; 2) каждый фактормодуль модуля M изоморфен подмодулю прямого произведения некоторого множества экземпляров модуля U; 3) если Y — фактормодуль модуля M, ε: $Y \to U$ — мономорфизм и φ — гомоморфизм, то $\varphi = \varepsilon\psi$ для подходящего ψ: $U \to U^n$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & U^n & \end{tikzcd}$$

4) если X — подмодуль модуля M и $\{X_\iota \mid \iota \in \mathfrak{J}\}$ — направленное вниз множество подмодулей модуля M, то $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} (X + X_\iota) = X + \bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} X_\iota$. Эти результаты имеют многочисленные следствия (Бродский Г. М.//Тр. Моск. мат. об-ва. — 1983. — Т. 46. — С. 164—186).

§ 5. Кольца и модули с дополнительной структурой

5.1. Топологические кольца и модули. Кольцо R называется *топологическим кольцом*, если R является хаусдорфовым топологическим пространством и операции $a + b$, ab и $-a$ непрерывны по совокупности своих аргументов. Другими словами, для любой окрестности W элемента $a + b$ $[ab]$ найдутся такие окрестности U и V элементов a и b соответственно, что $u + v \in W$ $[uv \in W]$ для любых $u \in U$ и $v \in V$, а для любой окрестности W элемента $-a$ найдется такая окрестность U элемента a, что $-u \in W$ для всех $u \in U$.

Требование хаусдорфности часто не включается в определение топологического кольца, а кольцо, топологическое в смысле только что данного определения, называется *отделимым* или *хаусдорфовым* (см. [3], § 1.3).

Примерами топологических колец служат поля действительных и комплексных чисел с обычной топологией, а также кольца матриц над ними, где в качестве окрестностей матрицы $A = (a_{ij})$

рассматриваются множества $U = \{X = (x_{ij}) \mid |a_{ij} - x_{ij}| < \varepsilon$ для всех $i, j\}$, где ε пробегает все действительные числа. Другие примеры можно найти в п. 5.2.

Гомоморфизм φ топологического кольца R в топологическое кольцо R' называется *топологическим* или *непрерывным*, если φ — непрерывное отображение топологического пространства R в топологическое пространство R'. Изоморфизм φ топологического кольца R на топологическое кольцо R' называется *топологическим*, если φ — гомеоморфизм топологических пространств R и R'. Ядрами топологических гомоморфизмов топологического кольца R в те или иные топологические кольца служат его замкнутые двусторонние идеалы. Наоборот, имея замкнутый двусторонний идеал I в топологическом кольце R можно превратить факторкольцо R/I в топологическое кольцо, считая открытыми все множества $\{u + I \mid u \in U\}$, где U — открытое множество из R. При этом естественный гомоморфизм π: $R \to R/I$ оказывается топологическим и *открытым* (последнее означает, что образ открытого множества открыт). Если идеал I не замкнут, то определенная таким образом топология на R/I не будет хаусдорфовой. Имеет место и *теорема о гомоморфизме*: если φ — открытый топологический гомоморфизм кольца R на кольцо R', то существует такой топологический изоморфизм χ кольца R' на топологическое факторкольцо $R/\operatorname{Ker}\varphi$, что $\varphi\chi = \pi$, где π — естественный гомоморфизм R на R/I.

Напомним, что система Σ окрестностей элемента x топологического пространства называется *базой окрестностей элемента* x, если каждая окрестность этого элемента содержит некоторую окрестность из Σ. Если Σ_0 — база окрестностей нуля топологического кольца R, то Σ_0 обладает следующими свойствами: 1) $\bigcap\limits_{U \in \Sigma_0} U = \{0\}$; 2) если $U, V \in \Sigma_0$, то $W \subseteq U \cap V$ для некоторого $W \in \Sigma_0$; 3) если $U \in \Sigma_0$, то $V + V \subseteq U$ для некоторого $V \in \Sigma_0$; 4) если $U \in \Sigma_0$, то $-V \subseteq U$ для некоторого $V \in \Sigma_0$; 5) если $U \in \Sigma_0$, то для некоторого $V \in \Sigma_0$ имеет место $xy \in U$ для любых $x, y \in V$; 6) если $a \in R$ и $U \in \Sigma_0$, то для некоторого $V \in \Sigma_0$ имеет место $aV \cup Va \subseteq U$.

Наоборот, если в кольце R выделена система подмножеств Σ_0, обладающая свойствами 1)—5), то на

множестве R существует одна и только одна топология, превращающая R в топологическое кольцо и имеющая систему Σ_0 базой окрестностей нуля. При этом для каждого $a \in R$ система

$$\Sigma_a = \{a + U \mid U \in \Sigma_0\}$$

служит базой окрестностей элемента a, а замыкание любого подмножества $X \subseteq R$ совпадает с пересечением $\bigcap\limits_{U \in \Sigma_0} (X + U)$.

Каждое топологическое кольцо R обладает базой окрестностей нуля, состоящей из симметрических открытых [замкнутых] подмножеств (подмножество U называется *симметрическим*, если $U = -U$). Каждый элемент из R обладает базой окрестностей, состоящей из открытых [замкнутых] множеств. Всякая открытая подгруппа аддитивной группы кольца R замкнута. Факторкольцо кольца R по любому его открытому и двустороннему идеалу дискретно. Связная компонента нуля кольца R является его двусторонним идеалом, факторкольцо по которому вполне несвязно. Локально компактное вполне несвязное топологическое кольцо обладает базой окрестностей нуля, состоящей из открытых подколец, а компактное — из открытых компактных двусторонних идеалов. Компактное топологическое кольцо с единицей всегда вполне несвязно ([3], §§ 1.2, 1.4—1.6; [78], §§ 19, 20, 25).

Замыкание подкольца, левого, правого или двустороннего идеала топологического кольца является подкольцом, левым, правым или двусторонним идеалом соответственно. При этом, если подкольцо коммутативно, то коммутативно и его замыкание. Существуют непростые топологические кольца, не содержащие нетривиальных замкнутых идеалов. Центр топологического кольца замкнут, а связная компонента нуля оказывается замкнутым двусторонним идеалом ([3], предложение 1.4.7, следствие 1.4.9, предложение 1.4.38, пример 1.4.17, предложение 1.4.39, следствие 1.4.23).

Если A и B — подмножества топологического кольца R, то произведение замыканий этих множеств лежит в замыкании их произведения. Если эти множества компактны, то компактно и их произведение. Если a — обратимый элемент топологического кольца R, то эквивалентны условия: (а) U — окрестность

элемента $x \in R$; (б) Ua — окрестность элемента xa; (в) aU — окрестность элемента ax. Эквивалентны также условия: (а′) B — открытое [замкнутое] подмножество в R; (б′) aB — открытое [замкнутое] подмножество в R; (в′) Ba — открытое [замкнутое] подмножество в R ([3], следствия 1.1.43, 1.1.45 и 1.1.47).

Если $\varnothing \neq A \subseteq R$, то множества

$$\{y \mid y \in R \text{ и } xy = 0 \text{ для всех } x \in A\}$$

и

$$\{y \mid y \in R \text{ и } yx = 0 \text{ для всех } x \in A\}$$

оказываются замкнутыми правым и левым идеалами кольца R соответственно. Недискретное топологическое кольцо без делителей нуля не содержит дискретных односторонних идеалов ([3], следствия 1.4.31 и 1.4.33).

Подмножество M топологического кольца R называется *ограниченным слева* [*справа*], если для любой окрестности нуля W найдется такая окрестность нуля U, что $ux \in W$ $[xu \in W]$ для любых $u \in U$ и $x \in M$. Ограниченное подмножество — это подмножество, ограниченное как слева, так и справа. Ограниченным оказывается, например, всякое компактное подмножество. Замыкание ограниченного слева [справа] множества ограничено слева [справа]. Если $M_1, \ldots, M_n$ — ограниченные слева [справа] подмножества, то подмножества $M_1 + \ldots + M_n$, $M_1 \ldots M_n$ и $M_1 \cup \ldots \cup M_n$ также ограничены слева [справа]. Если φ — непрерывное и открытое гомоморфное наложение топологического кольца R на топологическое кольцо R' и M — ограниченное слева [справа] подмножество в R, то $\varphi(M)$ — ограниченное слева [справа] подмножество в R'. Топологическое кольцо R ограничено тогда и только тогда, когда оно обладает базой Σ_0 окрестностей нуля, состоящей из двухсторонних идеалов мультипликативной полугруппы кольца R (т. е. если $u \in U \in \Sigma_0$ и $r \in R$, то $ur, ru \in U$). Ограниченное топологическое кольцо, обладающее базой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп, обладает базой окрестностей нуля, состоящей из двусторонних идеалов. Если R — локально компактное топологическое кольцо, C — его связная компонента нуля и A — ограниченная слева [справа] подгруппа аддитивной группы кольца R, то $CA = 0$ $[AC = 0]$.

Ограниченное справа или слева локально компактное кольцо с единицей вполне несвязно ([3], следствия 1.65, 1.6.17 и 1.6.68, предложения 1.6.19 и 1.6.28, теоремы 1.6.34 и 1.6.67).

Топологическое кольцо R называется *локально ограниченным слева* [*справа*], если оно обладает ограниченной слева справа окрестностью нуля. Топологическое кольцо R с базисом окрестностей нуля, состоящим из подгрупп адитивной группы, оказывается локально ограниченным слева, справа или слева и справа в том и только том случае, когда R обладает такой базой окрестностей нуля, что одна из этих окрестностей является подкольцом кольца R, а остальные — левым, правым или двусторонним идеалом этого подкольца соответственно ([3], теорема 1.6.48).

Элемент a топологического кольца R называется *левым* [*правым*] *топологическим* (иногда, *обобщенным*) *делителем нуля*, если найдется такое подмножество $T \subseteq R$, что $0 \notin \bar{T}$ (здесь $\bar{T}$ означает замыкание множества T) и $0 \in a\bar{T}$ $[0 \in \bar{T}a]$. Каждый левый [правый] делитель нуля из R оказывается топологическим левым [правым] делителем нуля. Обратимый слева [справа] элемент не может быть правым [левым] топологическим делителем нуля. Элемент a оказывается левым [правым] топологическим делителем нуля тогда и только тогда, когда в кольце R найдется такая окрестность нуля U, что для любой окрестности нуля V в R существует такой элемент $b \in R \setminus V$, что $ab \in V$ $[ba \in V]$. Если ab — левый [правый] топологический делитель нуля, то либо a, либо b оказывается левым [правым] топологическим делителем нуля. Чтобы указать нетривиальный пример топологического делителя нуля, рассмотрим кольцо R всех непрерывных действительных функций на отрезке $[0, 1]$ с базой окрестностей нуля

$$U_\varepsilon = \{f \mid f \in R,\ |f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in [0, 1]\},$$

где $\varepsilon = 1/2, 1/3, \ldots$ В этом кольце любая функция, обращающаяся в нуль в точности в одной точке, оказывается топологическим делителем нуля, хотя обычным делителем нуля не является ([3], замечание 1.8.2 и предложения 1.8.7, 1.8.9 и 1.8.12).

Подмножество N топологического кольца R называется *топологически нильпотентным*, если для любой

окрестности нуля U кольца R найдется такой номер n, что $x_1, \ldots, x_m \in U$ для любых $m \geqslant n$ и $x_1, \ldots, x_m \in N$. В частности элемент a из R называется топологически нильпотентным, если для любой окрестности нуля U найдется такой номер n, что $a^m \in U$ для всех $m \geqslant n$. Обратимый элемент a из R называется *нейтральным*, если ни a, ни a^{-1} не являются топологически нильпотентными элементами.

Интервал $(-1, 1)$ поля действительных чисел с обычной топологией состоит из топологически нильпотентных элементов, но не является топологически нильпотентным подмножеством. К числу последних принадлежит, например, отрезок $[-1/2, 1/2]$. Нейтральными элементами поля комплексных чисел с обычной топологией служат числа с модулем, равным 1, и только они.

Если M — некоторое множество, то множество $\mathfrak{F}$ подмножеств множества M называется *фильтром на множестве* M, если $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ и для любых A, $B \in \mathfrak{F}$ и $C \subseteq M$, где $A \subseteq C$, имеем $A \cap B$, $C \in \mathfrak{F}$. Отметим, что фильтром оказывается совокупность всех открытых множеств, содержащих фиксированную точку топологического пространства. Элемент a топологического пространства F называется *пределом фильтра* $\mathfrak{F}$ на F (в обозначениях $a = \lim \mathfrak{F}$, если для любой окрестности U точки a найдется такое подмножество $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subseteq U$. Каждый фильтр имеет не более одного предела. Фильтр $\mathfrak{F}$ на топологическом кольце R называется (*аддитивным*) *фильтром Коши*, если для любой окрестности U нуля кольца R найдется такое подмножество $A \in \mathfrak{F}$, что $x - y \in U$ для любых $x, y \in A$. Всякий фильтр на R, имеющий предел, оказывается фильтром Коши. Топологическое кольцо называется *полным*, если всякий фильтр Коши на нем имеет предел. Если R — топологическое кольцо, то на множестве $\tilde{R}$ всех фильтров Коши на R определим отношение $\equiv$, положив $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{G}$, если совокупность открытых множеств, принадлежащих фильтрам $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, одна и та же. Тогда $\equiv$ оказывается эквивалентностью и фактормножество $\hat{R} = \tilde{R}/\equiv$ становится полным топологическим кольцом, если для любых $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \tilde{R}$ положить $[\mathfrak{F}] + [\mathfrak{G}] = [\{X \mid X \subseteq R$ и существуют $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{G}$ такие, что $a + b \in X$ для любых $a \in A$ и $b \in B\}]$ и $[\mathfrak{F}][\mathfrak{G}] = [\{X \mid X \subseteq R$ и существуют $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{G}$ такие, что $ab \in X$ для любых $a \in A$ и $b \in B\}]$, где $[\mathfrak{F}]$ — класс эквивалентности $\equiv$, содержащий X, и

принять в качестве базы окрестностей нуля подмножества

$$\{\mathfrak{V}(U) \mid U \text{ — окрестность нуля в кольце } R\},$$

где

$$\mathfrak{V}(U) = \{[\mathfrak{G}] \mid U \in \mathfrak{G} \in \tilde{R}\}.$$

Если для любого $a \in R$ положить

$$\varphi(a) = [\{X \mid a \in X \subseteq R\}],$$

то φ оказывается топологическим изоморфизмом кольца R на подкольцо кольца $\hat{R}$, причем в любой окрестности элемента $\hat{a}$ из $\hat{R}$ содержится элемент $\varphi(a)$, где $a \in R$. Поэтому кольцо $\hat{R}$ называется *пополнением* кольца R. Если для кольца R справедливо какое-либо тождество, то оно остается справедливым и для кольца $\hat{R}$. В частности, пополнение коммутативного кольца коммутативно. Для любого топологического кольца R существует такое полное кольцо S, что R топологически изоморфно S/I для подходящего замкнутого идеала I кольца S (см. [20], п. III. 5.4; [2], §§ 1.3, 2.1).

Тело D называется *топологическим телом*, если оно является топологическим кольцом и операция a^{-1} непрерывна, т. е. для любой окрестности W элемента a^{-1} найдется такая окрестность U элемента a, что $u^{-1} \in W$ для всех $u \in U$. Тело D, являющееся топологическим кольцом, оказывается топологическим телом тогда и только тогда, когда оно обладает такой базой окрестностей нуля Σ_0, что для любой $W \in \Sigma_0$ найдется $U \in \Sigma_0$ такая, что $(1+u)^{-1} \in 1 + W$ для всех $u \in U$. Это условие выполняется, если D обладает топологически нильпотентной окрестностью нуля, что, в свою очередь, имеет место, если D недискретно и локально компактно. Замыкание подтела топологического тела является топологическим телом. Если $0 \neq U \subseteq D$ и U открыто, то $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ также открыто. Ограниченное слева [справа] и, в частности, компактное топологическое тело дискретно ([3], теорема 1.2.13, предложения 1.2.14, 1.4.42 и 1.6.18, следствие 1.4.51; [2], § 1.5).

Пополнение топологического тела D оказывается топологическим телом тогда и только тогда, когда для любого фильтра Коши $\mathfrak{F}$ на D, где $\lim \mathfrak{F} \neq 0$, множе-

ство $\{A^{-1} | A \in \mathfrak{F}\}$ является фильтром Коши. Существуют топологические тела, пополнение которых содержит делители нуля. Фильтр $\mathfrak{F}$ на топологическом теле называется *левым* [*правым*] *мультипликативным фильтром Коши*, если для любой окрестности U единицы тела D найдется такое подмножество $A \in \mathfrak{F}$, что $0 \notin A$ и $x^{-1}y \in U$ $[xy^{-1} \in U]$ для всех $x, y \in A$. Если D — полное топологическое тело, а всякий левый мультипликативный фильтр Коши на D является правым мультипликативным фильтром Коши и наоборот (в частности, если D коммутативно), то всякий мультипликативный фильтр на D имеет предел ([20], п. III. 5.6).

Если тело D является недискретным локально компактным топологическим кольцом, то D содержит ненулевые топологически нильпотентные элементы и даже обладает топологически нильпотентной окрестностью нуля ([3], теорема 1.2.41, следствия 1.8.42 и 1.8.46).

Связное локально компактное кольцо R (не обязательно ассоциативное) *без полных делителей нуля* (т. е. если $c \in R$ и $cR = Rc = 0$, то $c = 0$) оказывается конечномерной алгеброй над полем действительных чисел (Jacobson N., Tausski O.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1935. — V. 21. — P. 106—108). Радикал Джекобсона компактно вполне несвязного кольца топологически нильпотентен. В любом компактном кольце радикал Джекобсона совпадает с объединением всех левых [правых] топологических нильидеалов. Компактное кольцо без топологически нильпотентных двусторонних идеалов или, что в этом случае то же самое, с нулевым радикалом Джекобсона изоморфно топологическому прямому произведению конечных простых колец (Kaplansky I.//Amer. J. Math. — 1947. — V. 69, N 1. — P. 153—183).

Топология на правом R-модуле M называется *линейной*, если M обладает базой окрестностей нуля, состоящей из подмодулей. В случае кольца можно говорить о правой и левой линейных топологиях. Множество линейных топологий кольца — предмет обзора [160]. Модуль M называется *линейно компактным*, если $\bigcap\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} (a_\iota + N_\iota) = 0$ для любого множества $\mathfrak{J}$ смежных классов $a_\iota + N_\iota$ при любом множестве $\{N_\iota | \iota \in \mathfrak{J}\}$

замкнутых подмодулей. Кольцо R называется *линейно компактным справа* [*слева*], если оно линейно компактно как правый [левый] R-модуль. Всякий компактный модуль с линейной топологией линейно компактен. Линейно компактен и всякий модуль с линейной топологией, удовлетворяющий условию минимальности для замкнутых подмодулей. Всякий линейно компактный модуль полон. В частности, полно любое кольцо, линейно компактное справа или слева ([2], § 1.2).

Если Σ — совокупность всех окрестностей нуля топологического кольца R, то $I = \bigcap_{U \in \Sigma} RU$ — двусторонний идеал кольца R, который называется *левым ядерным идеалом*. Кольца матриц над недискретными локально компактными телами и только они являются недискретными простыми кольцами с единицей, обладающими ненулевым левым ядерным идеалом. Однако существуют недискретные простые локально компактные кольца с единицей и нулевым левым ядерным идеалом, которые, разумеется, не изоморфны кольцам матриц над локально компактными телами (Skornjakov L. A.//Math. Z. — 1965. — V. 87. — P. 241—251).

Пусть D — недискретное локально компактное тело. Тогда имеет место один из следующих трех случаев: 1) D изоморфно полю действительных чисел, или полю комплексных чисел, или телу кватернионов; 2) D — центральная конечномерная алгебра с делением над полем p-адических чисел; 3) D — центральная конечномерная алгебра над полем рядов Лорана с коэффициентами из некоторого поля вычетов по простому модулю ([78], § 27).

Нётерово слева кольцо R с единицей компактно в топологии, базисом окрестностей нуля которой служат степени его радикала Джекобсона, в том и только том случае, когда оно *эквационально компактно*, т. е. любая система уравнений над R разрешима, если разрешима каждая из ее конечных подсистем. Всякое эквационально компактное кольцо является ретрактом некоторого компактного кольца. Нётерово слева эквационально компактное кольцо или конечно или имеет мощность континуума ([167], с. 72, следствие 6.8; с. 60, теорема 4.13; с. 84, теорема 6.11; там же можно

найти и другие результаты об эквационально компактных кольцах).

О топологических полях см. [271].

Правый модуль A над топологическим кольцом R (не исключается, что топология на R дискретна) называется *топологическим*, если A — топологическая абелева группа и для любых $a \in A$, $r \in R$ и окрестности W элемента ar найдутся окрестность U элемента a и окрестность V элемента r такие, что $xs \in W$ для любых $x \in U$ и $s \in V$. База Σ_0 окрестностей нуля топологического правого R-модуля удовлетворяет следующим условиям: 1) $\bigcap_{U \in \Sigma_0} U = \{0\}$; 2) если U, $V \in \Sigma_0$, то $W \subseteq U \cap V$ для некоторого $W \in \Sigma_0$; 3) если $U \in \Sigma_0$, то $V + V \subseteq U$ для некоторого $V \in \Sigma_0$; 4) если $U \in \Sigma_0$, то $-V \subseteq U$ для некоторого $V \in \Sigma_0$; 5) если $U \in \Sigma_0$, то найдутся $V \in \Sigma_0$ и окрестность T нуля в R такие, что $xr \in U$ для любых $x \in V$ и $r \in T$; 6) если $U \in \Sigma_0$ и $r \in R$, то $Vr \subseteq U$ для некоторого $V \in \Sigma_0$; 7) если $U \in \Sigma_0$ и $a \in A$, то $aT \subseteq U$ для некоторой окрестности T нуля в R. Наоборот, если в A выделена система Σ_0 подмножеств, удовлетворяющая условиям 1)—7), то существует одна и только одна топология, превращающаяся A в топологический правый R-модуль и имеющая систему Σ_0 базой окрестностей нуля. При этом для каждого a система

$$\Sigma_a = \{a + U \mid U \in \Sigma_0\}$$

служит базой окрестностей элемента a. Если A — топологический правый R-модуль и Σ_0 — база окрестностей нуля в A, то: 1) A обладает базой окрестностей нуля, состоящей из симметрических открытых [замкнутых] множеств; 2) каждый элемент из A обладает базой, состоящей из открытых [замкнутых] подмножеств; 3 замыкание любого подмножества $X \subseteq A$ совпадает с пересечением $\bigcap_{U \in \Sigma_0} (X + U)$; 4) всякая открытая подгруппа аддитивной группы модуля A замкнута; 5) связная компонента нуля модуля A является его замкнутым подмодулем; 6) если B — дискретный подмодуль в A и $b \in B$, то $\operatorname{Ann} b$ — открытый правый идеал кольца R.

Подмножество X топологического правого R-модуля A называется *ограниченным*, если для любой

окрестности W нуля в A найдется такая окрестность T нуля в R, что $xt \in W$ для любых $x \in X$ и $t \in T$. Всякое компактное и, в частности, всякое конечное подмножество любого топологического модуля ограничено. Ограничено и замыкание всякого ограниченного подмножества в любом топологическом модуле, а также сумма и объединение любого конечного множества ограниченных подмножеств.

Гомоморфизм φ топологического правого R-модуля A в топологический правый R-модуль B называется *топологическим*, если φ — непрерывное отображение топологического пространства A в топологическое пространство B. Изоморфизм $\varphi: A \to B$ топологических правых R-модулей называется *топологическим*, если φ — гомеоморфизм топологических пространств A и B. Ядром топологического гомоморфизма $\varphi: A \to B$ служит замкнутый подмодуль модуля A. Имея замкнутый подмодуль K модуля A, можно превратить фактормодуль A/K в топологический модуль; приняв в качестве базы окрестностей нуля множество $\{U + K\}$, где U пробегает некоторую базу окрестностей нуля модуля A. При этом естественный гомоморфизм π модуля A на фактормодуль A/K оказывается топологическим и открытым (т. е. $\pi(U)$ открыто в A/K, если U открыто в A). Та же конструкция применима и без предположения о замкнутости подмодуля K. Но в этом случае топологическое пространство A/K не будет хаусдорфовым. Фактормодуль по открытому подмодулю дискретен. Фактормодуль по связной компоненте нуля вполне несвязен. *Теорема о гомоморфизме* формулируется так: если $\varphi: A \to B$ — открытый топологический гомоморфизм топологических правых R-модулей и φ — наложение, то существует такой топологический изоморфизм $\chi: B \to A/\mathrm{Ker}\,\varphi$, что $\varphi\chi = \pi$, где π — естественный гомоморфизм A на $A/\mathrm{Ker}\,\varphi$ (см. [3], §§ 1.2, 1.4—1.6; [78], §§ 19, 20).

Прямые произведения и другие конструкции для топологических колец и модулей рассматриваются в [2], гл. 2.

5.2. Нормированные кольца. Ассоциативное кольцо R называется *нормированным*, если каждому $a \in R$ поставлено в соответствие неотрицательное действи-

тельное число $\|a\|$ (оно называется *нормой элемента* a), причем:

1) $\|a\|=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$;

2) $\|a-b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$ для любых $a,\ b\in R$;

3) $\|ab\|=\|a\|\|b\|$ для любых $a,\ b\in R$.

В качестве примеров нормированных колец можно указать поля действительных и комплексных чисел, где $\|a\|$ — модуль числа a.

Нормированное кольцо R не содержит делителей нуля и для его единицы 1 (если она существует) имеем $\|1\|=1$. Если $a, b\in R$, то $\|a\|=\|-a\|$, $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$ и

$$\|a\|-\|b\|\leqslant|\,\|a\|-\|b\|\,|\leqslant\|a-b\|.$$

Всякое кольцо без делителей нуля становится нормированным, если положить $\|0\|=0$ и $\|a\|=1$ при $a\neq 1$. Такую норму назовем *тривиальной*. Норма называется *неархимедовой*, если вместо 2) выполняется более сильное условие

2′) $\|a+b\|\leqslant\max\{\|a\|,\ \|b\|\}$.

В качестве примера кольцо с неархимедовой нормой рассмотрим кольцо целых чисел, зафиксируем простое число p и для каждого целого числа $m\neq 0$ положим $\|m\|=2^{-k}$, где k — количество сомножителей p, входящих в m. Кроме того, пусть $\|0\|=0$. Это определение превращает кольцо целых чисел в нормированное кольцо. Введенную норму можно распространить на поле рациональных чисел, положив $\left\|\frac{m}{n}\right\|=\frac{\|m\|}{\|n\|}$. Определенная таким образом норма называется *p-адической*.

Если $\|\ \ \|$ — нетривиальная норма на поле рациональных чисел, то или

$$\|\ \ \|=|\ \ |^{\rho},$$

где $0<\rho\leqslant 1$, или

$$\|\ \ \|=|\ \ |^{\sigma},$$

где $|\ \ |$ означает p-адическую норму для некоторого простого числа p, а $\sigma>0$.

Если в определении нормированного кольца условие 3) заменить на 3′) $\|ab\|\leqslant\|a\|\,\|b\|$, то мы приходим к определению *псевдонормированного* кольца.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов псевдонормированного кольца называется *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что $i, j > n$ влечет $\|a_i - a_j\| < \varepsilon$.

Псевдонормированное кольцо R называется *полным*, если всякая последовательность Коши элементов из R имеет предел. Полное кольцо $\hat{R}$ называется *пополнением* кольца R, если $R \subseteq \hat{R}$ и каждый элемент из $\hat{R}$ является пределом некоторой последовательности элементов из R. Каждое псевдонормированное кольцо обладает пополнением, которое определяется однозначно с точностью до изоморфизма, сохраняющего псевдонорму. Пополнение коммутативного псевдонормированного кольца коммутативно. Если D — нормированное тело или поле, то его пополнение $\hat{D}$ также является телом или полем соответственно. Для псевдонормированных тел и полей это, вообще говоря, не так ([87], с. 222, теорема 2).

Если R — псевдонормированное или нормированное кольцо и ε — положительное действительное число, то положим

$$U_\varepsilon = \{x \mid x \in R, \ \|x\| < \varepsilon\}.$$

Легко проверяется, что система подмножеств $\{U_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < 1\}$ может быть принята за базу окрестностей нуля, причем R становится топологическим кольцом. Топологическое кольцо R называется *нормируемым* [*псевдонормируемым*], если на R можно задать такую норму [псевдонорму], что определяемая ею описанным выше образом топология на R совпадает с исходной. При этом R оказывается полным топологическим кольцом тогда и только тогда, когда оно полно как нормированное кольцо.

Топологическое тело D нормируемо тогда и только тогда, когда множество его топологически нильпотентных элементов открыто и ограничено справа, а при умножении топологически нильпотентного или нейтрального элемента на топологически нильпотентный получается топологически нильпотентный элемент ([87], с. 234, теорема 2; [3], теорема 2.2.3; [55], с. 358). Для нормируемости топологического поля необходимо и достаточно, чтобы множество его топологически нильпотентных элементов было открыто,

а объединение множеств топологически нильпотентных и нейтральных элементов ограничено. Всякое локально компактное тело нормируемо ([87], с. 241, теорема 2; [3], теорема 2.2.6; [55], § VI. 10).

Для псевдонормируемости топологического кольца R необходимо и достаточно, чтобы оно обладало такой базой окрестностей нуля $\{U_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$, что для любых i и j имеет место $U_{i+1} + U_{i+1} \subseteq U_i$ и $U_i U_j \subseteq U_{i+j}$, а для любого $a \in R$ найдется такой номер n, что $aU_{k+n} \subseteq U_k$ и $U_{k+n}a \subseteq U_k$ для всех k. Для связного топологического кольца последнее требование является следствием первых двух. Если топологическое кольцо с единицей содержит обратимый топологически нильпотентный элемент d и ограниченную окрестность нуля U такие, что $dU = Ud$, то это кольцо псевдонормируемо. Всякая конечномерная алгебра A над полем действительных чисел $\mathbf{R}$ (не обязательно ассоциативная), псевдонормируема, причем $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$ для любых $\lambda \in \mathbf{R}$ и $a \in A$. Напротив, поля действительных и комплексных чисел и тела кватернионов и чисел Кэли оказываются единственными нормируемыми конечномерными алгебрами над полем $\mathbf{R}$ (см. [3], теорема 2.1.4 и 2.1.11, следствие 2.1.9; [55], с. 328—329).

О направлении в теории нормированных колец, связанная с функциональным анализом, см. [27], [75], [95], [204].

Если W — линейно упорядоченное кольцо, то кольцо R (подчеркнем, что кольца W и R не предполагаются ассоциативными) называется *нормированным кольцом со значениями нормы в кольце* W, если задано отображение ω: $R \to W$, обладающее следующими свойствами: 1) $\omega(0) = 0$; 2) если $a \neq 0$, то $\omega(a) > 0$; 3) $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$; 4) $\omega(a - b) \leqslant \omega(a) + \omega(b)$. Если W — поле действительных чисел с обычным порядком, то получаем обычное нормированное кольцо. Из определения вытекает, что $\omega(-a) = -\omega(b)$ и $\omega(a + b) \leqslant \omega(a) + \omega(b)$ для любых $a, b \in R$. Если R — линейно упорядоченное кольцо, то оно может быть нормировано со значениями нормы в R: достаточно положить

$$\omega(a) = \begin{cases} a, & \text{если } 0 \leqslant a \in R, \\ -a, & \text{если } 0 > a \in R. \end{cases}$$

Если для всякого положительного элемента $w \in W$ имеем $w = \omega(a)$ для некоторого $a \in R$, то: 1) если R содержит единицу 1, то $\omega(1)$ — единица кольца W; 2) если R ассоциативно [коммутативно], то W также ассоциативно [коммутативно]; 3) если R — тело, то W — тело. Нормирование ω называется *неархимедовым*, если условие 4) заменено на более сильное: 4′) $\omega(a-b) \leqslant \max\{\omega(a), \omega(b)\}$. Поскольку в определении неархимедовой нормы сложение в кольце W никакой роли не играет, то можно считать, что W — линейно упорядоченный группоид. Всякое линейно упорядоченное кольцо допускает неархимедово нормирование со значениями нормы в группоиде архимедовых классов этого кольца. При этом два элемента кольца принадлежат, по определению, одному *архимедову классу*, если они порождают один и тот же выпуклый идеал ([55], § VI.4).

Кольцо R с единицей называется *фильтрованным*, если в нем выделено множество $\mathfrak{F} = \{F_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ подгрупп его аддитивной группы, причем $1 \in F_0$ и $F_m F_n \subseteq F_{m+n}$ для любых $m, n \in \mathbf{Z}$. Если $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{Z}} F_n = \{0\}$, то, приняв $\mathfrak{F}$ за базу окрестностей нуля, превратим R в топологическое кольцо. Всякое $\mathbf{Z}$-градуированное кольцо оказывается фильтрованным: достаточно положить $F_n = \sum\limits_{i<n}^{\oplus} R_i$. Фильтрованные кольца и связанные с ними фильтрованные модули рассматриваются в монографии [222] (см. также [221]). О связи фильтрованных колец с псевдонормируемыми и градуированными см. [49], § 2.2, § 2.3; [222], гл. DIII). Ряд результатов о фильтрованных кольцах имеется в [59] и [233].

5.3. Упорядоченные кольца. Кольцо R (не обязательно ассоциативное) называется *частично* [*линейно*] *упорядоченным*, если R — частично [линейно] упорядоченное множество и для любых $a, b, c \in R$ справедливы импликации

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (a + c \leqslant b + c)$$

и

$$((a \leqslant b) \;\&\; (c \geqslant 0)) \Rightarrow ((ac \leqslant bc) \;\&\; (ca \leqslant cb)).$$

Элемент a частично упорядоченного кольца называется *положительным* [*отрицательным*], если $a \geqslant 0$

$[a \leqslant 0]$. Совокупность всех положительных элементов частично упорядоченного кольца однозначно определяет его порядок и называется *положительным конусом*. Подмножество P кольца R совпадает с положительным конусом некоторого частичного порядка на R в том и только том случае, когда $P \cap (-P) = \{0\}$, $P + P \subseteq P$ и $PP \subseteq P$. Порядок оказывается линейным (т. е. R является цепью) тогда и только тогда, когда $P \cup (-P) = R$ (см. [55], с. 301; [91], § VI. 1, VI. 2).

Гомоморфизм φ частично упорядоченного кольца R в частично упорядоченное кольцо R' называется *порядковым гомоморфизмом* или *о-гомоморфизмом*, если $x \leqslant y$, где $x, y \in R$, влечет $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Если φ является изоморфизмом как колец, так и частично упорядоченных множеств, то он называется *порядковым изоморфизмом*. Частично упорядоченные кольца R и R' называются *изоморфными*, если существует порядковый изоморфизм R на R' (а значит, и R' на R). Если φ: $R \to R'$ — порядковый гомоморфизм, то $\operatorname{Ker} \varphi$ оказывается выпуклым (как подмножество частично упорядоченного множества) двусторонним идеалом кольца R. Факторкольцо R/I по выпуклому двустороннему идеалу I становится частично упорядоченным кольцом, если положить $x + I \leqslant y + I$ в случае, когда $x \leqslant y$ в R. Таким образом, всякий выпуклый двусторонний идеал частично упорядоченного кольца является ядром некоторого порядкового гомоморфизма.

Частично упорядоченное кольцо R называется *архимедовым*, если для любых $a, b \in R$ справедлива импликация

$$(\forall n \in \mathbf{Z} \ \ na < b) \Rightarrow a = 0.$$

Всякое архимедово линейно упорядоченное кольцо ассоциативно и коммутативно. Более того, оно или является подгруппой аддитивной группы действительных чисел с нулевым умножением или изоморфно некоторому подкольцу поля действительных чисел с естественным порядком. При этом во втором случае частично упорядоченное кольцо не допускает порядковых автоморфизмов, отличных от тождественного ([55], с. 314; [91], § VIII. 1).

Если I — минимальный выпуклый двусторонний идеал ассоциативного линейно упорядоченного кольца R и $I^2 \neq 0$, то R не содержит нетривиальных вы-

пуклых двусторонних идеалов. Более того, при этих условиях в R нет и односторонних выпуклых идеалов ([91], § VIII. 4).

Скажем, что кольцо R *линейно упорядочиваемо*, если на R можно определить линейный порядок, превращающий его в линейно упорядоченное кольцо. Для линейной упорядочиваемости кольца необходимо и достаточно, чтобы линейно упорядочиваемыми были все его конечно порожденные подкольца. Кольцо без делителей нуля линейно упорядочиваемо в том и только том случае, когда всякая сумма четных произведений его элементов отлична от нуля.

Для ассоциативно-коммутативного кольца это равносильно необращению в нуль любой суммы квадратов ненулевых элементов. Среди классически полупростых колец линейно упорядочиваемыми оказываются тела, в которых -1 не может быть представлена как сумма квадратов, и только они. Такие тела называются *формально действительными* ([55], с. 302, 305; [91], § VII. 1, VII. 2). О формально действительных полях см. [91], § VII. 3.

Положительный конус P частично упорядоченного тела D представляется как пересечение положительных конусов, определяющих линейные порядки (в этом случае говорят, что порядок на D является *пересечением линейных порядков*), в том и только том случае, когда P содержит все произведения любых квадратов из R (см. [91], § VII. 4). Общий критерий продолжаемости порядка частично упорядоченного кольца до линейного дан в [91], § VII. 1.

Частично упорядоченное кольцо R называется *решеточно упорядоченным* или *структурно упорядоченным*, если частично упорядоченное множество R является решеткой. Если R — решеточно упорядоченное кольцо с решеточными операциями $\vee$ и $\wedge$, то оно обладает следующими свойствами: 1) $(a \vee b) + c = (a + c) \vee \vee (b + c)$; 2) $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$; 3) $-(a \vee b) = = (-a) \wedge (-b)$; 4) $-(a \wedge b) = (-a) \wedge (-b)$; 5) $(a \vee b) + + (a \wedge b) = a + b$; 6) если $c \geqslant 0$, то $(a \vee b) c \geqslant ac \vee bc$, $c(a \vee b) \geqslant ca \vee cb$, $(a \wedge b) c \leqslant ac \wedge bc$ и $c(a \wedge b) \leqslant \leqslant ca \wedge cb$. Эти соотношения могут быть приняты и за определение решеточно упорядоченного кольца. Таким образом, на решеточно упорядоченные кольца можно смотреть как на универсальные алгебры сиг-

натуры $(+, -, 0, \cdot, \vee, \wedge)$. Более того, поскольку свойство 6) равносильно равенствам

$$((a \vee b)(c \vee 0)) \vee ((a(c \vee 0)) \vee (b(c \vee 0)) = (a \vee b)(c \vee 0),$$

$$((c \vee 0)(a \vee b)) \vee (((c \vee 0)a) \vee ((c \vee 0)b)) = (c \vee 0)(a \vee b),$$

$$((a \wedge b)(c \vee 0)) \wedge ((a(c \vee 0)) \wedge (b(c \vee 0))) = (a \wedge b)(c \vee 0)$$

и

$$((c \vee 0)(a \wedge b) \wedge (((c \vee 0)a) \wedge ((c \vee 0)b)) = (c \vee 0)(a \wedge b),$$

то решеточно упорядоченные кольца образуют многообразие этой сигнатуры.

Если R — решеточно упорядоченное кольцо и $a \in R$, то элементы $a^+ = a \vee 0$, $a^- = a \wedge 0$ и $|a| = a \vee (-a)$ называются *положительной частью*, *отрицательной частью* и *модулем* элемента a соответственно. Справедливы следующие соотношения: 1) $a = a^+ + a^-$; 2) $|a| = a^+ - a^-$; 3) $a^+ \wedge (-a^-) = 0$; 4) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$; 5) $|ab| \leqslant |a|\,|b|$; 6) $-|a|\,|b| \leqslant ab$. Двусторонний идеал решеточно упорядоченного кольца R, являющийся выпуклой подрешеткой решетки R, называется *L-идеалом*. Конгруэнции решеточно упорядоченного кольца суть разбиения по L-идеалам. Сумма и пересечение двух L-идеалов снова являются L-идеалами. Если I и J — два L-идеала кольца R, то их *L-произведением* называется множество.

$$\{x \mid x \in R,\ |x| \leqslant |a||b| \text{ для некоторых } a \in I \text{ и } b \in J\}$$

([91], гл. IX, § 1). О радикалах решеточно упорядоченных колец см. [91], § IX. 3, а об их структурных пространствах — [114], гл. 8—10.

Функциональным кольцом (а также *f-кольцом* или *F-кольцом*) называется подкольцо прямого произведения линейно упорядоченных колец, являющееся подрешеткой этого произведения. Ясно, что функциональное кольцо решеточно упорядочено. Функциональные кольца обладают следующими свойствами: 1) $(a \vee b)c = ac \vee bc$; 2) $c(a \vee b) = ca \vee cb$; 3) $(a \wedge b)c = ac \wedge bc$; 4) $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$; 5) $|ab| = |a||b|$; 6) $a^2 \geqslant 0$;

7) если $a \wedge b = 0$, то $ab = 0$. Последнее условие показывает, что функциональное кольцо без делителей нуля линейно упорядочено. Эквивалентны следующие свойства решеточно упорядоченного кольца R: (1) R функционально; (2) если $c \geqslant 0$ и $a \wedge b = 0$, то $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$; (3) если $c \geqslant 0$, то множество $X^* = \{y \mid y \in R,\ x \wedge y = 0$ для всех $x \in X\}$ оказывается L-идеалом кольца R; (4) $((b \vee 0)(a \vee 0)) \wedge ((-a) \vee 0) = (a \vee 0)(b \vee 0) \wedge ((-a) \vee 0) = 0$. Последнее свойство показывает, что функциональные кольца образуют подмногообразие многообразия решеточно упорядоченных колец. Архимедово функциональное кольцо ассоциативно и коммутативно ([91], гл. IX, § 2).

О частично упорядоченных алгебрах Ли и йордановых алгебрах см. [5] и [50] соответственно. Частично упорядоченные алгебры как основа некоммутативной или квантовой теории вероятностей рассмотрены в [80].

5.4. Кольца с инволюцией. Отображение * кольца R в себя называется *инволюцией*, если $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^*a^*$ и $a^{**} = a$ для любых $a, b \in R$. Если R коммутативно, то его тождественное отображение на себя оказывается инволюцией, которая называется *тривиальной*. Если R — кольцо матриц второго порядка над коммутативным кольцом, то равенство $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & c \end{pmatrix}$ определяет инволюцию, которая называется *симплектической*. Если $R = A \times B$ и σ — антиавтоморфизм кольца A на B, то *перестановочной инволюцией* называется инволюция, определяемая равенством $(a, b)^* = (\sigma^{-1}(b), \sigma(a))$.

Другие примеры. 1) R — поле комплексных чисел и $(\alpha + \beta i)^* = \alpha - \beta i$; 2) R — тело кватернионов и $(\alpha + \beta i + \gamma i + \delta k)^* = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$; 3) R — кольцо матриц над коммутативным кольцом и A^* получается из матрицы A транспонированием. Групповое кольцо RG, где R — кольцо с инволюцией $^-$ и $\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)^* = \sum_{g \in G} \bar{\lambda}_g g^{-1}$.

Ассоциативное кольцо, на котором зафиксирована некоторая инволюция $*$, называется *кольцом с инволюцией*. Алгебра R над коммутативным кольцом Φ с единицей называется *алгеброй с инволюцией*, если R — кольцо с инволюцией и $(\lambda a)^* = \lambda a^*$ для любых $\lambda \in \Phi$ и $a \in R$. Гомоморфизм φ кольца R с инволю-

цией в кольцо R' с инволюцией называется *$*$-гомоморфизмом*, если $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ для любого $a \in R$. Под *$*$-изоморфизмом* понимается $*$-гомоморфизм, являющийся изоморфизмом колец. Двусторонний идеал I кольца R с инволюцией оказывается ядром некоторого $*$-гомоморфизма тогда и только тогда, когда $x^* \in I$ для каждого $x \in I$. Факторкольцо по такому идеалу естественным образом превращается в кольцо с инволюцией, причем естественный гомоморфизм оказывается $*$-гомоморфизмом. Высказанному выше условию удовлетворяет радикал Джекобсона кольца R.

Элемент a из кольца R с инволюцией называется *симметрическим* [*кососимметрическим* (skew)], если $a^* = a$ [$a^* = -a$]. *Следом* [*косым следом*] называется элемент вида $a + a^*$ [вида $a - a^*$]. Всякий след [косой след] является симметрическим [кососимметрическим] элементом.

Совокупность $\mathfrak{S}$ всех симметрических элементов кольца R с инволюцией оказывается йордановым кольцом относительно операции $a \circ b = ab + ba$. Если R — простое кольцо и $2R = R$, то йорданово кольцо $\mathfrak{S}$ также оказывается простым. Если R — конечно порожденная алгебра с инволюцией над коммутативным кольцом Φ с единицей и $1/2 \in \Phi$, то $\mathfrak{S}$ оказывается конечно порожденной Φ-алгеброй (см. [172], следствия на с. 57 и 72, теорема 6.6.1).

Отображение φ множества $\mathfrak{S}$ в кольцо R' с инволюцией называется *J-гомоморфизмом*, если $\varphi(s^2) = (\varphi(s))^2$ и $(\varphi(sts) = \varphi(s)\varphi(t)\varphi(s)$ для любых $s, t \in \mathfrak{S}$. Гомоморфизм йорданова кольца $\mathfrak{S}$ в йорданово кольцо $\mathfrak{S}'$ симметрических элементов кольца R' с инволюцией оказывается J-гомоморфизмом, но не наоборот. При некоторых условиях J-гомоморфизм может быть продолжен до гомоморфизма кольца R в R' (см. [172], теорема 4.2.2).

Если R — кольцо с инволюцией, то обозначим через S и C подкольца этого кольца, порожденные всеми его симметрическими и кососимметрическими элементами соответственно. Каждое из следующих свойств кольца R наследуется кольцом S: 1) отсутствие ниль-идеалов; 2) отсутствие локально нильпотентных идеалов; 3) обращение в нуль радикала Джекобсона; 4) быть полупервичным правым [левым] кольцом

Голди. Кольцо C оказывается полупервичным или не содержит ниль-идеалов, если соответствующим свойством обладает кольцо R. Из алгебраичности или локальной конечности кольца S вытекает справедливость соответствующего свойства для кольца R (см. [172], теоремы 6.5.4—6.5.8). Если $R = C$ и $R = 2R$, то любой элемент a из R представим в виде

$$a = c + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 - \sum_{j=1}^{n} d_j^2,$$

где c, c_i, d_j — кососимметрические элементы (см. [172], теорема 2.1.11). Если R — простое кольцо с инволюцией, размерность которого над центром больше 4, то $R = S$ (см. [172], теорема 2.1.6).

Кольцо R с инволюцией называется *полунормальным*, если $xx^* = 0$ влечет $x^*x = 0$ для любого $x \in R$, и *нормальным*, если $xx^* = x^*x$ для всех $x \in R$. Если $xx^* = 0$ влечет $x = 0$ для каждого $x \in R$, то инволюция называется *положительной* или *положительно определенной* (а также proper involution). Для полунормальности некоммутативного кольца R с инволюцией, не содержащего ненулевых правых ниль-идеалов, в котором каждый след [каждый косой след] или нильпотентен или не является делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы R являлось порядком в кольце матриц второго порядка с симплектической инволюцией или подпрямым произведением некоторого кольца и кольца, антиизоморфного ему, с перестановочной инволюцией (см. [172], с. 103, теорема 2.5.3). В кольце R с положительной инволюцией равносильны следующие свойства элементов x и y: (1) $xy = 0$; (2) $x^*xy = 0$; (3) $x^*xRy = 0$ (см. [104], с. 10, предложение 1; с. 11, упр. 3А.

Если R — простое кольцо с инволюцией, не совпадающее со своим радикалом Джекобсона, и все следы или все косые следы из R нильпотентны или обратимы, то R оказывается телом или кольцом матриц второго порядка над полем с симплектической инволюцией. К этому списку добавляется прямая сумма двух антиизоморфных тел с перестановочной инволюцией, если R — полупервичное кольцо с инволюцией, в котором обратимы все ненулевые симметрические элементы или все ненулевые следы. То же самое имеет место,

если R некоммутативно и все его ненулевые косые следы обратимы. К приведенному списку присоединяются коммутативные кольца с тривиальной инволюцией, если радикал Джекобсона кольца R с инволюцией равен нулю, а каждый его след [косой след] обратим или нильпотентен. Если в первичном кольце R с инволюцией все следы или все косые следы нильпотентны, то R или является порядком в кольце матриц над полем с симплектической инволюцией, или же его инволюция положительна (см. [172], теоремы 2.3.3, 2.1.7, 2.1.8, 2.3.1, 2.3.4 и 2.2.4, а также следствие последней). В [172] и [10] содержатся и другие результаты, касающиеся строения первичных и полупервичных колец с инволюцией.

Если D — тело с инволюцией, Z — его центр, $2D=D$ и D' — такое подтело тела D, что $u^*D'u \subseteq D'$ для любого *унитарного* $u \in D$ (т. е. $uu^* = u^*u = 1$), то $D' \subseteq Z$, если D' коммутативно и $\dim_Z D > 4$, и $D' = D$, если D' не коммутативно и $\dim_Z D > 16$ (см. [172], теорема 6.1.1).

Если F — свободная ассоциативная алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ и и $0 \neq f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in F$, то говорят, что Φ-алгебра R с инволюцией удовлетворяет *$*$-полиномиальному тождеству* $f = 0$, если $f(a_1, \ldots, a_m, b_1^*, \ldots$ $\ldots, b_n^*) = 0$ для любых $a_i, b_j \in R$. Если кольцо R с инволюцией, рассматриваемое как алгебра над $\mathbf{Z}$, удовлетворяет $*$-полиномиальному тождеству степени d, то для подходящего $m \geqslant 1$ кольц R удовлетворяет полиномиальному тождеству $(S_{2d})^m$, где S_{2d} — стандартный полином степени $2d$. Если при этом радикал Джекобсона кольца R равен нулю, то это верно и для $m = 1$. Если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой элемент свободной ассоциативной $\mathbf{Z}$-алгебры G, R — кольцо с инволюцией и $f(d_1, \ldots, d_n) = 0$ для любых симметрических [кососимметрических] элементов d_i из R, то для некоторого $m \geqslant 1$ кольцо R удовлетворяет тождеству $(S_{2d})^m = 0$, где d — степень полинома f. При этом, если R полупервично, то можно взять $m = 1$ (см. [172], следствие 1 на с. 194, теоремы 6.5.1 и 6.5.2; см. также [10], п. 8.24).

Элемент e кольца R с инволюцией называется *проекцией*, если $e^2 = e = e^*$. На множестве проекций

можно определить частичный порядок, положив $e \leqslant f$, если $e = ef$ или, что равносильно, $e = fe$. Элемент $w \in R$ называется *частичной изометрией*, что $ww^*w = w$.

Кольцо R с инволюцией называется *$*$-риккартовым*, если для любого $a \in R$ найдется такая проекция e, что

$$eR = r(a) \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in R,\ ax = 0\}.$$

Проекция e определяется однозначно. Она называется *правой проекцией элемента a* и обозначается через $rP(a)$. Нетрудно заметить, что в $*$-риккартовом кольце для любого $a \in R$ существует такая однозначно определенная проекция f, что

$$Rf = l(a) \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in R,\ xa = 0\}.$$

Эта проекция называется *левой проекцией элемента a* и обозначается через $lP(a)$. Всякое $*$-риккартово кольцо содержит единицу и его инволюция положительна. Если $a \in R$, то $lP(a) = rP(a^*)$. Если $a, b \in R$ и $ab = 0$, то $rP(a) \cdot lP(a) = 0$. Если w — частичная изометрия из R, то $w^*w = rP(w)$ и $ww^* = lP(w)$. Проекция $*$-риккартова кольца образуют решетку, причем $e \vee f = f + rP(e(1-f))$ и $e \wedge f = e - lP(e(1-f))$ для любой пары проекций e и f. Если e — проекция из R, то eRe является $*$-риккартовым кольцом. Центр $*$-риккартова кольца оказывается $*$-риккартовым кольцом, причем как левая, так и правая проекции центрального элемента лежат в центре ([104], § 1.3).

Кольцо R с инволюцией называется *$*$-бэровским*, если для любого непустого подмножества $A \subseteq R$ найдется такая проекция e, что

$$eR = r(A) \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in R,\ Ax = 0\}.$$

Отсюда вытекает существование такой проекции f, что

$$Rf = l(A) \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in R,\ xA = 0\}.$$

Эквивалентны следующие свойства кольца R с инволюцией: (1) кольцо R $*$-бэровское; (2) R есть $*$-риккартово кольцо, решетка проекций которого полна; (3) R есть $*$-риккартово кольцо, любая ортогональная система проекций которого имеет точную верхнюю

грань. Если $\varnothing \neq A \subseteq R$, где R есть $*$-бэровское кольцо, то $r(A) = (1 - g)R$, где $g = \sup\{rP(a) \mid a \in A\}$ (см. [104], § I. 4).

Детальному изучению $*$-бэровских колец посвящена монография [104]. См. также [182].

Регулярное кольцо с положительной инволюцией называется *$*$-регулярным*. Каждый главный правый [левый] идеал $*$-регулярного кольца R порождается однозначно определенной проекцией. Любое $*$-регулярное кольцо является $*$-риккартовым, а если решетка его главных левых [правых] идеалов полна, то и $*$-бэровским. Отображение, ставящее в соответствие каждой проекции e проекцию $1 - e$, оказывается антиавтоморфизмом решетки проекций. Если e — проекция, то eRe является $*$-регулярным кольцом. Если решетка проекций $*$-регулярного кольца R полна, то R не содержит бесконечных ортогональных систем попарно эквивалентных проекций (проекции e и f называются *эквивалентными*, если найдутся $u \in eRf$ и $v \in fRe$ такие, что $e = uv$ и $f = vu$), а его проекции образуют непрерывную геометрию ([84], § 8; см. также п. V. 2.3). Для первичности $*$-регулярного кольца необходимо и достаточно, чтобы 0 и 1 были единственными его центральными идемпотентами ([84], с. 183).

Об инволюциях в кольцах операторов гильбертова пространства см. [27], [75], а об эрмитовых формах на модулях над кольцами с инволюцией — [67], приложение 2.

5.5. Другие дополнительные структуры. Кольцо, на котором зафиксировано некоторое множество $\mathfrak{D}$ дифференцирований, называется *дифференциальным*. Обычно предполагается, что $d_1 d_2 = d_2 d_1$ для любых $d_1, d_2 \in \mathfrak{D}$. Двусторонний идеал I такого кольца называется *дифференциальным*, если $d(x) \in I$ при любом $x \in I$ и $d \in \mathfrak{D}$. Гомоморфизм [изоморфизм] φ дифференциального кольца R в [на] дифференциальное кольцо R' с тем же набором дифференцирований $\mathfrak{D}$ называется *дифференциальным*, если $\varphi(d(x)) = d(\varphi(x))$ для любых $d \in \mathfrak{D}$ и $x \in R$. Дифференциальные кольца называются *изоморфными*, если существует дифференциальный изоморфизм одного из них на другое. Если φ: $R \to R'$ — дифференциальный гомоморфизм, то $\operatorname{Ker} \varphi$ оказывается дифференциальным идеалом. Факторкольцо R/I, где I — дифференциаль-

ный идеал, становится дифференциальным кольцом, если положить $d(x+I)=d(x)+I$ для любых $x \in R$ и $d \in \mathfrak{D}$. Дифференциальное кольцо R называется *дифференциально простым*, если $\{0\}$ и R являются единственными его дифференциальными идеалами. Дифференциально простое кольцо (не обязательно ассоциативное), содержащее минимальный двусторонний идеал, или просто, или изоморфно групповому кольцу элементарной абелевой p-группы над простым кольцом характеристики p (Block P. E.//Ann. Math. — 1969. — V. 90, N 3. — P. 433—459; см. также [93], § 6).

Элемент a дифференциального кольца R называется *константой*, если $d(a)=0$ для любого дифференцирования d. Константы образуют подкольцо кольца R, содержащее его единицу, если она существует. Если R — ассоциативно-коммутативное дифференциальное кольцо с одним дифференцированием $'$ и $\bar{R}=R[x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, \ldots]$ — кольцо многочленов над R от $x, x', x'', \ldots$, то $\bar{R}$ становится дифференциальным кольцом, если, сохранив дифференцирование, имевшееся в R, дополнительно положить $(x^{(n)})'=x^{(n+1)}$ для любого $n \geqslant 0$. Полученное таким образом дифференциальное кольцо называется *кольцом дифференциальных многочленов от* x. Это определение легко распространяется на случай многих переменных и многих дифференцирований.

О кольцах частных дифференциальных колец см. [93], § 6. Различные аспекты теории дифференциальных колец отражены в обзоре [68]. Наиболее развита теория дифференциальных полей (см. [42]; [191], § 2; [192], [207], [236], [246]).

Пару (R, G), где R — ассоциативное кольцо, а G — подгруппа группы автоморфизмов кольца R, назовем *G-кольцом* или *кольцом с группой* G. Если G не содержит внутренних автоморфизмов, отличных от тождественного, то G-кольцо называется *внешним*. Элемент a из R называется *G-инвариантным*, если $g(a)=a$ для всех $g \in R$. Множество R^G всех G-инвариантных элементов кольца R оказывается подкольцом. Подмножество $X \subseteq R$ назовем *G-инвариантным*, если $g(x) \in X$ для любых $g \in G$ и $x \in X$. Особое внимание было уделено случаю, когда G — конечная группа и число $|G|$ обратимо в R. Оказалось, что при этих

предположениях справедливость тех или иных свойств для кольца R^G влечет их выполнение в кольце R. К числу таких свойств относятся: 1) нильпотентность; 2) полупервичность; 3) удовлетворять левому [правому] условию Оре; 4) примитивность всех первичных двусторонних идеалов; 5) быть PI-кольцом. Если R полупервично, то к этому списку можно присоединить: 6) быть классически полупростым кольцом; 7) быть левым [правым] кольцом Голди; 8) левая [правая] нётеровость; 9) разлагаться в конечную прямую сумму простых колец. При тех же ограничениях на группу G кольцо R оказывается артиновым [нётеровым] слева тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию минимальности [максимальности] для G-инвариантных левых идеалов кольца R. Аналогичный результат справедлив для правых и двусторонних идеалов. Если R — конечная прямая сумма простых колец, то то же самое верно и для кольца R^G. Если G — конечная группа, действующая на кольце R, содержащем нильпотентные элементы, I — ненулевой идеал кольца R (правый или левый) и $g(I)\subseteq I$ для всех $g\in G$, то $I^G\neq\{0\}$. Если J — радикал Джекобсона кольца R, то $|G|J(R^G)\subseteq J(R)\cap R^G\subseteq J(R^G)$. Включения превращаются в равенства, если $|G|$ обратимо в R (см. [93], § 2; [208], § 10.5; [216], гл. 5—7; [233], §§ 27, 28; см. также [146]).

В ряде случаев между подгруппами G группы автоморфизмов кольца R и подкольцами R^G можно установить соответствие Галуа (см. [93], § 1; [148], [216]). Можно рассматривать *G-тождества* или *тождества с автоморфизмами*, полученные включением в сигнатуру элементов группы (см. [93], § 3; [216], гл. 3).

Кольцо R^G довольно тесно связано с косым групповым кольцом $R*G$. Например, если R — первичное [полупервичное] внешнее G-кольцо и G конечна, то как R^G, так и $R*G$ первично [полупервично]. Кольцо $R*G$, где G — конечна, оказывается полупервичным и в случае, когда R первично и $|G|r=0$, где $r\in R$, влечет $r=0$. Если R — простое внешнее G-кольцо с единицей и G конечна, то эквивалентны следующие утверждения: (1) R^G — простое кольцо; (2) R — кообразующий правый [левый] R^G-модуль; (3) R — проективный правый [левый] R^G-модуль; (4) R^G и $R*G$ эк-

вивалентны в смысле Мориты (см. [208], теорема 10.5.11, [216], теоремы 3.17 и 2.5).

Разностным кольцом называется кольцо R с зафиксированным изоморфизмом Δ кольца R на его подкольцо S. Изоморфизм Δ называется *преобразующим оператором* (transforming operator). Гомоморфизм φ разностного кольца R с преобразующим оператором Δ в разностное кольцо R' с преобразующим оператором Δ называется *разностным*, если $\varphi(\Delta(a))=\Delta'(\varphi(a))$ для всех $a\in R$. *Разностный изоморфизм* — это взаимно однозначный разностный гомоморфизм. Идеал I разностного кольца R называется *разностным*, если $x\in I$ влечет $\Delta(x)\in I$. Если, кроме того, $\Delta(x)\in I$ влечет $x\in I$, то идеал I называется *рефлексивным*. Ядрами разностных гомоморфизмов служат рефлексивные идеалы и только они. В качестве примера разностного кольца можно указать кольцо многочленов $P[t]$ над полем P, где $\Delta(f(t))=f(t^2)$ для всех $f(t)\in\in P[t]$. Совокупность многочленов без свободного члена является его рефлексивным идеалом. Коммутативным разностным кольцам (впрочем, в основном разностным полям) посвящена монография [133] (см. также [68]).

Пусть G — аддитивно записанная группа (не обязательно абелева). Кольцо R с единицей называется *G-градуированным* или *градуированным по группе G*, если аддитивная группа кольца R разложена в прямую сумму $\sum\limits_{g\in G}^{\oplus} R_g$, причем $1\in R_0$ и $R_gR_h\subseteq R_{g+h}$ при любых $g,h\in G$. Если R есть G-градуированное кольцо, а A — левый R-модуль, причем $A=\sum\limits_{g\in G}^{\oplus} A_g$ и $R_gA_h\subseteq A_{g+h}$ для любых $g,h\in G$, то A называется *G-градуированным R-модулем*. Градуировка кольца R [модуля A] называется *строгой*, если $R_gR_h=R_{g+h}$ [$R_gA_h=A_{g+h}$] для любых $g,h\in G$. Градуированное по группе G кольцо R оказывается строго градуированным тогда и только тогда, когда строго градуированы все G-градуированные левые R-модули. Элементы из R_g и A_g, где $g\in G$, называются *однородными элементами степени g*, а сами подгруппы R_g и A_g — *однородными компонентами* кольца R и модуля A соответственно. Кольцо или модуль, градуированные по группе $\mathbf{Z}$, называют просто *градуированными*. Если

при этом все компоненты R_n (соответственно A_n), где $n<0$, обращаются в нуль, то градуировка называется *положительной.*

Примеры. 1) $R=KG$ — групповое кольцо и $R_g=Kg$ для всех $g\in G$; 2) $R=K[x_1,\ldots,x_n]$ — кольцо многочленов, R_n — множество всех многочленов степени n (это положительная градуировка); 3) G — группа вычетов по модулю 2, S — группа подстановок на множестве $\{1,\ldots,n\}$, $R_0=\left\{\sum\lambda_\sigma\sigma\,\middle|\,\lambda_\sigma\in K,\right.$ σ — четные подстановки$\Big\}$, $R_1=\Big\{\sum\lambda_\tau\tau\,\Big|\,\lambda_\tau\in K,$ τ — нечетные подстановки$\Big\}$.

Градуированное по типу G кольцо D назовем *градуированным телом*, если обратимы все ненулевые однородные элементы. При этом компонента D_0 оказывается телом. Кроме того, если $G=\mathbf{Z}$, то или $D_n=0$ при всех $n\neq0$ или $D=D_0[x,y]/I$, где идеал I порождается элементами $xy-1$, $yx-1$ и $\lambda x-x\varphi(\lambda)$, $\lambda\in D_0$, а φ — фиксированный автоморфизм тела D_0.

Подмодуль B G-градуированного модуля A называется *градуированным*, если $B=\sum\limits_{g\in G}^{\oplus}A_g\cap B$. Если A и B — градуированные левые R-модули, то гомоморфизм φ модуля A в модуль B называется *градуированным степени* d, где $d\in G$, если $\varphi(A_g)\subseteq B_{g+d}$ для всех $g\in G$. Ясно, что ядрами градуированных гомоморфизмов служат градуированные подмодули. Градуированные гомоморфизмы степени d образуют подгруппу $\mathrm{HOM}_R^{(d)}(A,B)$ группы $\mathrm{Hom}_R(A,B)$, а совокупность $\mathrm{HOM}_R(A,B)$ всех градуированных гомоморфизмом оказывается G-градуированной абелевой группой, где $\mathrm{HOM}_R(A,B)=\sum\limits_{d\in R}^{\oplus}\mathrm{HOM}_R^{(d)}(A,B)$. Если группа G конечна или A как обычный R-модуль конечно порожден, то $\mathrm{HOM}_R(A,B)=\mathrm{Hom}_R(A,B)$. Если в определениях проективного и инъективного модулей вместо обычных гомоморфизмов рассматривать градуированные, то придем к определению *градуированных проективного* и *инъективного модулей.* Оказывается, что всякий градуированный проективный [инъективный] модуль проективен [инъективен] как обычный модуль. Для проективных модулей верно и обратное. Однако для инъективных модулей это не всегда так. Среди других градуированных аналогов теоретико-кольцевых и теоретико-модульных результатов отметим градуи-

рованные кольца частных, градуированный радикал Джекобсона (включая теорему плотности), размерность Крулля для колец, градуированные регулярные кольца, а также аналоги ряда результатов, относящихся к коммутативной алгебре. Отметим, что $\mathbf{Z}$-градуированный модуль удовлетворяет условию максимальности для градуированных подмодулей тогда и только тогда, когда он нётеров.

Градуированным кольцам и модулям посвящена монография [222] (см. также [59], [185], [196], [221], [223]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю М. Радикалы алгебр и структурная теория — М.: Наука, 1979.
2. Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Главацкий С. Т., Михалёв А. В. Конструкции топологических колец. — Кишинёв: Штиинца, 1988.
3. Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Михалёв А. В. Введение в теорию топологических колец и модулей. — Кишинёв, Штиинца, 1981.
4. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972.
5. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. — Ташкент: Фан, 1986.
6. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.
7. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 117—240.
8. Бахтурин Ю. А., Слинько А. М., Шестаков И. П. Неассоциативные кольца//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1981. — С. 3—72.
9 Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалёв А. В., Скорняков Л. А. Ассоциативные кольца// Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 22. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 3—116.
10. Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы//Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.
11. Беккер И. Х., Кожухов С. Ф. Автоморфизмы абелевых групп без кручения. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988.
12. Бовди А. А. Групповые кольца. — Ужгород: Изд-во Ужгород. ун-та, 1974.
13. Бокуть Л. А. Ассоциативные кольца. Т. 1. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977; Т. 2. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1981.
14. Бокуть Л. А. Вложение колец//Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 87—111.
15. Бокуть Л. А., Кукин Г. П. Неразрешимые алгоритмические проблемы для полугрупп, групп и колец//Итоги

науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия. — Т. 25— М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 3—66.
16. Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К. Некоммутативные кольца//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 5—116.
17. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — гл. I—III. — М.: Мир, 1976; гл. IV—VI. — М.: Мир, 1972; гл. VII—VIII. — М.: Мир, 1978; гл. IX. — М.: Мир, 1986.
18. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.
19. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. — М.: Мир, 1971.
20. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1958.—(Пер. с 3-го фр. изд. *): М.: Наука 1968).
21. Бурбаки Н. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Физматгиз, 1958.
22. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. — М.: Наука, 1975.
23. Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. — М.: Наука, 1965.
24. Бурбаки Н. Алгебра. Гомологическая алгебра. — М.: Наука, 1987.
25. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.
26. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
27. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1960.
28. Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. — М.: Мир, 1981.
29. Даунс Дж., Гофман К. Представление бирегулярных колец пучками. — Математика/Сб. пер. — 1968.—Т. 12, № 4.— С. 3—24.
30. Джекобсон Н. Теория колец. — М.: ИЛ, 1947.
31. Джекобсон Н. Строение колец. — М.: ИЛ, 1961.
32. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.
33. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.
34. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. — Киев. Вища школа, 1980.
35. Елизаров В. П. Кольца частных//Алгебра и логика. — 1969. — Т. 8, № 4. — С. 381—424.
36. Елизаров В. П. Конечные кольца. — М., 1986.
37. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
38. Залесский А. Е. Линейные группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 21. — М.: ВИНИТИ, 1983. — С. 135—182.
39. Залесский А. Е., Михалёв А. В. Групповые кольца// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 2. — М.: ВИНИТИ, 1973. — С. 5—118.

*) В это издание вошли только две главы из трех глав 1-го издания, поэтому ссылки делаются на 1-е издание.

40. Зарисский О., Самюэль Н. Коммутативная алгебра. Т. 1—2. — М.: ИЛ, 1963.
41. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. — М.: Наука, 1973.
42. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959.
43. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. — М.: Мир, 1974.
44. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.
45. Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.
46. Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинёв: Штиинца, 1983.
47. Кириченко В. В. Кольца и модули. — Киев: Изд-во КГУ, 1981.
48. Кириченко В. В., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Введение в теорию колец и модулей. — Киев: Вища школа. В печати.
49. Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.
50. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
51. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
52. Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1987.
53. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979.
54. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.
55. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
56. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
57. Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.
58. Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Сложность алгебраических алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
59. Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
60. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
61. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. — М.: Мир, 1988.
62. Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.
63. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.
64. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. 1. Классическая алгебра. — М.: Наука, 1976.
65. Марков В. Т., Михалёв А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Модули//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 19. — М.: ВИНИТИ, 1981. — С. 31—134.
66. Марков В. Т., Михалёв А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 21. — М.: ВИНИТИ, 1983. — С. 183—254.
67. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. — М.: Наука, 1986.

68. Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Дифференциальная и разностная алгебра//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 25. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 67—139.
69. Мишина А. П. Абелевы группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — М.: ВИНИТИ, 1967. — с. 9—44.
70. Мишина А. П. Абелевы группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — М.: ВИНИТИ, 1972. — С. 5—45.
71. Мишина А. П. Абелевы группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 17. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 3—63.
72. Мишина А. П. Абелевы группы//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. — Т. 23. — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 51—101.
73. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. — М.: Наука, 1969.
74. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Abelian groups and modules.—Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1976.
75. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
76. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.
77. Понизовский П. С. Semigroup rings//Semigroup Forum. — 1987. — V. 36, N 1. — P. 1—46.
78. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М., Наука, 1984.
79. Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.
80. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры. — Ташкент: Фан, 1983.
81. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
82. Скляренко Е. Г. Относительная гомологическая алгебра в категории модулей//Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 3. — С. 85—120.
83. Скорняков Л. А. Проективные плоскости//Успехи мат. наук. — 1951, Т. 4, № 6. — С. 112—154.
84. Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М.: Физматгиз, 1961.
85. Скорняков Л. А. Гомологическая классификация колец//Мат. вестник. — 1967. — Т. 4, № 4. — С. 415—434.
86. Скорняков Л. А. Лекции по гомологической алгебра//Мат. вестник. — 1968. — Т. 5, № 1. — С. 71—113.
87. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.
88. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. — М.: Наука, 1986.
89. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
90. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — Т. I. — М.: Мир, 1977; Т. II. — М.: Мир, 1979.
91. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
92. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. — М.: Мир, 1974; Т. II. — М.: Мир, 1977.

93. Харченко В. К. Действия групп и алгебр Ли на некоммутативных кольцах//Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 2. — С. 67—90.
94. Харченко В. К. Автоморфизмы и дифференцирования ассоциативных колец. — Новосибирск, 1989.
95. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
96. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.
97. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 3. — М.: Мир, 1958.
98. Ширшов А. И. Избранные труды. Кольца и алгебры. — М.: Наука, 1984.
99. Эклоф П. Теоретико-множественные методы в гомологической алгебре и теории абелевых групп. — М.: Мир, 1986.
100. Abian A. Boolean rings. — Boston: Branded Press, 1976.
101. Albert A. A. Structure of algebras. — Provindence, RI: Amer. Math. Soc., 1961. — 210 p.
102. Albu T., Nastasescu C. Relative finiteness in module theory. — New York: Decker, 1984. — 190 p.
103. Amitsur S. A. Polinomial identities//Isr. J. Math.— 1974.— V. 19, N 1—2. — P. 183—189.
104. Amitsur S. A. Division algebras. A survey. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1982. — P. 3—26. — (Contemp. Math. V.13).
105. Anderson F. W., Fuller K. K. Rings and categories of modules. — New York e. a.: Springer, 1973.
106. Arnold D. M. Finite rank torsion free Abelian groups and rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1982. — 191 p. — (Lect. Notes Math. V. 931).
107. Auslander M., Bridger M. Stable module theory//Mem. Amer. Math. Soc. — 1976, N 94. — 146 p.
108. Auslander M., Buchsbaum D. A. Groups, rings, modules. — New York; London: Harper & Row Publ., 1974.
109. Bautista R., Gabriel P., Roiter A. V., Salmeron L. Representation-finite algebras and multiplicative bases//Invent. Math. — 1985. — V. 81, N 2. — P. 217—285.
110. Behrens E.-A. Ring theory. — New York; London: Acad. Press, 1972.
111. Benabdallah K. Groupes abéliens sans torsion. — Montreal: Press Univ. de Montreal, 1981.
112. Berberian S. K. Baer ∗-rings. — Berlin a. o.: Springer, 1972.
113. Bican L., Kepka T., Němec P. Rings, modules and preradicals. — New York; Basel: Marcel Dekker, 1982.
114. Bigard A., Wolfenstein S., Keimel K. Groupes et anneaux réticulés.— Berlin e. a.: Springer, 1977.
115. Blyth T. S. Module theory. An approach to linear algebra. — Oxford, Clarendon Press Oxford Univ. Press, 1977. — 400 p.
116. Bonami L. On the structure of skew group rings. — München: Verlag R. Fischer, 1984.
117. Borceux F., Bossche G. van den. Algebra in a localic topos with applications to ring theory. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1983. — 240 p. — (Lect. Notes. Math. V. 1038).

118. Brandal W. Commutative rings whose finitely generated modules decompose. — Berlin a. o.: Springer, 1979.
119. Braun H., Koecher M. Jordan algebren. — Berlin: Springer, 1966.
120. Brewer J. W. Power series over commutative rings//Lect. Notes in Pure and Appl. Math. — 1981. — V. 64. — 96 p.
121. Brewer J. W., Bunce J. W., Vleck F. S. van. Linear systems over commutative rings. — New York; Basel: M. Dekker, Inc., 1986. — 200 p.
122. Brown K. A. Ore sets in Noetherian rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1985. — P. 355—366. — (Lect. Notes Math. V. 1146).
123. Budach L. Quotientfunktoren und Erweiterungstheorie. — Berlin: Deutsche Verlag der Wiss., 1967.
124. Budach L., Holzapfel R. P. Localizations of Grothendieck categories. — Berlin: Deutsche Verlag der Wiss., 1975.
125. Casteljan P. de. Les quaternions. — Paris: Hermes, 1987. — 190 p.
126. Chatters A. W., Hajarnavis C. R. Rings with chain conditions. — San Francisco a. o.: Pitman, 1980.
127. Cherlin G. Model theoretic algebra. Selected topics. — New York; Heidelberg, Berlin: Springer, 1976. — 236 p. — (Lect. Notes Math. V. 521).
128. Cohn P. M. Skew fields constructions//London Math. Soc. Lect. Notes Ser. — 1977. — N 27. — 253 p.
129. Cohn P. M. Fractions//Bull. London Math. Soc. — 1984. — V. 16, N 6. — P. 561—574.
130. Cohn P. M. Free rings and their relations. — London: Acad. Press., 1985.
131. Cohn P. M. Principles of non-commutative algebraic geometry//Rings and Geom., Dordrecht e. a., 1985, 3—37.
132. Cohn P. M. The construction of valuations on skew fields. — Edmonton: Univ. Alberta, 1986.
133. Cohn R. M. Difference algebra. — New York: Intersci. Publ., 1965.
134. Cozzens J., Faith C. Simple Noetherian rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1975.
135. Curtis C. W., Reiner I. Methods of representation theory. Vol. 2. — New York: J. Wiley, 1987.
136. Dauns J. A concrete approach to division rings. — Berlin: Heldermann Verlag, 1982.
137. Demeyer F., Ingraham E. Separable algebras over commutative rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1981. — 157 p. — (Lect. Notes Math.).
138. Dicks W. Groups, trees and projective modules. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980. — 128 p. — (Lect. Notes Math. V. 790).
139. Divinsky N. Rings and radicals. — Toronto: Univ. Toronto, 1965.
140. Draxl P. K. Skew fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
141. Eklof P. C., Mekler A. Almost free modules. Set-theoretic methods. — North-Holland Math. Library, 1988.
142. Faith C. Algebra. Rings, modules and categoriec. Vol. 1. — Berlin e. a.: Springer, 1981.

143. F a i t h C. Injective modules and injective quotient rings. — New York: M. Dekker, 1982.
144. F a i t h C., P a g e S. FPF ring theory. — Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1984.
145. F e i g e l s t o c k S. Additive groups of rings. — Boston e. a.: Pitman, 1983.
146. F i s h e r J. W. Invariants of finite linear groups acting on relatively free algebras: a survey. Group actions on rings Brunswick, Maine, 1984. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1985. — P. 81—86. — (Contemp. Math. V. 43).
147. F i s h e r J. W., O s t e r b u r g J. Finite group actions on noncommutative rings: a survey since 1970. Ring theory and algebra III conference. — New York; Basel: M. Dekker, 1980. — P. 357—393.
148. F o r m a n e k E. Noncommutative invariant theory. Group actions on rings Brunswick, Maine, 1984. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1985. — P. 87—119. — (Contemp. Math. V. 43).
149. F o s s u m R. M., G r i f f i t h Ph. A., R e i t e n I. Trivial extensions of Abelian categories. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math. V. 456).
150. F u c h s L. Modules over valuation domains. — Essen: Univ. Essen, 1983.
151. G a r c i a - H e r r e r o s M. E. Semitriviale Erweiterungen und generalisierte Matrizenringe. — München: Verlag R. Fischer, 1986.
152. G e r a m i t a A. V., S m a l l Ch. Introduction to homological methods in commutative rings//Queen's Pap. Pure and Appl. Math. 1976. — V. 43. — 352 p.
153. G i l l m a n L., J e r i s o n M. Rings of continuous functions.— Berlin e. a.: Springer, 1976.
154. G i l m e r R. Commutative semigroup rings//Bull. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 12, N 2. — P. 270.
155. G i l m e r R. Property E in commutative monoid rings. — Group and Semigroup rings. Proc. Int. Conf. Johannesburg (7—13 July 1985), Amsterdam e. a., 1986, 13—18.
156. G ö b e l R., Endomorphism rings of Abelian groups. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1983. — P. 340—353. — (Lect. Notes Math. V. 1006).
157. G o l a n J. S. Localization of noncommutative rings. — New York: M. Dekker, 1975.
158. G o l a n J. S. Torsion theories. — New York: J. Wiley & Sons, 1986.
159. G o l a n J. S. Thirty open problems concerning torsion theories. — Murcia: Univ. de Murcia, 1986. — 24 p.
160. G o l a n J. S. Linear topologies on a ring. An overview. Harlow: Longman, 1987, 104 p.
161. G o o d e a r l K. R. Von Neumann regular rings. — London e. a.: Pitman, 1979.
162. G o o d e a r l K. R. Partially ordered Abelian. grouos with interpolation. Amer. Math. Soc., Providrnce, R. I., 1986.
163. G o r d o n R., R o b s o n J. C. Krull dimension//Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 133. — 78 p.
164. G r e i t h e r C. Die unzerlegbaren Moduln über $k[X, Y]/(X, Y)^2$. — München: Math. Inst. Univ. München, 1979. — 26 S.

165. Guennoun M. Les hierarchilonguers//Queen's Pap. Pure and Appl. Math. — 1980. — V. 55. — 149 p.
166. Guralnick R. M. Modules under ground ring extension. — Lect. Notes Math., 1985, N 1142, 150—156.
167. Haley D. K. Equational compactness in rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1979. — 167 p. — (Lect. Notes Math. V. 745).
168. Hanche-Olsen H., Størmer E. Jordan operator algebras. — London e. a.: Pitman, 1984.
169. Hanna A., Shamsuddin A. Duality in the category of modules. Applications. — München: Math. Inst. Univ. München, 1984. — 34 S.
170. Harada M. Factor categories with applications to direct decomposition of modules. New York: M. Dekker, Inc., 1983. — (Lect. Notes in Pure and Appl. Math. V. 88).
171. Herrmann P.-Ju. Projective properties of modules. — München: Verlag R. Fischer, 1984.
172. Herstein I. N. Rings with involution. — Chicago; London: Chicago Univ. Press, 1976.
173. Hilton P. J., Wu Yel-Chiang. A course in modern algebra. — New York e. a.: John Wiley and Sons, 1974, XII, 249 pp.
174. Honstetter W. Beschränkte Ringe und minimal subdirekte Producte. — München: Fischer, 1988. — 60 S. — (Algebra-Ber. V. 15, N 58).
175. Humphroys J. E. Introduction to Lie algebras and representation theory. — Berlin e. a.: Springer, 1978.
176. Jacobson N. PI-algebras. An introduction. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1975. — 115 p. — (Lect Notes Math. V. 441).
177. Jacobson N. Structure and representations of Jordan algebras. — Providence, R. I., 1968.
178. Jacobson N. Structure theory of Jordan algebras//Univ. Arkansas Lect. Notes in Math. — 1981. — N 5.
179. Jara Martinez D. Teorias de torsión: zócalo y radical. — Santiago de Compostela: Univ. de Santiago de Compostela, Depart. de Algebra y Fundamentos, 1983.
180. Jategaonkar A. V. Left principal ideal rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1970. — 146 p. — (Lect. Notes Math. V. 123).
181. Jategaonkar A. V. Localization in Noetherian rings. — Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1986.
182. Kaplansky I. Rings of operators. — New York: Amsterdam: W. A. Benjamin, inc., 1968.
183. Karpilovsky G. Commutative group algebras. — New York: M. Dekker, 1983.
184. Karpilovsky G. The Jacobson radical of group algebras. Amsetrdam: Norsh-Holland, 1987.
185. Karpilovsky G. The algebraic structure of crossed products. — Amsterdam: North-Holland, 1987.
186. Kasch F. Partiell invertierbare Homomorphismen und das Total. — München: Fischer, 1988. — 14 S. — (Algebra-Ber. V. 15, N 60).
187. Kertész A. Vorlesungen über Artinsche Ringe. — Budapest: Akad. Kiadó, 1968.

188. Kertész A. Lectures on Artinian rings. — Budapest: Akad. Kiadó, 1987.
189. Knebusch M., Kolster M. Wittrings. — Braunschweig: F. Wieweg & Sohn, 1982.
190. Koecher M. Jordan algebras and their applications. — Minneapolis: Univ. Minnesota, 1962.
191. Kolchin E. R. Differential algebra and algebraic groups.— New York: Acad. Press, 1973.
192. Kolchin E. R. Differential algebraic groups. — New York: Acad. Press, 1985.
193. Koulibaly A. Contributions à la théorie des algèbres de Mal'cev. — Montpellier: Univ. Sci. et Techn. du Languedoc, 1985.
194. Kraemer J. Injective Moduln, (Morita)-Selbstdualitäten, Zentren von Ringen. — München: Verlag R. Fischer, 1985.
195. Kraemer J. Characterizations of the existence of quasi-self-duality for complete tensor rings. — München: Fischer, 1987. — 80 S. — (Algebra-Ber. V. 14, N 56).
196. Krasner M., Vuković M. Structure paragraduées (groupes, anneaux, modules)//Queen's Papers in Pure and appl. Math. — 1987. — V. 77. — 163 p.
197. Krause G. R., Lenagan T. H. Growth of algebras and Gelfand-Kirillow dimension. — Boston e. a.: Pitman, 1985.
198. Kruse R. L., Price D. T. Nilpotent rings. — New York e. a.: Gordon and Breach, 1969.
199. Lam T. Y. Serre's conjecture. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1978. — 227 p. — (Lect. Notes Math. V. 635).
200. Lambek J. Torsion theories, additive semantics and rings of quotients. — Berlin: Springer, 1971. — VI + 84 p.
201. Landrock P. Finite group algebras and their modules London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1983, N 84, 274 pp.
202. Loos O. Jordan paars. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1975. — 218 p. — (Lect. Notes Math. V. 460).
203. Malliavin M.-P. Algèbre commutative. Applications en géométrie et théorie des nombers. — Paris: Masson, 1985.
204. Mallious A. Topological algebres. Selected topics. — Amsterdam: North-Holland, 1986.
205. Mathiak K. Valuations of skew-fields and projective Hjelmslev spaces. — Berlin e. a.: Springer, 1986.
206. Matlis E. Generalizations of divisible Abelian groups to the theory of modules//Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi, Roma, 1979. — V. 23. — P. 241 -250.
207. Matsuda M. First order algebraic differential equation. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980. — 110 p. — (Lect. Notes Math. V. 804).
208. McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian rings. — Chictester e. a.: J. Wiley & Sons, 1987.
209. McCrimmon K. Jordan algebras and their applications.— Bull. Amer. Math. Soc. — 1978. — V. 84, N 4. — P. 612—627.
210. McCrimmon K. The Russian revolution in Jordan algebras//Algebras, Groups, Geom. — 1984. — V. 1. N 1. — P. 1—61.
211. McDonald B. R. Finite rings with identity. — New York: M. Dekker, 1974.

212. Meltzer H. The structure of indecomposable modules. — Leipzig: Teubner, 1986. — 96 p.
213. Mines R., Richman F., Ruitenburg W. A course in constructive algebra. — Berlin e. a.: Springer, 1987.
214. Mitchell B. Rings with several objects//Adv. Math. — 1972. — V. 8, N 1. — P. 1—161.
215. Mitchell B. Separable algebroids//Mem. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 57, N 333 — 96 p.
216. Montgomery S. Fixed rings of finite automorphism group of associative rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980 — 126 p.
217. Mucke C. Zerlegungseigenschaften von stetigen und quasistetigen Moduln. — München: Fischer, 1988. — 108 S. — (Algebra-Ber. V. 15, N 57).
218. Müller B. J. Morita duality — a survey//Abelian Groups and Modules. Proc. Conf. Udine (Apr., 9—14, 1984). — Wien-New York, 1984. — P. 395—414.
219. Myung H. Ch. Mal'cev-admissible algebras. — Boston: Birkhäuser, 1986.
220. Nagata M. On flat extensions of a ring. — Montréal: Press. Univ., 1975.
221. Năstăsescu C., Oystacyen F. van. Graded and filtered rings and modules. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1979. — 148 p. — (Lect. Notes Math. V. 758).
222. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. Graded rings theory. — Amsterdam e. a.: North-Holland, 1982.
223. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. Dimensions of ring theory. — Dordrecht e. a.: D. Reidel Publ. Co., 1987.
224. Neher E. Jordan triple systems by the grid approach. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1987. — (Lect. Notes Math. V. 1280).
225. Netzsch R. Bialgebren in Endomorphismenringen. — München: Fischer, 1979. — 146 S. — (Algebra-Ber, N 38).
226. Neumann J. von. Continuous geometry. — New Jersey: Princenton, 1960.
227. Northcott D. G. A first course of homological algebra. London, 1973. — XI + 206 p.
228. Osofsky B. L. Homological dimensions of modules. — Amer. Math. Soc., 1973. — 89 p.
229. Oystaeyen F. van, Verschoren A. Reflectors and localization. Application to sheaf theory. — New York; Basel: M. Dekker, 1979.
230. Passman D. S. The algebraic structure of group rings. — New York: Wiley-Interscionse, 1977. — (2 Ed., Melbourne: R. E. Krieger Publ. Co., Inc., 1985).
231. Passman D. S. Algebraic crossed products. Group action on rings Brunswick, Maine, 1984//Contemp. Math. — 1985. — V. 43. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. — P. 209—225.
232. Passman D. S. Group rings, crosses products and Galois theory. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1986. — 71 p.
233. Passman D. S. Infinite crossed products. — Math. Department Univ. of Wisconsin, 1988.
234. Petrich M. Rings and semigroups. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1974. — VIII + 182 p. — (Lect. Notes Math. V. 38).

235. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1967. — 112 p. — (Mem. Amer. Math. Soc. V. 70).
236. Pommaret J.-F. Differential Galois theory. — New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1983.
237. Popescu N. Abelian categories with applications to rings and modules. — London: Acad. Press, 1973.
238. Prest M. Model theory and modules//London Math. Soc., Lect. Notes Ser. — 1988. — V. 130.
239. Procesi C. Rings with polynomial identities. — New York: M. Dekker, 1973.
240. Redei L. Algebra. I. Teil. — Leipzig: Akad. Verlag. Geest & Portig K.-G., 1959.
241. Reiten I. An introduction to the representation theory of Artin algebras//Bull. London Math. Soc. — 1985. — V. 17, N 3. — P. 209—233.
242. Renoult G. Algèbre non commutative. — Paris: Gauthier — Villars 1975. — IX, 181 pp.
243. Riedtmann C. Algèbres de type de représentation fini d'après Bautista, Bogartz, Gabriel, Roiter et d'autres. Seminar Bourbaki, v. 1984/85//Astérisque. — 1986. — N 133—134. — P. 335—350.
244. Ringel C. M. Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren//Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. — 1983. — V. 85, N 2. — P. 86—105.
245. Ringel C. M. Tame algebras and integral quadratic forms. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1984. — 376 p. — (Lect. Notes Math. V. 1099).
246. Ritt J. F. Differential algebra. — New York: Amer. Math. Soc. Coll. Pub. N 33, 1950.
247. Roberts P. Homological inwariants of modules over commutative rings. — Montrèal: Presses de j'Universete de Montrèal, 1980.
248. Rowen L. H. Polynomial identities on ring theory. — New York: 1980.
249. Schafer R. D. An introduction to nonassociative algebras. — London: Acad. Press, 1966.
250. Schneider W. Das Total von Moduln und Ringen. — München: Verlag R. Fischer, 1987.
251. Schofield A. H. Representation of rings over skew fields. — Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1985.
252. Schulz R. The Descendnig Loewy Length of Endomorphism Rings. — München: Fischer, 1981. — (Algebra-Ber. V. 8, N 41).
253. Schulz R. Über den Erweiterungsring $\mathrm{Ext}^*_R(M, M)$. — München: Fischer, 1984. — (Algebra-Ber. V. 11, N 50).
254. Sharpe D. W., Vamos P. Injective modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972. — IX, 190 p.
255. Springer T. A. Jordan algebras and algebraic groups. — Berlin e. a.: Springer, 1973.
256. Steinfeld O. Quasi-ideals in rings and semigroups. — Budapest: Acad. Kiadó, 1978.
257. Stenström B. Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. — Berlin: Springer, 1975.

258. Szasz F. Radikale der Ringe. — Berlin: Deutsch. Verlag der Wiss, 1975.
259. Tachikawa Hiroyuki. Quasi-Frobenius rings and generalizations. QF-3 and QF-1 rings. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973. — 172 p. — (Lect. Notes Math. V. 351).
260. Taylor M. Classgroup of group rings. — Cambridge e. a., Cambridge Univ. Press, 1984.
261. Teply M. A history of the progress on the singular splitting problem. — Universidad de Murcia, Dep. de Algebra y Fundamentos, Murcia, 1984. — 46 p.
262. Teply M. Finiteness conditions on torsion theories. — Cranada: Univ. de Granada, Facult. de Ciencias, Departam. de Algebra y Fundamentos, 1985. — 78 p.
263. Tomber M. L. A short history of nonassociative algebras// Hadronic J. — 1979. — V. 2. — P. 1252—1387.
264. Tomber's bibliography and index in nonassociative algebras/ Ed. Tomber M. L. — I—III. — Nonantum, Mass.: Hadronic Press, Inc., 1984. — 535 p.
265. Upmeier H. Symmetric Ranach manifolds and Jordan C*-algebras. — Amsterdam e. a.: North-Holland, 1985. Soc., 1987.
266. Upmeier H. Jordan algebras in analysis, operator theory and quantum mechanics. — Providence, R. I.: Amer. Math.
267. Vasconcelos W. V. Divisor theory in module categories. — Amsterdam e. a.: North-Holland, 1974.
268. Vasconcelos W. V. The rings of dimension two. — New York; Basel: Marcel Dekker, 1976. — 101 p.
269. Vignéras M.-F. Arithmétique des algèbres de quaternions. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980. — 169 p. — (Lect. Notes Math. V. 800).
270. Waschbüsch J. On self-injective algebras of finite representation type. — Mexico City: Univ. Nacional Autónoma de México, 1983. — 59 p.
271. Wiesław W. Topological fields. — Wrocław: Wydawn. Univ. Wrocławskiego, 1982.
272. Wisbauer R. Grundlagen der Modul- and Ringtheorie. — München:R. Fischer, 1989.
273. Yahya S. M. Cogenerators in Abelian groups and modules// Math. Galf. Area. Proc. I. Int. Conf., Riyadh. — 1984. — P. 139—148.
274. Zelmanowitz J. M. On the Jacobson density theorem// Contemp. Math. — 1982. — V. 13. — P. 155—162.
275. Zelmanowitz J. M. Duality-theory for quasi-injective modules. — München: Fischer, 1984. — 17 S. — (Algebra-Ber. V. 11, N 46).
276. Zelmanowitz J. M., Jansen W. Duality for Module Categories. — München: Fischer, 1988. — 33 S. — (Algebra-Ber. V. 15, N 59).
277. Zöllner A. Lokal — direkte Summanden. — München: Fischer, 1984. — (Algebra-Ber. V. 11, N 51).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Справочное издание

МЕЛЬНИКОВ Олег Владимирович,
РЕМЕСЛЕННИКОВ Владимир Никанорович,
РОМАНЬКОВ Виталий Анатольевич,
СКОРНЯКОВ Лев Анатольевич
ШЕСТАКОВ Иван Павлович

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

Том 1

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *Ф. И. Кизнер*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *Н. Б. Румянцева, О. М. Карпова*

ИБ № 32384

Сдано в набор 17.11.89. Подписано к печати 20.09.90. Формат $84 \times 108/_{32}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 31,08. Усл. кр.-отт. 31,08. Уч.-изд. л. 34,05. Тираж 30 000 экз. Заказ № 346. Цена 2 р.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29,

2 р.

СМБ

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

ТОМ 1